Curve 1.3
lunedì 18 ottobre 2010
08:30

Lunghezza di una curva.

$r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ CONTINUA.

Lunghezza di una curva

PROPRIETÀ (stime della lunghezza)

- $\|r(b) - r(a)\| \leq V(r \mid [a,b])$, $\forall r$
- Se r è di classe $\mathcal{C}^1$ allora

$$V(r \mid [a,b]) \leq \int_a^b \underbrace{\|r'(t)\|}_{\text{qui si utilizza il fatto che } r \in \mathcal{C}^1} \, dt$$

qui si utilizza il fatto che $r \in \mathcal{C}^1$.

ESEMPIO: Curve non $\mathcal{C}^1$ possono avere lunghezza infinita!

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

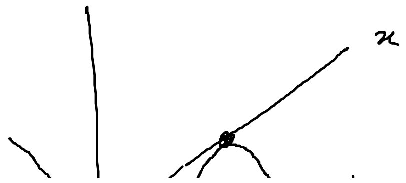
continua; $r(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$

$\cos \frac{\pi}{x}$ oscilla continuamente tra -1 e 1:

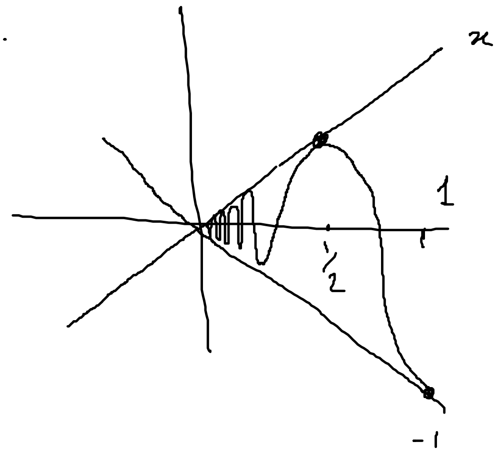
$\cos \frac{\pi}{x} = 1$ se $\frac{\pi}{x} = 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad \boxed{x = \frac{1}{2k}}$

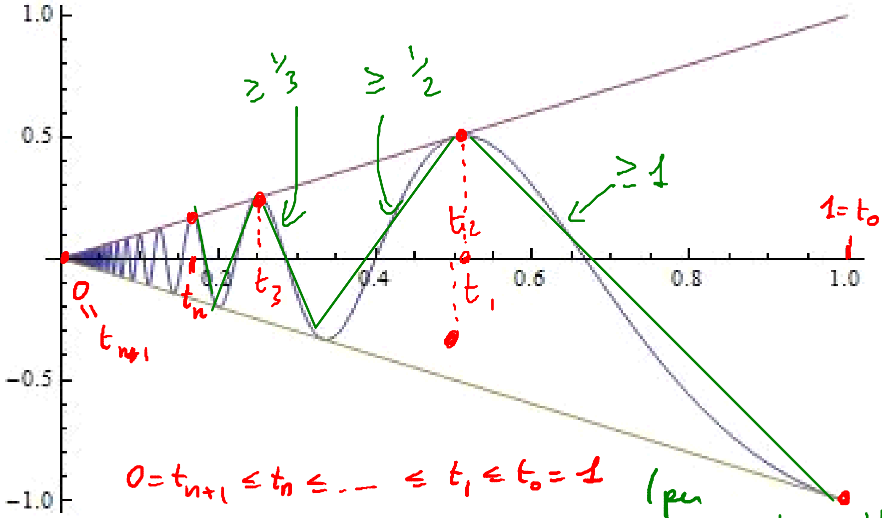
$\cos \frac{\pi}{x} = -1$ se $\frac{\pi}{x} = \pi + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad x = \frac{1}{2k+1}$

$|f(x)| = \left| x \cos \frac{\pi}{x} \right| \leq |x|$.



$$|f(x)| = \left|x\cos\frac{\pi}{x}\right| \le |x|.$$





(per comodità abbiamo chiamato i t_k in questo modo, mentre prima i t_k erano crescenti da a a b; ciò evidentemente non influisce sui conti).

