

Parametrizzazioni equivalenti

$r_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ hanno

param. equivalenti se esiste $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$

biettiva, continua tale che $r_2 = r_1 \circ \varphi$

$$\forall t \in [c, d] \quad r_2(t) = r_1(\varphi(t))$$

OSS: φ strett. monotona

Prop: Se r_1 e r_2 hanno param. equivalenti allora

$$V(r_1 | [a, b]) = V(r_2 | [c, d]).$$

Dim. $r_2 = r_1 \circ \varphi$ $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$. Supponiamo

φ crescente. Se $t_0 = a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = b$

$$\sum_{i=0}^n \|r_1(t_{i+1}) - r_1(t_i)\| : \quad t_i = \varphi(u_i) \quad u_i \in [c, d].$$

$$\sum_{i=0}^n \|r_1(\varphi(u_{i+1})) - r_1(\varphi(u_i))\|$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{r_2(u_{i+1})} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{r_2(u_i)}$

$$\sum_{i=0}^n \|r_1(t_{i+1}) - r_1(t_i)\| = \sum_{i=0}^n \|r_2(u_{i+1}) - r_2(u_i)\| \leq V(r_2 | [c, d])$$

dove $c = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n+1} = d$.

$$\sum_{i=0}^n \|r_1(t_{i+1}) - r_1(t_i)\| \leq V(r_2 | [c, d]).$$

$$\forall a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b.$$

$$\Rightarrow \sup \left\{ \sum_{i=0}^n \|r_1(t_{i+1}) - r_1(t_i)\| : a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b \right\} \leq V(r_2 | \dots)$$

$$V(r_1 | [a, b]) \leq V(r_2 | [c, d]).$$

Analogamente, dato che $r_1 = r_2 \circ \varphi^{-1}$ si ottiene

Analogamente, dato che $r_1 = r_2 \circ \varphi^{-1}$ si ottiene

$$V(r_2| [c, d]) \in V(r_1| [a, b]) \quad \#$$

Es. $r_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$r_2(u) = (\cos u^2, \sin u^2) \quad u \in [0, \sqrt{2\pi}]$$

sono param. equivalenti della stessa curva.

Es. (Asima curvilinea). $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 .

Supponiamo $r'(t) \neq 0$ in $[a, b]$.

Poniamo $s = \int_a^t \|r'(u)\| du$

$$t \mapsto s(t) = V(r| [a, t])$$

$$[a, b] \longrightarrow [0, L] \quad L = \text{lunghezza della curva in } [a, b].$$

s continua, derivabile $s'(t) = \|r'(t)\| > 0$:

s è strettamente monotona, continua da $[a, b]$ in $[0, L]$

Sia φ l'inversa di s :

$$\begin{array}{ccc} t & \xrightarrow{s} & s(t) \\ & \nwarrow \varphi & \uparrow \\ & & u \end{array}$$

$$t \xrightarrow{s} s(t) \xrightarrow{\varphi} t$$

$$u \in [0, L] \xrightarrow{\varphi} t \in [a, b] \quad u = V(r| [a, t]).$$

$$= s(t)$$

Def : $r(\varphi(s)) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ si chiama
la riparametrizzazione di r con la lunghezza d'arco.

Lunghezza dell'arco verde = $\bar{s}$



$$s=0 \quad \text{---} \quad r(\varphi(s))$$

Es. $r(t) = 5(\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

Parametrizzare r con l'ascissa curvilinea.

$$V(r| [0, t]) = s$$

$$\int_0^t \|r'(u)\| du \quad r'(u) = (-\sin u, \cos u) 5$$

$$\|r'(u)\| = 5$$

$$\int_0^t 5 du = 5t$$

$$s = 5t \Leftrightarrow t = \frac{s}{5} \equiv t(s)$$

$$r(t(s)) = 5\left(\cos \frac{s}{5}, \sin \frac{s}{5}\right) \quad s \in [0, 5 \times 2\pi]$$

Prop: $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. Allora

$$\left\| \int_a^b r(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|r(t)\| dt.$$

