

Limiti di funzioni di più variabili

$f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^3$ di accumulazione

per A : esiste una successione $(x_n) \in A$ $x_n \neq x_0$

$$x_n \rightarrow x_0 \quad [x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3), \quad x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$


se per ogni intorno U di l in $\mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$

tale che se $0 < \underbrace{\|x - x_0\|}_{x \neq x_0} < \delta \Rightarrow f(x) \in U$.

$\nwarrow$ norma in $\mathbb{R}^3$

Intorno di l : a) $l \in \mathbb{R}$: $U \supseteq]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < \underbrace{\|x - x_0\|}_{x \in A} < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

b) $l = +\infty$ $U \supseteq]M, +\infty[$
 $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta: \quad 0 < \underbrace{\|x - x_0\|}_{x \in A} < \delta \Rightarrow f(x) > M$

c) $l = -\infty$ $U \supseteq]-\infty, M[$.
 $\forall M \dots \dots \dots f(x) < M$.

OSS: Se $D \subseteq A$

$$\text{Se } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = l \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x) = l$$



Per capire se c'è il limite in genere si restringe

f a sottoinsiemi più piccoli: 2 casi

1) su vari sottoinsiemi il limite è l :
 si cerca di provare che il limite è l



2) Il comportamento di f (per quanto riguarda il limite) è diverso su due sottoinsiemi

$$\left[\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_1}} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_2}} f(x) = l_2 \quad l_1 \neq l_2 \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{"} \\ \text{e } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_2}} f(x) \text{ non c'è} \dots \end{array} \right]$$

In tal caso $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste.

$$x \in A$$

Torniamo al caso 1): come mostrare che il

limite = l .

i) Usando la definizione (in caso di dispersione).

ii) Trovare delle maggiorazioni: una funzione

$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ tale che

$$\underbrace{|f(x) - l|}_{\Rightarrow \searrow 0} \leq \underbrace{g(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0}$$

ESEMPIO. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$: f è composta di funzioni continue.

Continuità in 0: $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \stackrel{?}{=} 0$

• $y = mx \quad m \in \mathbb{R}$: $f(x, y) = \frac{x^2 mx}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx^3}{x^2(m^2 + x^2)}$
 $(x, y) \neq (0, 0)$

$$= \frac{mx}{m^2 + x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$


• $y = x^2$: $f(x, x^2) = \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$

Derivate parziali:

f ha derivate parziali su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

In $(0, 0)$. $\partial_x f(0, 0) \stackrel{\text{se esiste}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

$$\partial_y f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

$\vec{v} = (a, b)$. $D_{\vec{v}} f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\vec{v}) - f(0)}{t}$ $\nearrow (0, 0)$

$$f(t\vec{v}) = f(ta, tb) = \frac{t^3 a^2 tb}{(ta)^4 + t^2 b^2} = \frac{t^3 a^2 b}{t^2(b^2 + t^2 a^4)}$$

$$\frac{f(t\vec{v}) - f(0)}{t} = \frac{t^3 a^2 b}{t^3(b^2 + t^2 a^4)} = \frac{a^2 b}{b^2 + t^2 a^4}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{b^3(b^2 + t^2 a^4)} = \frac{1}{b^5 + t^2 a^4 b^2}$$

$b=0$ (già trattato, viene $D_{(a,0)} f(0) = 0$)

$$b \neq 0: \frac{f(t\vec{v}) - f(0)}{t} \rightarrow \frac{a^2 b}{b^2} = \frac{a^2}{b}$$

$D_{\vec{v}} f(0,0)$ esiste.

$$\text{OSS: in questo caso } \nabla f(0,0) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

Quindi in generale non si ha $D_{\vec{v}} f(0) = \nabla f(0) \cdot \vec{v}$

[interpretare ...]

Esercizio.

$$f(x,y) = \sin x + x e^{xy} \quad \vec{v} = \left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

1) Determinare $\partial_x f$, $\partial_y f$ in (x,y)

2) $D_{\vec{v}} f(x,y)$

3) Confrontare $D_{\vec{v}} f(x,y)$ con $\nabla f(x,y) \cdot \vec{v}$.

$$\text{Soluzione. } \partial_x f(x,y) = \cos x + e^{xy} + xy e^{xy}$$

$$\partial_y f(x,y) = x^2 e^{xy}$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \vec{v}.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left((x,y) + t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) - f(x,y)}{t}$$

Si tratta della derivata in $t=0$ di

$$g(t) = f\left((x,y) + t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = f\left(x + t\frac{\sqrt{3}}{2}, y + t\frac{1}{2}\right).$$

$$g(t) = \sin\left(x + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(x + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{\left(x + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + t\frac{1}{2}\right)}$$

$$g'(t) = \cos\left(x + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\dots} +$$

$$\left(x + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[e^{\dots} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \left(y + t\frac{1}{2}\right) + \left(x + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{2} \right)}_{\text{derivata di } \left(x + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + t\frac{1}{2}\right)} \right]$$

rispetto a t

$$g'(0) = \dots$$

Il risultato è $g'(0) = \nabla f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(giustificazione: tra poco).

