

Curve. $r: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ CONTINUE.

DERIVATE

r derivabile in $t_0 \in [a, b]$ se $r = (r_1, \dots, r_3)$ e

r_i derivabili con derivate $r'_i(t_0)$ in t_0 :

$$r'(t_0) = (r'_1(t_0), r'_2(t_0), r'_3(t_0)).$$

PROP. a) $\alpha: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $r: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\alpha(t)r(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha r_1, \alpha r_2, \alpha r_3)(t)$$

Se α e r sono derivabili allora αr è derivabile

$$(\alpha r)' = \alpha' r + \alpha r'$$

b) $u, v: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ derivabili. Allora il

prodotto scalare $u \cdot v(t) = u(t) \cdot v(t) \in \mathbb{R}$ e

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

c) $u: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha: [c, d] \longrightarrow [a, b]$

$$(u \circ \alpha)(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(\alpha(t))$$

Se u e α sono derivabili allora $u \circ \alpha$ è

derivabile e:

$$(u \circ \alpha)'(t) = \underbrace{u'(\alpha(t))}_{\in \mathbb{R}^3} \underbrace{\alpha'(t)}_{\in \mathbb{R}}$$

pr. di scalare per un vettore.

Es. $u(t) = (t^2, \sin t)$; $\alpha(x) = x^2$

$$(u \circ \alpha)(x) = u(\alpha(x)) = u(x^2) = (x^4, \sin x^2).$$

Due modi per derivare:

1) $(u \circ \alpha)'(x) = (4x^3, 2x \cos x^2).$

2) Usando la formula:

$$(u \circ \alpha)'(x) = u'(\alpha(x)) \alpha'(x)$$

$$u'(t) = (2t, \cos t) \Rightarrow u'(\alpha(x)) = u'(x^2) = (2x^2, \cos x^2)$$

$$u'(\alpha(x)) \alpha'(x) = (2x^2, \cos x^2) \underbrace{(x^2)'}_{2x} = 2x(2x^2, \cos x^2) = (4x^3, 2x \cos x^2).$$

Dim a) $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u \circ \alpha)' = \alpha' u + \alpha u' : \text{infatti}$$

$$u \circ \alpha = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) \text{ se } u = (u_1, u_2, u_3).$$

$\Downarrow$

$$(u \circ \alpha)' = \left(\underbrace{(\alpha u_1)'}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{(\alpha u_2)'}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{(\alpha u_3)'}_{\in \mathbb{R}} \right)$$

$$\begin{array}{ccc} \in \mathbb{R} & \in \mathbb{K} & \in \mathbb{K} \\ \parallel & \parallel & \searrow \\ (d^1 u_1 + d u_1^1, & d^1 u_2 + d u_2^1, & d^1 u_3 + d u_3^1) \end{array}$$

$$= (d^1 u_1, d^1 u_2, d^1 u_3) + (d u_1^1, d u_2^1, d u_3^1)$$

$$= d^1 u \quad d u^1 \quad = d^1 u + d u^1$$

b) e c) per esercizio.

Mini ripasso sul T. fond. del Calcolo.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

$$\text{Sia } F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{Allora } F'(x) = f(x).$$

Viceversa se $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^1$

$$\text{allora } \boxed{F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt}$$

$$\underline{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}} \quad \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Dim:

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\Rightarrow -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Integrali: SOMMA di RIEMANN: ($f \geq 0$)

$$t_0 = a \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq b = t_{n+1}$$

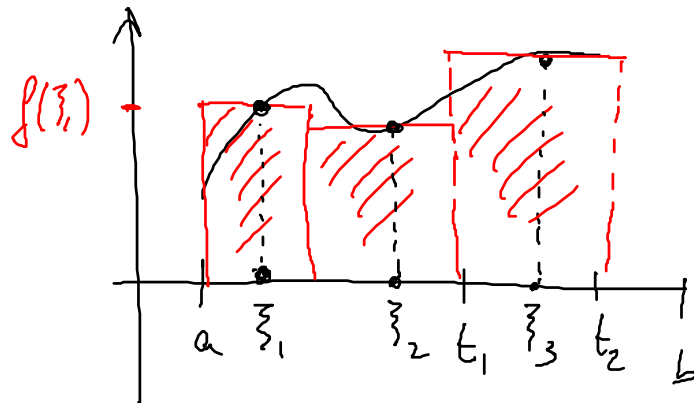
$$f(\xi_1)(t_1 - a)$$

+

$$f(\xi_2)(t_2 - t_1)$$

+

$$f(\xi_3)(t_3 - t_2)$$



Somma di Riemann $\rightarrow \int_a^b f(t) dt$ quando

$$\max\{t_1 - a, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}, b - t_n\} \rightarrow 0$$

INTEGRALE di una funzione $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

DEF. $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ CONTINUA.