NON SCRIVERE:

$$-\|r(t)\| \leq r(t) \leq \|r(t)\|$$

$$\sum_{i=0}^n r(\xi_i)(t_{i+1}-t_i) \rightarrow \int_a^b r(t) dt$$

$$a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = b \quad e \quad \xi_i \in [t_i, t_{i+1}].$$

$$se \quad \max\{t_1 - a, t_2 - t_1, \dots, t_{n+1} - t_n\} \rightarrow 0.$$

$$\text{Analogamente} \quad \sum \|r(\xi_i)\|(t_{i+1}-t_i) \rightarrow \int_a^b \|r(t)\| dt$$

$$\text{Ora} \quad \left\| \sum_{i=0}^n r(\xi_i)(t_{i+1}-t_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^n \|r(\xi_i)\|(t_{i+1}-t_i)$$

$$\left\| \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{r}(t)\| dt \quad \#$$

cont. di $\|\cdot\|$

Prop. $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad a < c < b$

Allora $V(\mathbf{r}([a, b])) = V(\mathbf{r}([a, c])) + V(\mathbf{r}([c, b]))$.

Dim.

Idea: $V(\mathbf{r}([a, c])) \approx \sum \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| \quad a \leq t_i \leq t_{n+1} = c$

$V(\mathbf{r}([c, b])) \approx \sum \|\mathbf{r}(u_{i+1}) - \mathbf{r}(u_i)\|: \quad c \leq u_i \leq u_{m+1} = b$

$V(\mathbf{r}([a, c])) + V(\mathbf{r}([c, b])) \approx \sum \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| + \sum \|\mathbf{r}(u_{j+1}) - \mathbf{r}(u_j)\|$

$\approx V(\mathbf{r}([a, b]))$

$a \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = c \leq u_1 \leq \dots \leq u_m \leq b$

Formalizziamo l'idea...

Consideriamo una qualunque suddivisione

$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = c$ di $[a, c]$ e

$c = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m \leq u_{m+1} = b$ di $[c, b]$.

Qua $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{m+1} = b$ è una suddivisione di $[a, b]$, pertanto

$$\sum_i \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| + \sum_j \|\mathbf{r}(u_{j+1}) - \mathbf{r}(u_j)\| \leq V(\mathbf{r}([a, b]))$$

Considerando il sup al variare di $a = t_0 \leq \dots \leq t_{n+1} = c$ otteniamo

$V(\mathbf{r}([a, c])) + \sum_j \|\mathbf{r}(u_{j+1}) - \mathbf{r}(u_j)\| \leq V(\mathbf{r}([a, b]))$ per ogni suddivisione

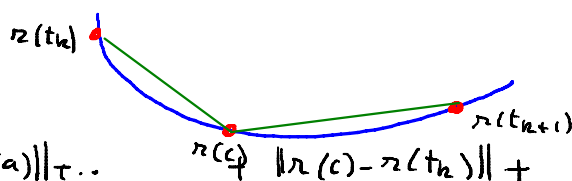
$u_0 = c \leq \dots \leq u_{m+1} = b$ di $[c, b]$; facendo il sup al variare

$u_0 = c \leq \dots \leq u_{n+1} = b$ di $[c, b]$; facendo il sup al variare

di queste suddivisioni otteniamo $V(r|[a, c]) + V(r|[c, b]) = V(r|[a, b])$
Viceversa, sia $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = b$ una suddivisione

di $[a, b]$; sia poi k tale che $t_k \leq c \leq t_{k+1}$. Dato che

$$\|r(t_{k+1}) - r(t_k)\| \leq \|r(t_{k+1}) - r(c)\| + \|r(c) - r(t_k)\| \quad \text{si ha}$$



$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \|r(t_{i+1}) - r(t_i)\| &\leq \|r(t_1) - r(a)\| + \dots + \|r(t_k) - r(c)\| + \\ &\quad + \|r(c) - r(t_{k+1})\| + \dots + \|r(b) - r(t_n)\| \\ &\leq V(r|[a, c]) + V(r|[c, b]). \end{aligned}$$

Passando al sup al variare delle suddivisioni di $[a, b]$

si ottiene $V(r|[a, b]) \leq V(r|[a, c]) + V(r|[c, b])$ #

Come applicazione vediamo ora che la formula della lunghezza di una curva vale con ipotesi meno forti sulla curva.

