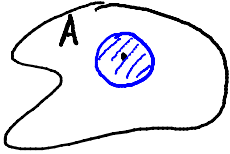


Funzioni di 2 variabili.

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Grafico di $f: \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)): (x_1, x_2) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

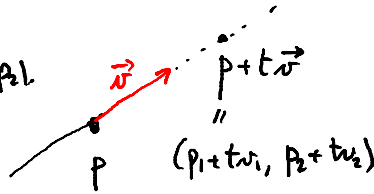
Sia p interno ad A (esiste $B(p, r] \subseteq A$)



$$\uparrow \left[\begin{array}{l} \{x: \|x-p\| < r\} \\ \subseteq \end{array} \right]$$

Definizione.

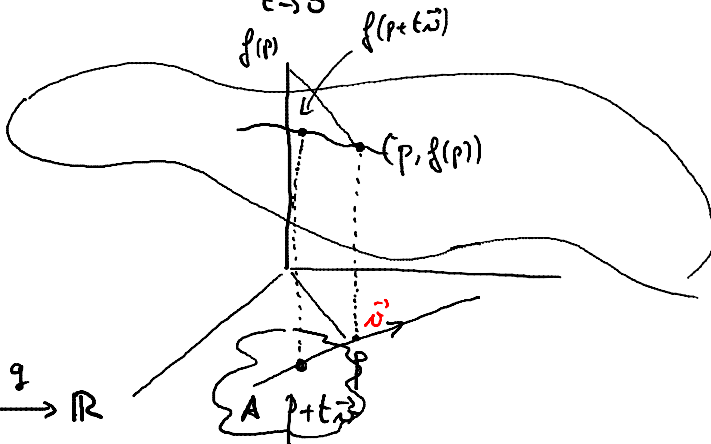
$$p = (p_1, p_2)$$



Sia p interno ad A .

La derivata parziale di f in p rispetto a $\vec{v}$

$$\text{è } \mathcal{D}_{\vec{v}} f(p) = D_{\vec{v}} f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\vec{v}) - f(p)}{t}$$



$$]-\delta, \delta[\xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \underbrace{f(p + t\vec{v})}_A$$

$$p + t\vec{v} \in A \quad |t| < \delta$$

(p è interno)

La derivata direzionale $D_{\vec{v}} f(p)$ non è altro che $g'(0)$:

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\vec{v}) - f(p)}{t} = D_{\vec{v}} f(p).$$

Legamo con le derivate parziali $\mathcal{D}_{x_1} f(p)$ $\mathcal{D}_{x_2} f(p)$:

$$\mathcal{D}_{x_1} f(p) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underbrace{p_1 + t, p_2}_{\text{red circle}}) - f(p_1, p_2)}{t}$$

$$(p_1, p_2) + (t, 0) = (p_1, p_2) + t(1, 0)$$

$$\mathcal{D}_{x_1} f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\vec{e}_1) - f(p)}{t} = \mathcal{D}_{\vec{e}_1} f(p) = D_{\vec{e}_1} f(p).$$

OSS: Può essere utile osservare che $\partial_{x_1} f(p) = h'_1(p_1)$ dove

$h_1(x_1) = f(x_1, p_2)$ e che $\partial_{x_2} f(p) = h_2'(p_2)$ dove $h_2(x_2) = f(p_1, x_2)$:
verifichilo!

Example: $f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{x_2} + (x_1 + x_2)^3$

$$2x_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 e^{x_2} + 3(x_1 + x_2)^2.$$

↑
si considera $x_2 = \text{costante}$, e si deriva
rispetto a x_1

Esempio: $f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{x_2}$ $\vec{x} = (1, 2)$.

$$D_{\vec{x}} f(x_1, x_2) = g'(0) \quad \text{where } g(t) = f(x_1, x_2) + t\vec{x}$$

$$= f(x_1, x_2) + t(1, 2)$$

$$= f(x_1+t, x_2+2t) = (x_1+t)^2 e^{x_2+2t}$$

$$g'(t) = 2e^{x_2(x_1+t)}e^{2t} + e^{x_2(x_1+t)^2}2e^{2t}$$

$$g'(0) = 2e^{x_2} x_1 + 2x_1^2 e^{x_2} = D_{\vec{v}} f(x_1, x_2).$$

$$\vec{x} = (a, b) : f((x_1, x_2) + t(a, b)) \quad D_x f(x_1, x_2)$$

$$g(t) = f(x_1 + ta, x_2 + tb)$$

$$= (x_1 + ta)^2 e^{x_2 + tb} = e^{x_2} (x_1 + ta)^2 e^{tb}$$

$$g'(t) = e^{x_2} 2(x_1 + ta) a e^{tb} + e^{x_2} (x_1 + ta)^2 b e^{tb}$$

$$g'(0) = 2x_1 a e^{x_2} + e^{x_2} x_1^2 b = a(2x_1 e^{x_2}) + b(x_1^2 e^{x_2})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 e^{x_2} \\ x_1^2 e^{x_2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{x_2}$$

