

$$E. \begin{cases} \frac{x^2 - 3y^2}{x - y} & x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x - y} = \frac{x^2 - y^2 - 2y^2}{x - y} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} - 2 \frac{y^2}{x - y}$$

$$= \underbrace{x + y}_{\downarrow 0} - 2 \underbrace{\frac{y^2}{x - y}}$$

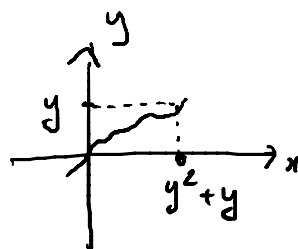
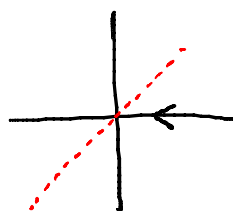
Studiamo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0) \atop x \neq y} \frac{y^2}{x - y} \quad g(x,y)$

Se $y=0 \quad \lim = 0$

Se $y^2 = x - y \quad x = y^2 + y$

$$g(x,y) \equiv 1 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1$$

Il limite non esiste!



DIFFERENZIALE.

Def. $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ p interno ad A .

f è differenziabile in p se esiste una applicazione

lineare $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in A \quad f(x) = \underbrace{f(p) + T(x-p)}_{\text{affine}} + R(x) \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{\|x-p\|} = 0$$

$\forall h$ con $p+h \in A$:

R/L1

$$f(p+h) = f(p) + T(h) + R(h) \quad \frac{R(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$Th = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n$$

$n=2$:

$$f(x_1, x_2) = \underbrace{f(p_1, p_2) + a_1(x_1 - p_1) + a_2(x_2 - p_2)}_{\sigma(\|x-p\|)} + R(x) \quad \frac{R(x)}{\|x-p\|} \xrightarrow{\|x-p\| \rightarrow 0} 0$$

L'insieme dei punti

$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = f(p_1, p_2) + a_1(x_1 - p_1) + a_2(x_2 - p_2)\} \text{ piano.}$$

$$\{(x, y) : y = f(p) + T(x-p)\} \text{ è un iperpiano}$$

Legame con le derivate direzionali.

Prop. Sia f differenziabile in p ; $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$D_{\vec{v}} f(p) \text{ esiste e si ha } D_{\vec{v}} f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{v}.$$

$$\text{Inoltre } Th = \nabla f(p) \cdot h \text{ cioè } a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \text{ ed è}$$

$$f(x) = \underbrace{f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p)}_{\text{piano tangente}} + R(x), \quad R(x) = o(\|x-p\|).$$

$$y = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p) \text{ piano tangente al grafico di } f \text{ in } p.$$

Dim. Proviamo che esiste $D_{\vec{v}} f(p)$. $\vec{v} \neq 0$.

$$D_{\vec{v}} f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+t\vec{v}) - f(p)}{t}$$

esiste

$$f(p+t\vec{v}) = f(p) + T(t\vec{v}) + R(t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t} = 0$$

... $t \rightarrow 0$ $t \parallel \vec{w}$
 $t T(\vec{w}) : T \text{ è lineare}$

$$= f(p) + t T(\vec{w}) + R(t)$$

$$\frac{f(p + t\vec{w}) - f(p)}{t} = T(\vec{w}) + \underbrace{\frac{R(t)}{t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} T(\vec{w})$$

$$\Rightarrow D_{\vec{w}} f(p) = T(\vec{w}) = \boxed{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n} (*) \text{ se la}$$

matrice di T è $(a_1, \dots, a_n)$.