Corollario. Sia $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva (continua) e $\mathcal{C}^1$

a tratti: esistano cioè $a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$ con r di classe

$\mathcal{C}^1$ su $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_n, b]$ (nei punti t_i possono

essere diverse le derivate sinistre/destra). Allora

$$V(r|[a, b]) = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

Dim: $V(r|[a, b]) = V(r|[a, t_1]) + \dots + V(r|[t_n, b]) \leftarrow$ perché r è curva

$$= \int_a^{t_1} \|r'\| + \dots + \int_{t_n}^b \|r'\| \leftarrow \text{perché } r \text{ è } \mathcal{C}^1 \text{ negli intervalli } [a, b]$$

$$= \int_a \|r'(t)\| dt. \quad \#$$

Esercizi: Mostrare che l'intersezione tra
 $\{y = x^2 - 2x\} \cap \{y \leq 0\}$ ^(il sostegno di) è una curva in $\mathbb{R}^2$
 parametrizzarla.

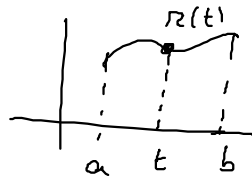
$$y \leq 0 \Rightarrow x^2 - 2x \leq 0 \quad x(x-2) \leq 0 \quad x \in [0, 2]$$

Curva cartesiana $y = x^2 - 2x, x \in [0, 2]$

$$r(x) = (x, x^2 - 2x), \quad x \in [0, 2].$$

Def: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è curva cartesiana

$$\text{se } r(t) = (t, f(t)) \quad t \in [a, b]$$

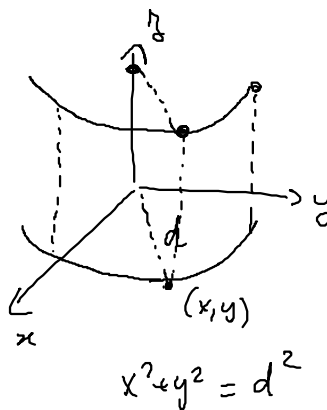


E: in $\mathbb{R}^3$: $z = x^2 + y^2 \quad 2x - z = 0$.

Oss: Disegno di $z = x^2 + y^2$.

In generale $z = f(x^2 + y^2)$

si chiama funzione radiale



I punti (x, y) con $x^2 + y^2 = d^2$

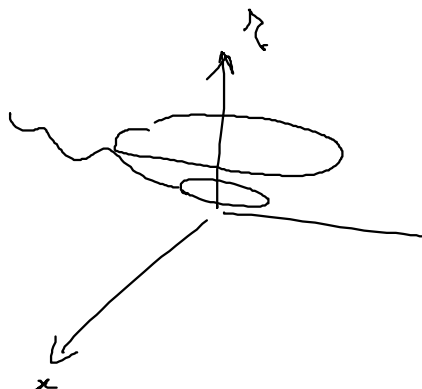
vanno a finire in $f(d^2)$; cioè f è costante

su ogni cerchio di centro O nel piano (x, y)

Per tracciare il grafico di f è sufficiente

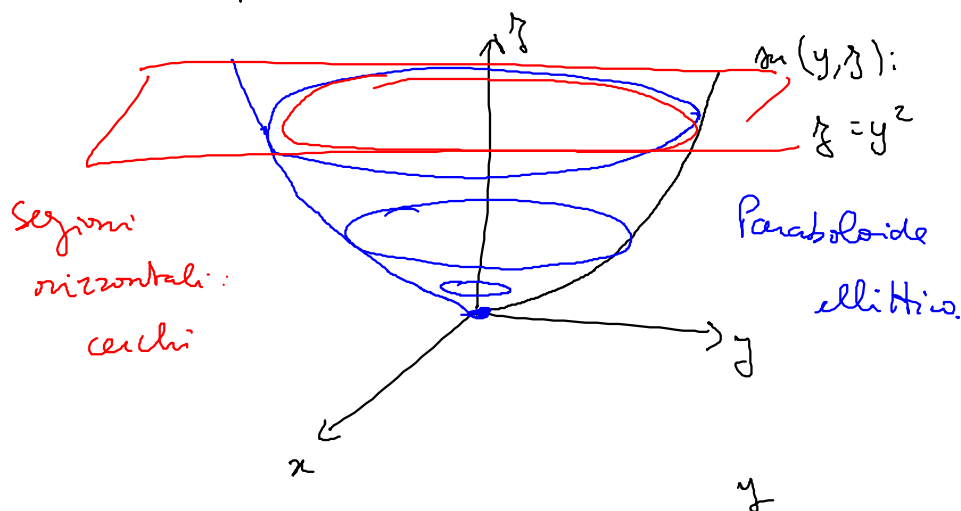
tracciarlo nel piano (x, z) e farlo ruotare