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2) = 2x_1 e^{x_2}$$

$$\partial_{x_2} f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{x_2}$$

In questo caso: $\boxed{D_{\vec{v}} f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{v}}$

$\vec{v} \mapsto D_{\vec{v}} f(p)$ in tal caso è lineare
Infatti...

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \mapsto D_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2} f(p) = \nabla f(p) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$= \nabla f(p) \cdot \vec{v}_1 + \nabla f(p) \cdot \vec{v}_2$$

$$= D_{\vec{v}_1} f(p) + D_{\vec{v}_2} f(p)$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \vec{v} \mapsto D_{\lambda \vec{v}} f(p) = \nabla f(p) \cdot (\lambda \vec{v})$$

$$= \lambda \nabla f(p) \cdot \vec{v} = \lambda D_{\vec{v}} f(p).$$

Esempio. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

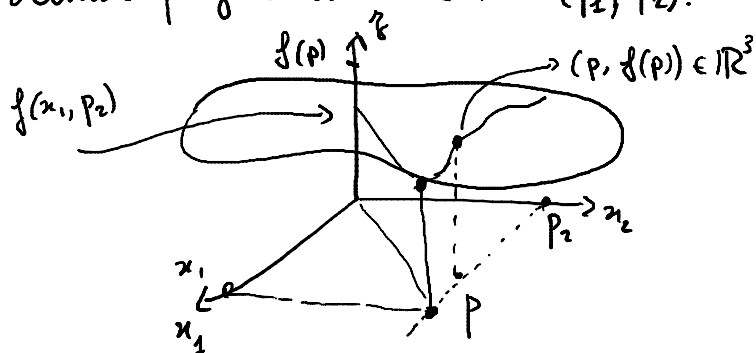
Dire se f è continua in $(0, 0)$?

Calcolare le derivate parziali direzionali di

f in $(0, 0)$; dire se $D_{\vec{v}} f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{v}$.

OSSERVAZIONE: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con

derivate parziali continue in (p_1, p_2) .



Muoviamoci nella retta per p parallela all'asse x_2 : in tali

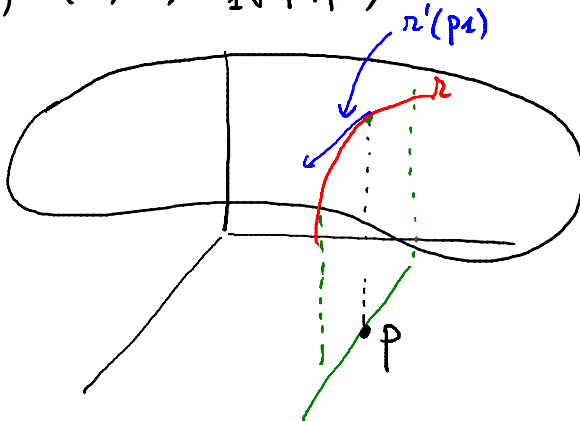
punti (x_1, p_2) la funzione f assume il valore $f(x_1, p_2)$.

I punti corrispondenti del grafico di f sono il sostegno della curva:

$$x_1 \mapsto (x_1, p_2, f(x_1, p_2)) \quad (x_1 \text{ varia vicino } p_1)$$

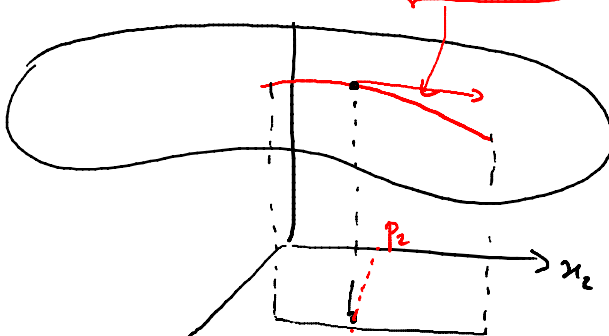
Un vettore tangente alla curva in $x_1 = p_1$