OSS: $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \ge \sqrt{y^2} = |y|$
$\ge \sqrt{x^2} = |x|$

Considero $t_0 = 1,\ t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = \frac{1}{3}, \ldots, t_n = \frac{1}{n+1},\ t_{n+1} = 0.$

con la poligonale associata a $0 = t_{n+1} \le t_n \le \ldots \le t_1 \le t_0 = 1$

$(r(t_{n+1}),\ r(t_n), \ldots,\ r(t_0))$

$$V(r\,|\,[0,1]) \ge \underbrace{\|r(t_0) - r(t_1)\|}_{} + \ldots + \underbrace{\|r(t_n) - r(t_{n+1})\|}_{}$$

Per $k < n$ è

$$r(t_k) - r(t_{k-1}) = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\cos(k+1)\pi\right) - \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\cos k\pi\right)$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}}_{},\ \underbrace{\frac{1}{k+1}\cos(k+1)\pi - \frac{1}{k}\cos(k\pi)}_{}\right).$$

$$\|r(t_k) - r(t_{k-1})\| > \left|\frac{1}{\cdot}\cos(k+1)\pi - \frac{1}{k}\cos k\pi\right|$$

$$\|r(t_k)-r(t_{k-1})\| \geq \left| \frac{1}{k+1} \underbrace{\cos(k+1)\pi}_{\substack{\| \\ 1 \\ -1}} - \frac{1}{k} \underbrace{\cos k\pi}_{\substack{-1 \\ \\ 1}} \right| \qquad \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1}$$

$$\|r(t_0)-r(t_1)\| + \dots + \|r(t_{n-1})-r(t_n)\| \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$ sicché

$$\underbrace{V(r \mid [0,1])}_{\text{non dipende } n} \geq \underbrace{1 + \dots + \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r \mid [0,1]) = +\infty}$$ r non è rettificabile.

(r non è $\mathcal{C}^1$ in $[0,1]$).

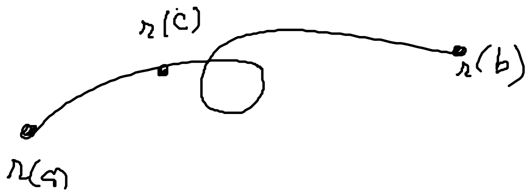
TEOREMA (Lunghezza di una curva $\mathcal{C}^1$).

Sia $r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva di classe $\mathcal{C}^1$.
Allora $V(r \mid [a,b]) = \int_a^b \|r'(t)\|\, dt$.

OSSERVAZIONI PRELIMINARI:

- Se $r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è continua allora

se $a \leq c \leq b$



$$V(r \mid [a,b]) = V(r \mid [a,c]) + V(r \mid [c,b]).$$

- Se $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ g' continua,

$$\forall t : \ g(t) - g(a) = \int_a^t g'(u)\, du.$$

Dim. del teorema.

Consideriamo $g(t) = V(r|[a,t])$. $[g(a) = 0]$.

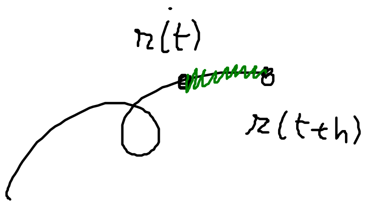
Proviamo che g è derivabile e che $g'(t) = \|r'(t)\|$.

Una volta provato $\longrightarrow$ per il T. fond. si ha

$$V(r|[a,b]) = g(b) = \underset{\overset{\|}{0}}{g(a)} + \int_a^b \underbrace{\|r'(t)\|}_{= g'(t).} dt$$