attorno all'asse z



$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

dipende solo da $x^2 + y^2 \Rightarrow f$ è radiale



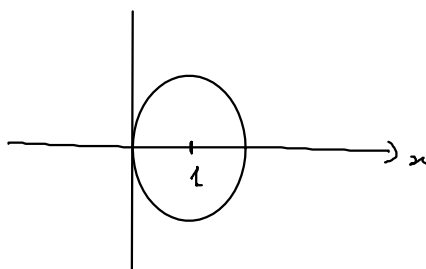
$$\{z = x^2 + y^2\} \cap \{z = 2x\}$$

$$2x = x^2 + y^2$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0 \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1.



$$\begin{cases} x-1 = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$z = 2x = 2(1 + \cos t)$$

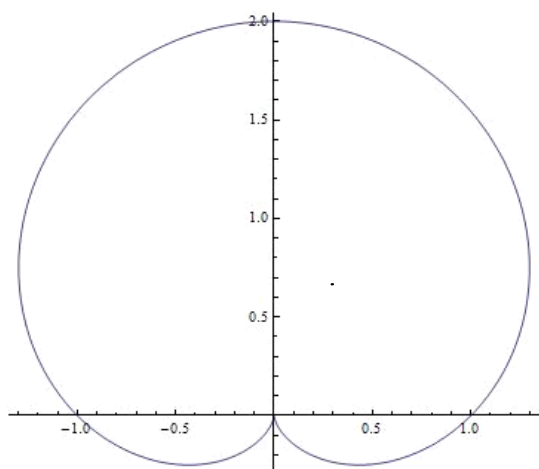
$$r(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 + 2 \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

o

Esercizio. Curva in coordinate polari

$$r(t) = \rho(t)(\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\rho(t) = 1 + \sin t.$$



OSS: dal disegno fatto con Mathematica sembra che in $(0,0)$ non ci sia la tangente (punto angoloso, o cuspidale). Ciò non contraddice il fatto che r sia $\mathcal{C}^1$: qui $r(t) = (0,0)$ in $[0, 2\pi] \Leftrightarrow \rho(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{2}$ ed è $r'(\frac{3\pi}{2}) = 0$: non si può dire nulla sulla tangente alla curva.

Per capire come si comporta la curva vicino a $(0,0)$ occorre una analisi più profonda.

Lunghezza della cardoide.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} dt$$

$$\rho(t) = 1 + \sin t \quad \dot{\rho}(t) = \cos t$$

$$\rho^2 + \dot{\rho}^2 = (1 + \sin t)^2 + \cos^2 t = 1 + 2\sin t +$$

.

$$\sin^2 t + \cos^2 t$$

$$= 2 + 2\sin t = 2(1 + \sin t)$$

$$L = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin t} \, dt$$

Per periodicità: $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin t} \, dt = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 + \sin t} \, dt$; per simmetria

si ha poi $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 + \sin t} \, dt = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin t} \, dt$. Su $[-\pi/2, \pi/2]$ $\sin t$

è invertibile: posto $u = \sin t$ è $t = \arcsin u$ (la cosa non

sarebbe vera se $t \notin [-\pi/2, \pi/2]$!!). Si ha allora

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin t} \, dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1+u} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}} \, du$$

$$= -2 \left[(1-u)^{1/2} \right]_{-1}^1 = -2(0 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \text{ da cui } L = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8.$$

Altro metodo:

Posto $t = \frac{\pi}{2} - u$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin t} \, dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{-3\pi/2} \sqrt{1 + \cos u} \, du = \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos u} \, du$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} \, dt.$$

Ora $\cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1 \Rightarrow \cos t + 1 = 2 \cos^2 \frac{t}{2}$, da cui