Esercizio.

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{|x|} e^{-x^2/y^4} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

f è continua in $(0, 0)$?

$y = mx : f(x, y) = \sqrt[3]{|x|} e^{-\frac{x^2}{m^4 x^4}} = \sqrt[3]{|x|} e^{-\frac{1}{m^4 x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$x = y^2 : f(x, y) = \sqrt[3]{|x|} e^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\left[\begin{array}{l} \boxed{\frac{x^2}{y^4}} \\ y = mx : \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty \\ y = x^2 : \frac{x^2}{x^8} = \frac{1}{x^6} \rightarrow +\infty \\ x = y^2 : \frac{x^2}{y^4} = 1 \end{array} \right]$$

$$|f(x, y)| \leq \sqrt[3]{|x|} \quad (0 \leq e^{-x^2/y^4} \leq 1)$$

$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

Es. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3y^2}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

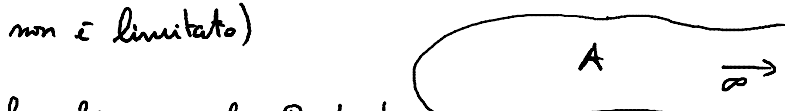
Studiare la continuità di f in $(0, 0)$

Limite per $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$.

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ / ∞ di accumulazione per A :

esiste $(x_n, y_n) \in A$, $\|(x_n, y_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ cioè A

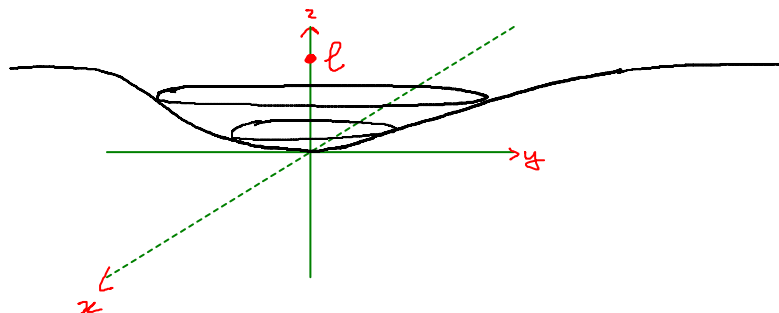
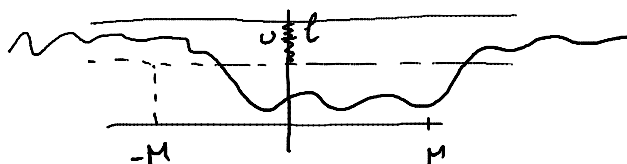
non è limitato)



$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

se $\forall U$ intorno di l esiste $M > 0$ tale che

$$f(x,y) \in U \text{ se } \|(x,y)\| > M. \quad (\text{Sceveremo anche } \lim_{\infty_2} f = l)$$



ESERCIZIO. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$

$$[\forall R \in \mathbb{R} \quad \exists M: \|(x,y)\| > M \Rightarrow f(x,y) > R]$$

Allora f ha minimo ASSOLUTO.

LIMITI E COORDINATE POLARI

È molto comodo talvolta calcolare i limiti passando

in coordinate polari: $x = x_0 + \rho \cos t$, $y = y_0 + \rho \sin t$ (oppure in $\mathbb{R}^3$

$$x = x_0 + \rho u, \quad y = y_0 + \rho v, \quad z = z_0 + \rho w \quad \text{con } u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

Provate che se $|f(x_0 + \rho \cos t, y_0 + \rho \sin t) - l| \leq g(\rho)$ con $g(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$

allora $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l$; analg. se $f(\rho \cos t, \rho \sin t) \geq g(\rho)$ con $g(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} +\infty$

allora $\lim_{\infty_2} f(x,y) = +\infty$, se $f(\rho \cos t, \rho \sin t) \leq g(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} -\infty$ allora

$$\lim_{\infty_2} f = -\infty.$$

ES: $\frac{x^3}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$

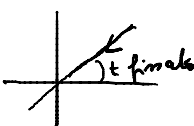
$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$: vari modi per provarlo:

• $\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = \left| x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} \right) \right| \leq |x| \quad \left(0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \right)$

$\swarrow$
 $(x,y) \rightarrow (0,0)$

• $x = \rho \cos t \quad y = \rho \sin t$

$\frac{x^3}{x^2+y^2} = \frac{\rho^3 \cos^3 t}{\rho^2} = \rho \cos^3 t$



$|\rho \cos^3 t| \leq \rho$
 $\stackrel{||}{=} g(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$

Allora $\lim_{(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$.

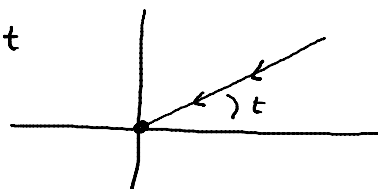
ES: $\lim_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

$x = \rho \cos t \quad y = \rho \sin t \quad \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\rho^2 \cos t \sin t}{\rho^2}$
 $\downarrow$
 $= \cos t \sin t$

Per $t \in \mathbb{R}$ fisso $\cos t \sin t \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \cos t \sin t$

Usa $f(\rho \cos t, \rho \sin t) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \cos t \sin t$ dipende da t

Il limite non esiste.



ESERCIZIO. Studiare $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x,y)$ dove

b) $f(x,y) = x^3 + xy^2 - y^2$

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

Soluzione. a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x,y) = +\infty: \quad f(\rho \cos t, \rho \sin t) = \rho^2 \quad \rho^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} +\infty$

Per casa: studiare $\lim_{\infty} x^3 + xy^2 - y^2$

(Sug: $x = \text{print}$, $y = \text{print}$ e tenere t fisso)

Richiamo: applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$

Se $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ allora

$$T \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n$$

$$= \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_T \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Richiamo: derivata $f: I \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R} \text{ aperto}} \mathbb{R} \quad x_0 \in I$

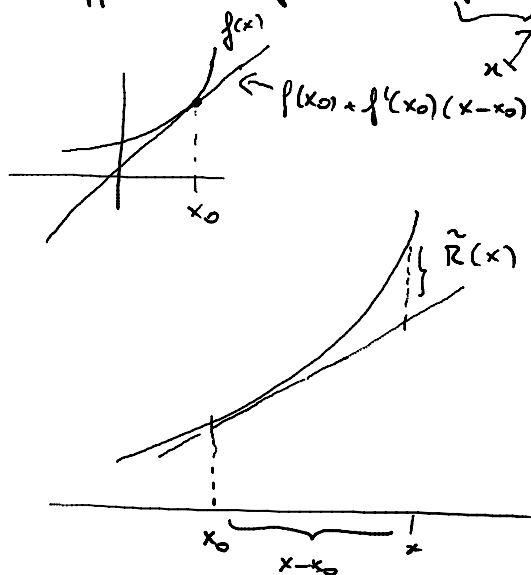
f è derivabile in x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$
" $f'(x_0)$

equivalente: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + R(x) \quad R(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

$$f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} + \underbrace{R(x)(x - x_0)}_{\tilde{R}(x)}$$

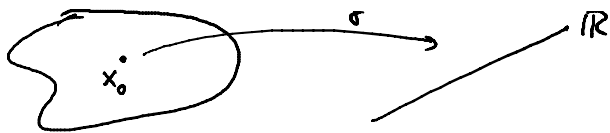
con $\frac{\tilde{R}(x)}{x - x_0} = R(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 : \tilde{R}(x) = o(x - x_0)$

Si può approssimare $f(x)$ con $\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{affine}}$



$$\frac{\tilde{R}(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Differenziale. $f: A \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aperto}} \mathbb{R} \quad x_0 \in A$



f è differenziabile in x_0 se esiste una

applicazione lineare $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in A \quad f(x) = \boxed{f(x_0) + T(\underbrace{x-x_0}_{\in \mathbb{R}^2})} + R(x)$$

← funzione
affine: il
grafico è
un piano

$$\text{con } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{\|x-x_0\|} = 0$$

$$T = (a_1, a_2) \quad x - x_0 = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ x^2 - x_0^2 \end{pmatrix}$$

$$f(x^1, x^2) = f(x_0^1, x_0^2) + a_1(x^1 - x_0^1) + a_2(x^2 - x_0^2) + R(x^1, x^2).$$