$h > 0$; $\dfrac{g(t+h) - g(t)}{h}$ $\qquad a \leq t < b$

$$= \frac{V(r|[a,t+h]) - V(r|[a,t])}{h}$$



$$= \frac{V(r|[t,t+h])}{h}$$

$(h>0)$

$$\underbrace{\underbrace{\left\| \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \right\|}_{h \to 0^+ \ r'(t)}}_{\to \|r'(t)\|} \leq \underbrace{\frac{V(r|[t,t+h])}{h}}_{} \leq \underbrace{\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|r'(u)\|\, du}_{\xrightarrow{h \to 0^+} \|r'(t)\|.}$$

$$F(t) = \int_a^t g(u)\, du \qquad F'(t) = g(t)$$

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{t+h} g - \int_a^t g}{h}$$

$$= \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(u)\, du}$$

$\Rightarrow$ (T. dei carabinieri)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{V(r|[a,t+h]) - V(r|[a,t])}{h} = \|r'(t)\|.$$

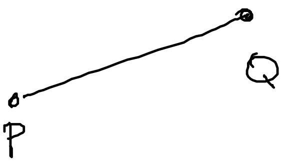
Rifacendo il ragionamento per $a < t \leq b$ e $h<0$ si ottiene $\lim_{h\to 0^-} \text{———} = \|r'(t)\|$.

$\Rightarrow t \mapsto V(r|[a,t])$ è derivabile, con derivata $\|r'(t)\|$. #.

Esempio.

Segmento tra P e Q in $\mathbb{R}^3$

$$r(t) = P + t(Q-P) \qquad t \in [0,1].$$



r è di classe $\mathcal{C}^1$ in $[0,1]$.

Lunghezza di r: $\underbrace{\int_0^1 \|r'(t)\|\, dt}$

$r'(t) = Q - P$

$$\int_0^1 \|r'(t)\|\, dt = \int_0^1 \|Q-P\|\, dt = \|Q-P\|.$$

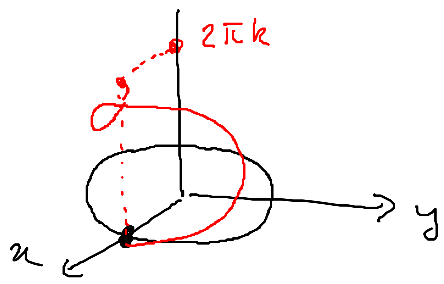
$r'(t) = Q - P$ $\qquad = \int_0^1 \|Q-P\|\,dt = \|Q-P\|.$

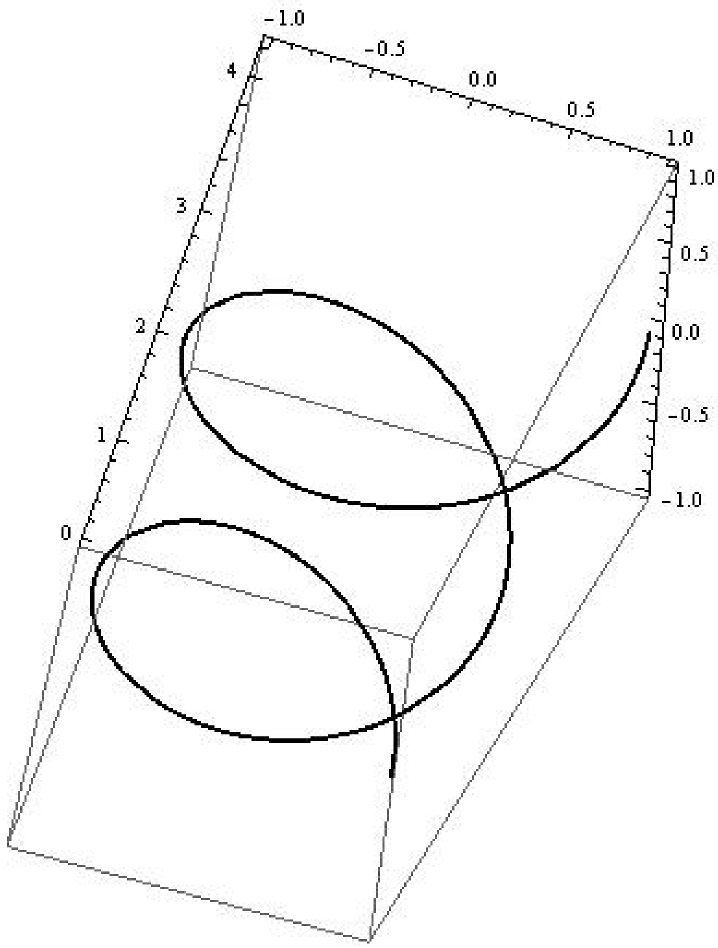
Esempio (elica cilindrica).