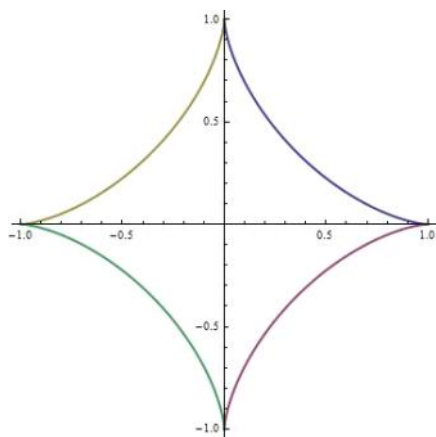
$$L = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt = 4 \int_0^{\pi} |\cos u| \, du = 8 \int_0^{\pi/2} \cos u \, du$$

$$= 8 \left[\sin u \right]_0^{\pi/2} = 8.$$

$$= 8 \left[\sin u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8.$$

Es: Asteroide: $|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1$

Cercare di disegnarla, calcolarne la lunghezza. Usando la simmetria è sufficiente tracciarla in $x \geq 0, y \geq 0$ dove è $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$:



Per calcolarne la lunghezza si è tentati di usare la rappresentazione cartesiana, che però non è $\mathcal{C}^1$ in $[0,1]$: $y'(x) = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty!$
dell'asteroide in $x \geq 0, y \geq 0$.

Consideriamo un'altra parametrizzazione: da $(x^{\frac{1}{3}})^2 + (y^{\frac{1}{3}})^2 = 1$ poniamo $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} = \cos t \\ y^{\frac{1}{3}} = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \quad \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

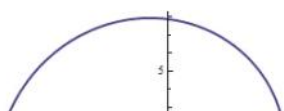
Potrebbe $r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ e $r'(t) = (3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$

$\|r'(t)\|^2 = 9 \cos^2 t \sin^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) = 9 \cos^2 t \sin^2 t$: la lunghezza dell'asteroide è quindi $L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 |\cos t \sin t| dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{2} dt = 6 \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -3(-1-1) = 6.$

Esercizio. La spirale di Archimede. In coordinate polari è

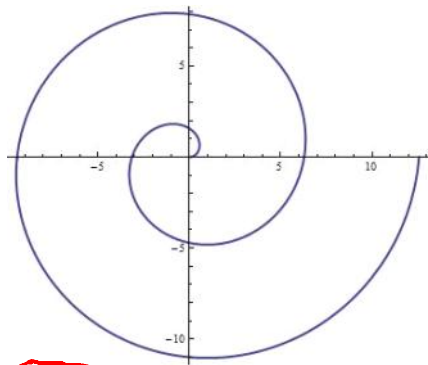
$\rho(t) = at$ per $a > 0$: $r(t) = at(\cos t, \sin t).$

Dato che $\|r(t)\| = at$ il disegno è:



Calcoliamone la lunghezza per $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \dots$$



Calcoliamone la lunghezza per $t \in [0, 2\pi]$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{p}^2 + \dot{q}^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 t^2 + a^2} dt$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} dt. \text{ Integrando per parti:}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} dt = \left[t\sqrt{1+t^2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

$$= 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2+1} dt - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \quad \text{da cui}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} dt = \pi\sqrt{1+4\pi^2} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt.$$

Ora $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \text{settsch } t + c \quad \text{da cui}$

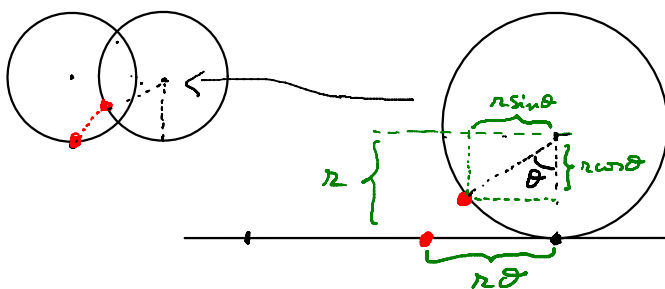
$$L = a\pi\sqrt{1+4\pi^2} - \frac{a}{2} \text{settsch}(2\pi).$$

[settsch u è l'inversa del seno iperbolico: posto $\sinh t = u$ si ha

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = u \Leftrightarrow (e^t)^2 - 2ue^t - 1 = 0. \quad \Delta' = u^2 + 1; \quad e^t = u + \sqrt{1+u^2},$$

$$t = \lg(u + \sqrt{1+u^2}) \Rightarrow \text{settsch } u = \lg(u + \sqrt{1+u^2}).]$$