$$\tau'(p_1) = (1, 0, \partial_{x_1} f(p_1, p_2))$$



Analogamente, muovendoci lungo x_2 abbiamo

$$\text{la curva } x_2 \mapsto (p_1, x_2, f(p_1, x_2)) = \tau_2(x_2)$$



$$\tau_2'(x_2) = (0, 1, \partial_{x_2} f(p)).$$

Lo spazio per il punto $(p, f(p))$ parallelo

ai vettori $\tau'(p_1) = (1, 0, \partial_{x_1} f(p))$ e

$$\tau'(p_2) = (0, 1, \partial_{x_2} f(p))$$

si chiama spazio tangente al grafico di f

nel punto $(p, f(p))$.

Troviamo l'equazione:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \text{Piano tangente a } (p, f(p)) \text{ se e solo}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Piano tangente a } (p, f(p)) \text{ se e solo se}$

$$\det \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ f(p_1, p_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{x_1} f(p) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{x_2} f(p) \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - p_1 & 1 & 0 \\ x_2 - p_2 & 0 & 1 \\ x_3 - f(p_1, p_2) & \partial_{x_1} f(p) & \partial_{x_2} f(p) \end{vmatrix} = 0$$

$$\uparrow$$

$$(x_1 - p_1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \partial_{x_1} f(p) & \partial_{x_2} f(p) \end{vmatrix} - (x_2 - p_2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \partial_{x_1} f(p) & \partial_{x_2} f(p) \end{vmatrix}$$

$$+ (x_3 - f(p_1, p_2)) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$- \partial_{x_1} f(p) (x_1 - p_1) - \partial_{x_2} f(p) (x_2 - p_2) + x_3 - f(p_1, p_2) = 0$$

$$x_3 = f(p_1, p_2) + \partial_{x_1} f(p) (x_1 - p_1) + \partial_{x_2} f(p) (x_2 - p_2)$$

Piano tangente al grafico di f in $(p, f(p))$:

$$\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = f(p) + \partial_{x_1} f(p) (x_1 - p_1) + \partial_{x_2} f(p) (x_2 - p_2) \}$$

($\partial_{x_1} f$ e $\partial_{x_2} f$ continue in p).

ESERCIZIO: $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$; determinare

$\partial_{x_1} f$, $\partial_{x_2} f$ verificare la continuità;

determinare l'equazione del piano tangente

al grafico di f in $(1, 5)$.

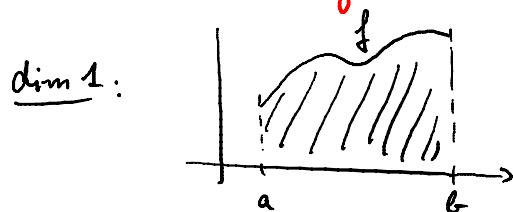
ES: $f(x, y) = \sin x + x e^{xy}$ $\vec{\alpha} = e^{i\frac{\pi}{6}}$
 $= (\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6})$

1) Determinare $\partial_x f$, $\partial_y f$ in (x, y)

2) $D_{\vec{\alpha}} f(x_1, x_2)$

3) confrontare $D\vec{v}f(x_1, x_2)$ con $\nabla f(x_1, x_2) \cdot \vec{\sigma}$.

Cenno sull'integrale di Riemann in $\mathbb{R}^2$

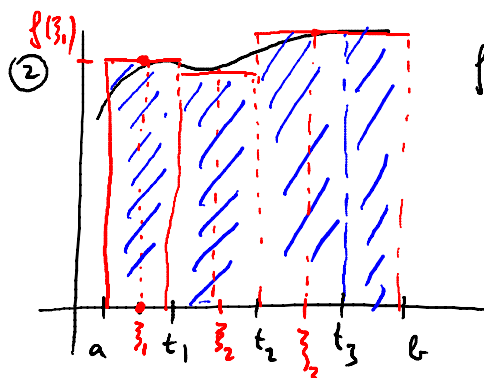


$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad f \geq 0$$

$$\text{Trap } f = \{(x, y) : x \in [a, b] : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Se f è Riemann integrabile

$$\text{Area}(\text{Trap } f) = \int_a^b f(t) dt \quad \textcircled{1}$$



$$f(\xi_1)(t_1 - a) + f(\xi_2)(t_2 - t_1)$$

$$+ \dots + f(\xi_n)(b - t_{n-1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{app} \\ \rightarrow \end{array} \right. \int_a^b f \quad (\text{Riemann})$$