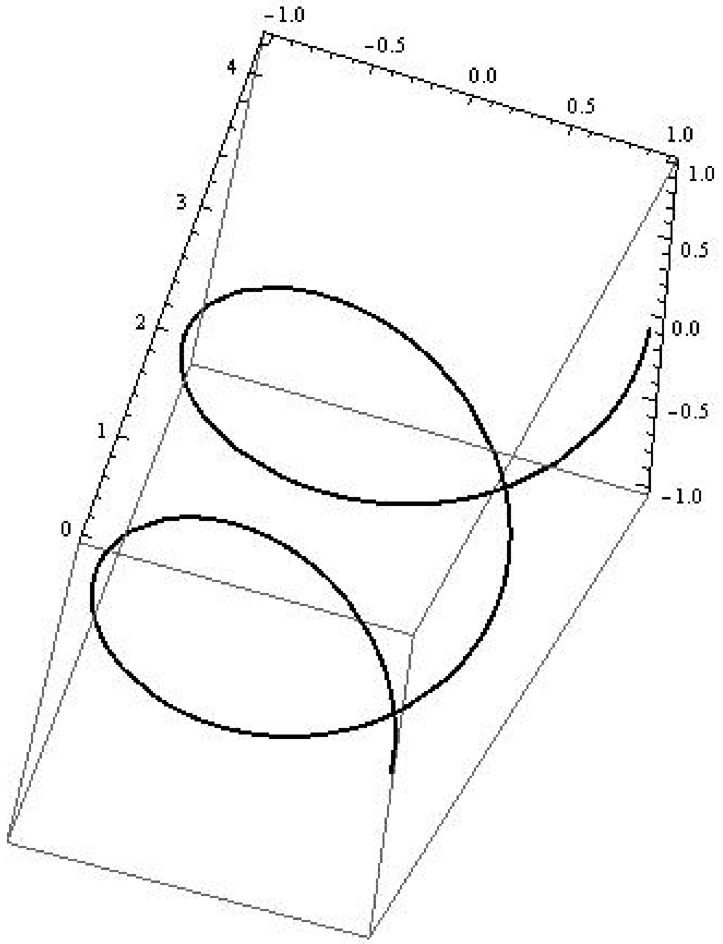
$$r(t) = (\underbrace{a\cos t \,,\, a\sin t}, \, kt) \qquad a>0 \quad k>0.$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \qquad x^2+y^2 = a^2 \;:\; (x,y) \in \text{cerchio centro } O \text{ raggio } a.$$

$z = kt$ cresce con t.







$V(r \mid [0, 2\pi])$ $\qquad r(t) = (a\cos t, a\sin t, kt)$.

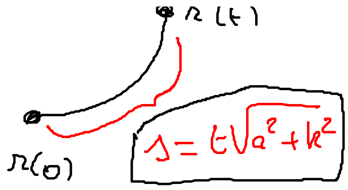
$\parallel \int_0^{2\pi} \|r'(t)\|\, dt$ $\qquad$ è C^1 su $[0, 2\pi]$.

$r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, k)$

$\|r'(t)\|^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + k^2 = a^2 + k^2$

$V(r \mid [0, 2\pi]) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+k^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2+k^2}$

OSS: $V(r \mid [0, t]) = \int_0^t \sqrt{a^2+k^2} = t\sqrt{a^2+k^2}$



Riparametrizziamo r con la variabile s.

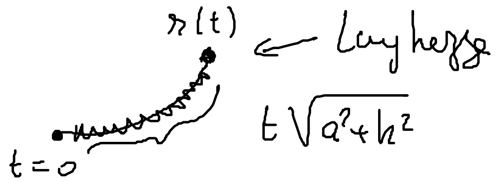
s = lunghezza d'arco / ascissa curvilinea.