Esercizio. La cicloide: ruota di raggio $r > 0$ rotola senza scivolare con velocità angolare ω . Posizione del punto all'istante t che in $t=0$ tocca la strada?



$$\theta = \omega t$$

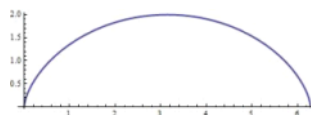
$$P: \begin{pmatrix} r\theta - r\sin\theta \\ r - r\cos\theta \end{pmatrix}$$

La cicloide è la curva di equazione

$$P(t) = (r\omega t - r\sin(\omega t), r - r\cos(\omega t)) \quad \omega > 0$$



$$f(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t), \quad r > 0.$$



La lunghezza della cicloide per $t \in [0, 2\pi]$ (= lunghezza percorsa da un punto della ruota quando questa fa un giro completo)

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt \quad \text{ed essendo} \quad f'(t) = (r - r\cos t, r\sin t) \quad \text{e}$$

$$\|f'(t)\|^2 = r^2 (1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t = r^2 (2 - 2\cos t) = 2r^2 (1 - \cos t)$$

$$= 4r^2 \sin^2 \frac{t}{2} \quad \text{da cui} \quad L = 2r \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 4r \int_0^{\pi} \sin u du$$

$$= 4r [-\cos u]_0^{\pi} = \boxed{8r} : \text{mentre il centro della ruota percorre una lunghezza di } 2\pi r, \text{ un punto del battistrada descrive una cicloide lunga } 8r: \text{il rapporto tra le due lunghezze \(\frac{4}{\pi} \approx 1,27\)} \\ \text{e non dipende dal raggio della ruota.}$$

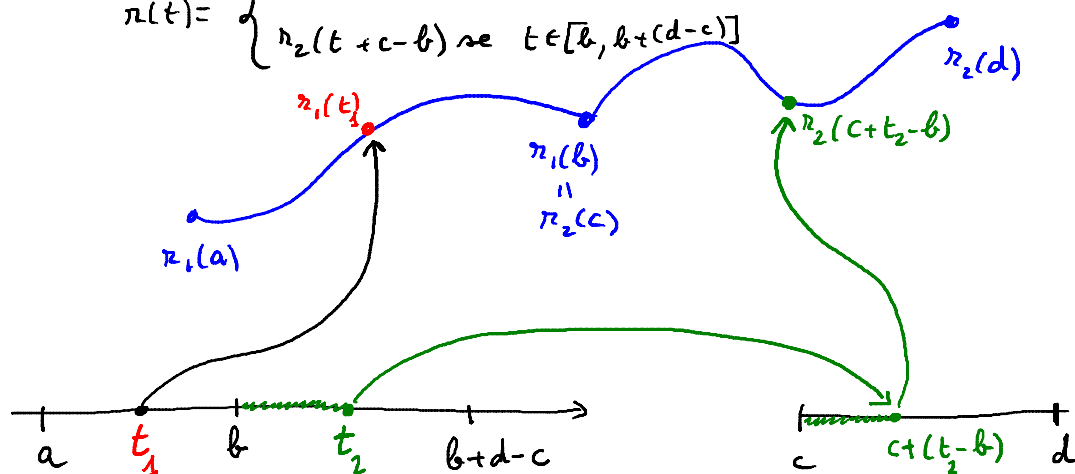
Giustapposizione di curve.

Siano $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ due curve,

tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. La **giustapposizione** di γ_1 e γ_2 è

la curva $\gamma: [a, b + (d - c)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t + c - b) & \text{se } t \in [b, b + (d - c)] \end{cases}$$



La giustapposizione di γ_1 con γ_2 viene anche indicata con $\gamma_1 \gamma_2$.

OSS: Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ allora

OSS: Se $r_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $r_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ allora

$$V(r_1, r_2)([a, b+d-c]) = V(r_1)([a, b]) + V(r_2)([c, d]).$$

Infatti

$$V(r_1, r_2)([a, b+d-c]) = V(r_1, r_2)([a, b]) + V(r_1, r_2)([b, b+d-c])$$

$$= V(r_1)([a, b]) + V(r_2)([c, d]) \quad \text{dato che}$$

in $[b, b+d-c]$ r_1, r_2 è una riparametrizzazione equivalente

di r_2 in $[c, d]$.