L' integrale di r su $[a, b]$ è IL VETTORE

$$\int_a^b r(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_a^b r_1(t) dt, \int_a^b r_2(t) dt, \int_a^b r_3(t) dt \right)$$

Interpretazione con le somme di Riemann:

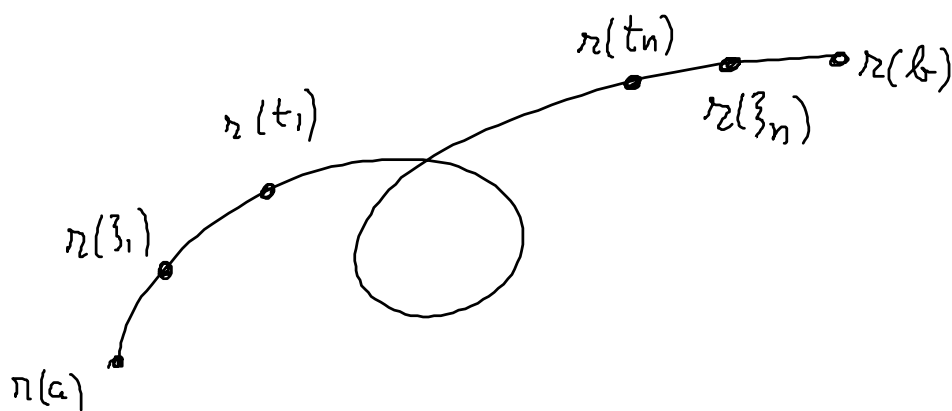
$$a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$$

$$\int_a^b r_1(t) dt : \lim_{n \rightarrow \infty} r_1(\xi_1)(t_1 - a_1) + \dots + r_1(\xi_n)(b - t_n)$$

$$\int_a^b r_2(t) dt : r_2(\xi_1)(t_1 - a_1) + \dots + r_2(\xi_n)(b - t_n)$$

$$\int_a^b r_3(t) dt : \dots$$

$$\int_a^b r(t) dt \text{ limite di } r(\xi_1)(t_1 - a_1) + \dots + r(\xi_n)(b - t_n).$$

$\int_a$ $\int_a^b \mathbb{R}^3$ $\int_a^b \mathbb{R}^3$ 

$$r(z_1)(t_1 - a) + \dots + r(z_n)(b - t_n).$$

PROP. Sia $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. Allora

$$\left\| \int_a^b r(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|r(t)\| dt$$

↑
int di una
funzione a valori in $\mathbb{R}^3$

↑
int. di una funzione
a valori reali

E: come dimostrarla utilizzando le somme di Riemann.

LUNGHEZZA DI UNA CURVA.

Sia $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

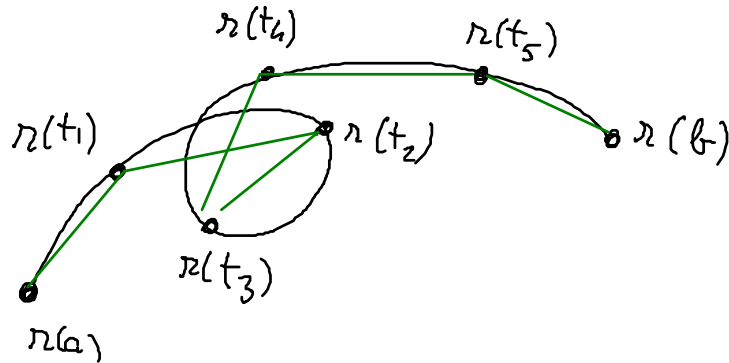
Una suddivisione di $[a, b]$ è

$$t_0 = a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b = t_{n+1}$$

Poligonale associata alla suddivisione:

Poligonale associata alla suddivisione:

$$(r(a), r(t_1), \dots, r(t_n), r(b))$$



La lunghezza di questa poligonale è la somma delle lunghezze dei segmenti verdi:

$$\|r(t_1) - r(a)\| + \dots + \|r(b) - r(t_n)\|. \quad \text{notazione}$$

DEF. La lunghezza di r su $[a, b]$, $\overline{V(r|_{[a, b]})}$,
è l'estremo superiore delle poligonali precedenti
al variare delle suddivisioni di $[a, b]$

$$\text{Cioè } \underbrace{V(r|_{[a, b]})}_{//}$$

$$\sup \left\{ \|r(t_1) - r(a)\| + \dots + \|r(b) - r(t_n)\| : \right. \\ \left. a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b \right\}$$

Si dice che r è **rettificabile** se

$$V(r|_{[a, b]}) < +\infty.$$

ESEMPIO. Siano $a < b$; $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$
STIMA dal basso della lunghezza.

che congiunge due punti fissati:

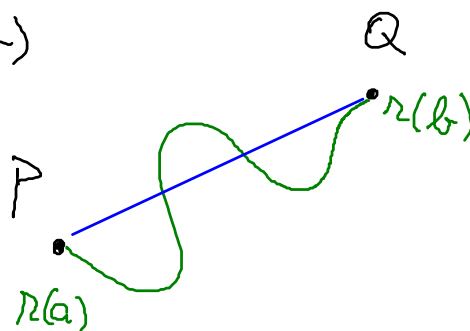
$$P = r(a) \quad e \quad Q = r(b)$$

Lunghezza del segmento

PQ è data da

$$\|r(b) - r(a)\|$$

"Lunghezza della poligonale $(r(a), r(b))$



La lunghezza di r = estremo superiore delle lunghezze di tutte le possibili poligonali:

$$\Rightarrow V(r|_{[a,b]}) \geq \|r(b) - r(a)\| = \|Q - P\|.$$

PROP (intermedia): STIMA dall'alto della lunghezza

Sia $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ derivabile con derivata continua. Allora $V(r|_{[a,b]}) \leq \int_a^b \|r'(t)\| dt$