$r(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ kt)$ $\qquad t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+k^2}}$

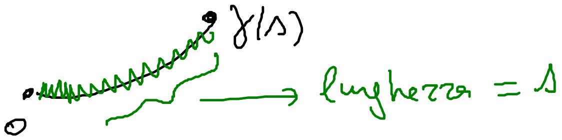
$$\gamma(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+k^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+k^2}},\ \frac{ks}{\sqrt{a^2+k^2}}\right).$$

Parametrizz. di r con la lunghezza d'arco
con l'ascissa curvilinea.

Vantaggio. $r(t)$:



γ



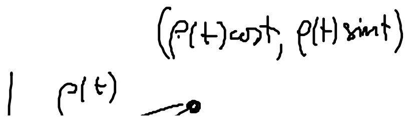
<u>Esempio</u> (Asteroide). (domani).

<u>Esempio</u>. (Curva in coordinate polari).

$r(t) = (\rho(t)\cos t,\ \rho(t)\sin t) \in \mathbb{R}^2$

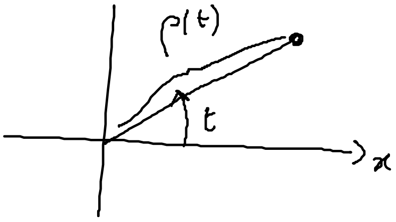
$\rho(t) \geq 0$ di classe $\mathcal{C}^1$.

$$\|r(t)\|^2 = \rho^2(t)\cos^2 t + \rho^2(t)\sin^2 t$$
$$= \rho^2(t)$$



$\rho(t) = \|r(t)\|$

$$\rho(t) = \|r(t)\|.$$



Lunghezza di r: $\displaystyle\int_a^b \|r'(t)\|\,dt$

$$r'(t) = \left((\rho(t)\cos t)', (\rho(t)\sin t)'\right)$$

$$= (\rho'\cos t - \rho\sin t, \rho'\sin t + \rho\cos t)$$

$$\|r'(t)\|^2 = (\rho'\cos t - \rho\sin t)^2 + (\rho'\sin t + \rho\cos t)^2$$

$$= (\dot\rho)^2\cos^2 t + \rho^2\sin^2 t - \cancel{2\rho\dot\rho\cos t\sin t}$$

$$+ (\dot\rho)^2\sin^2 t + \rho^2\cos^2 t + \cancel{2\rho\dot\rho\sin t\cos t}$$

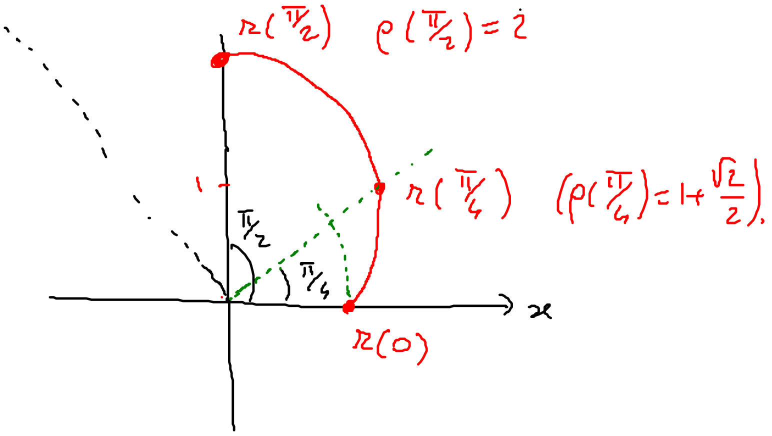
$$(\dot\rho)^2 + \rho^2$$

$$\Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{\rho^2(t) + \dot\rho^2(t)}$$

Es: $\rho(t) = 1 + \sin t$

$$r(t) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t). \quad t \in [0, 2\pi].$$

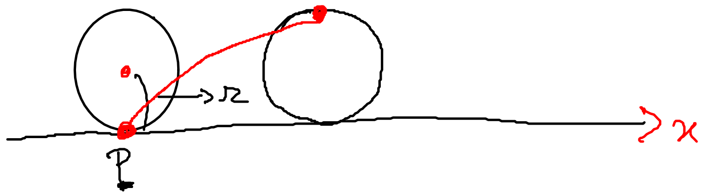
$\rho(3\pi/4)$
$=$
$1 + \sin\frac{3\pi}{4}$
$1 + \frac{\sqrt2}{2}$



Tracciare approssimativamente la curva; calcolarne la lunghezza. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}$

$\rho(t) = 1 + \sin t$.