Es: $r(t) = (\ln(t^2+1), 5t, t^{10})$

$$V(r|_{[0,1]}) \leq \int_0^1 \|r'(t)\| dt$$

$$r'(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, 5, 10t^9 \right)$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 + 25 + 100t^{18}}$$

$$V(r([0,1])) \leq \int_0^1 (\ast) dt \quad (\text{Computer})$$

Dim. Consideriamo una poligonale

$(r(a), r(t_1), \dots, r(t_n), r(b))$ la cui lunghezza è

$$\|r(t_1) - r(a)\| + \dots + \|r(b) - r(t_n)\|.$$

OSS:

$$\underbrace{r(t_1) - r(a)}_{\in \mathbb{R}^3} = \left(\underbrace{r_1(t_1) - r_1(a)}_{\int_a^{t_1} r'_1(t) dt}, \dots, \underbrace{r_3(t_1) - r_3(a)}_{\int_a^{t_1} r'_3(t) dt} \right)$$

$$= \int_a^{t_1} \underbrace{r'(t)}_{\in \mathbb{R}^3} dt$$

$$r(t_1) - r(a) = \int_a^{t_1} r'(t) dt$$

$$\|r(t_1) - r(a)\| = \left\| \int_a^{t_1} r'(t) dt \right\| \leq \int_a^{t_1} \|r'(t)\| dt$$

$$\|r(t_2) - r(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|r'(t)\| dt$$

$\vdots$

$$\|r(b) - r(t_n)\| \leq \int_{t_n}^b \|r'(t)\| dt$$

$$\|r(t_1) - r(a)\| = \left\| \int_a^{t_1} r'(t) dt \right\| \leq \int_a^{t_1} \|r'(t)\| dt$$

$$\|r(t_2) - r(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|r'(t)\| dt$$

⋮

$$\|r(b) - r(t_n)\| \leq \int_{t_n}^b \|r'(t)\| dt$$

$$\underbrace{\|r(t_1) - r(a)\| + \dots + \|r(b) - r(t_n)\|}_{\leq \int_a^{t_1} \|r'(t)\| dt + \int_{t_1}^{t_2} \|r'(t)\| dt + \dots + \int_{t_n}^b \|r'(t)\| dt} \leq \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

$$\Rightarrow V(r|_{[a,b]}) = \sup(\text{lungh. delle poligonali})$$

$$\leq \int_a^b \|r'(t)\| dt \quad \#$$

Q.E.D.

r

RIPASSO: funzioni

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Grafico di f :

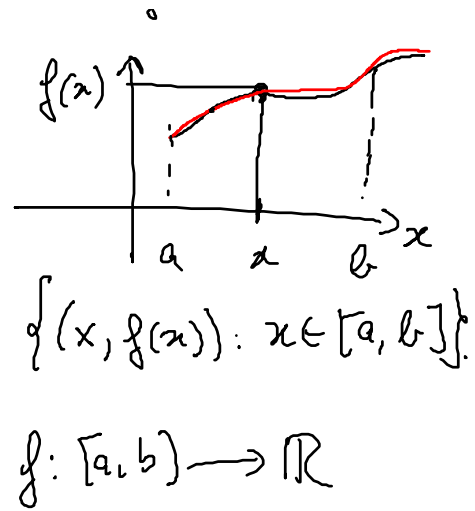
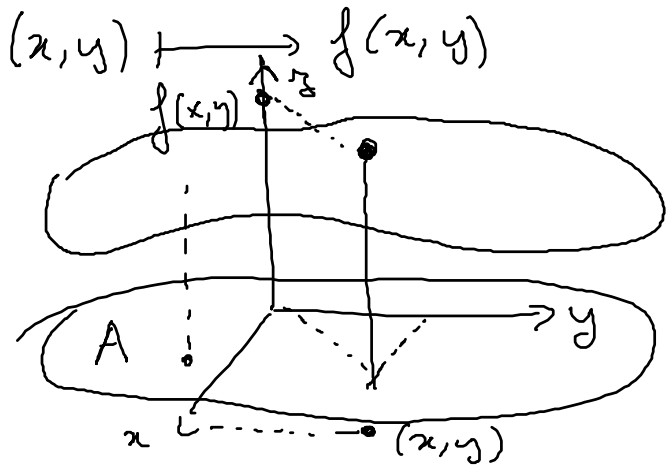


Grafico di $f =$

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}.$$

ES: Grafico di $x^2 + y^2$; $x^2 - y^2$, $\sqrt{x^2 + y^2}$;
 $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ (dove sono definite).