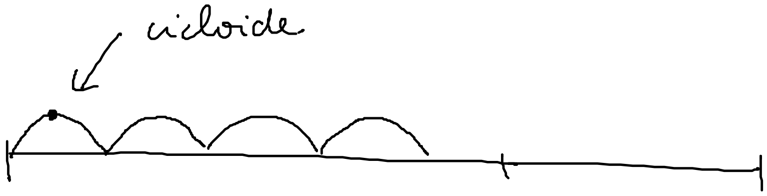
Esercizio. (Cicloide).



Velocità angolare ω: al tempo t ruotata di $\theta = \omega t$.

Scrivere l'eq. della curva descritta dal punto P.

Se avete percorso 10 km ruota $r = \frac{1}{2}$ m, qual è la lunghezza percorsa dal punto P?



Parametrizzazioni di una curva.

Consideriamo una curva $r: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{c} [a,b] \\ \uparrow \varphi \\ [c,d] \end{array}$$

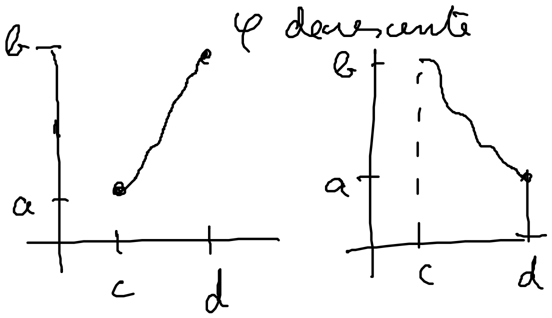
$\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ continua e

strettamente monotona

$\varphi([c,d]) = [a,b]$

o $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ o $\underbrace{\varphi(c) = b, \ \varphi(d) = a}$

φ crescente φ decrescente



$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "r"] & \mathbb{R}^3 \\ {[c,d]} \arrow[u, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

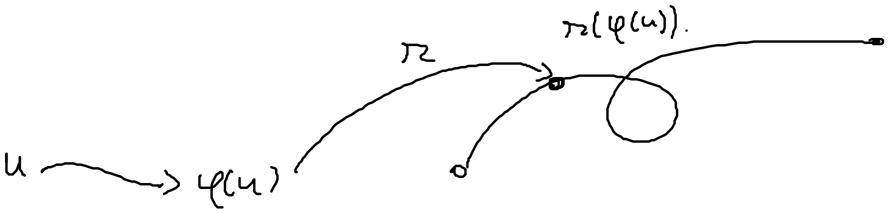
φ biiettiva da $[c,d]$ in $[a,b]$

φ continua.

Definiamo $\gamma(u) = r(\varphi(u))$ $u \in [c,d]$.

$$[c,d] \xrightarrow{\ \varphi\ } [a,b] \xrightarrow{\ r\ } \mathbb{R}^3$$

$$u \longmapsto \varphi(u) \longmapsto r(\varphi(u)).$$



Si dice che γ è una parametrizzazione equivalente a quella di r.

Prop. Si

Prop: Siano r_1 e r_2 parametrizzazioni equivalenti. Allora la lunghezza di r_1 = lunghezza di r_2.

Dim. $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ biiettiva monotona

$$a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$$

$\downarrow$ (φ crescente)

$$\underset{\overset{\shortparallel}{c}}{\varphi^{-1}(a)} \leq \varphi^{-1}(t_1) \leq \dots \leq \varphi^{-1}(t_n) \leq \varphi^{-1}(b) = d.$$