$$\text{Quindi se } \vec{w} = (1, 0, \dots, 0) \quad D_{\vec{w}} f(p) = \partial_{x_1} f(p)$$

$$\Rightarrow \partial_{x_1} f(p) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1$$

$$\text{Idem: } \partial_{x_2} f(p) = a_2, \dots, \partial_{x_n} f(p) = a_n$$

$$\Rightarrow \text{la matrice di } T \text{ è } (\partial_{x_1} f(p), \dots, \partial_{x_n} f(p))$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = f(p) + \partial_{x_1} f(p)(x_1 - p_1) + \dots + \partial_{x_n} f(p)(x_n - p_n) + R(x)}$$

$$(*) \Rightarrow \underline{D_{\vec{w}} f(p)} = T(\vec{w}) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \partial_{x_1} f(p) v_1 + \dots + \partial_{x_n} f(p) v_n$$

$$= \underline{\nabla f(p) \cdot \vec{w}}$$

$$\underline{\underline{Es}} : f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che $D_{\vec{w}} f(0, 0)$ esiste $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

ma $D_{\vec{w}} f(0) \neq \nabla f(0) \cdot \vec{w}$ _{$\vec{w} = (0, 0)$} in generale: f non è differenziabile in $(0, 0)$.

Dono l.c.b. ... della ... l.o.i.v.

PROP. (Criterio di differenziabilità).

[TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE]

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ p interno ad A . Si supponga che le derivate $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ esistano in un intorno di p e siano CONTINUE in p .

Allora f è differenziabile in p .



$\exists \partial_{x_i} f$ continue in p :

$$\lim_{x \rightarrow p} \partial_{x_i} f(x) = \partial_{x_i} f(p)$$

Dim. (ammessa).

OSS: In particolare $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow f$ differenziabile.

Es. $f(x, y) = x^2 + y^2$ è differenziabile in ogni punto

PROP: f differenziabile in $p \Rightarrow f$ continua in p .

Dim. f differenziabile:

$$f(x) = f(p) + \underbrace{\nabla f(p) \cdot (x-p)}_{x \rightarrow p \rightarrow 0} + \underbrace{R(x)}_{x \rightarrow p \rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow p} f(p) \neq$$

ESERCIZIO. $f(x, y) = \sin x + x e^{xy}$ $\vec{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Dire se esiste $D_{\vec{u}} f(0,0)$ e calcolarla.

Soluzione. f è di classe $\mathcal{C}^1$: infatti

$$\partial_x f(x, y) = \cos x + e^{xy} + xy e^{xy} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$$

$$\partial_y f(x, y) = x^2 e^{xy} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$$

$\Rightarrow f$ è differenziabile in $(0,0)$ e

$$D_{\vec{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$$

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \gamma_x f(0,0) \\ \gamma_y f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_{\vec{v}} f(0,0) = 2v_1 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D_{\vec{v}} f(0,0) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

OSS: f è differenziabile $\Rightarrow D_{\vec{v}} f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{v}$

$\|\vec{v}\|=1$ Per quali $\vec{v}$ con $\|\vec{v}\|=1$ $D_{\vec{v}} f(p)$ è massima?

$$f \text{ differenziabile} \Rightarrow D_{\vec{v}} f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{v}$$

$$\text{In genere} \quad |D_{\vec{v}} f(p)| = |\nabla f(p) \cdot \vec{v}| \leq \|\nabla f(p)\| \underbrace{\|\vec{v}\|}_{=1} = \|\nabla f(p)\|$$

↑
Cauchy-Schwarz

$$D_{\vec{v}} f(p) = \|\nabla f(p)\| \quad \text{se} \quad \vec{v} = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

$\nabla f(p) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(p)\|$

$$\text{Infatti} \quad \nabla f(p) \cdot \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} = \frac{\|\nabla f(p)\|^2}{\|\nabla f(p)\|} \quad (\nabla f(p) \neq 0)$$

$$= \|\nabla f(p)\|$$

$\Rightarrow$ La crescita di f è massima lungo la direzione $\nabla f(p)$.

Es. Direzione di crescita massima per $f(x,y) = x e^y$

$$\text{in } p = (2,1): \nabla f(2,1)$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^y \\ x e^y \end{pmatrix} \quad \nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} e \\ 2e \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es: $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- 1) f è continua in $(0,0)$?
- 2) Esistono $\partial_x f(0,0)$ $\partial_y f(0,0)$?
- 3) $\partial_x f$ è continua in $(0,0)$? (Sugg: $\partial_x f(x,0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \partial_x f(0,0)$)
- 4) f è differenziabile in $(0,0)$?

REGOLA della CATENA.

$$t \xrightarrow{\gamma} (x(t), y(t)) \xrightarrow[\text{differenziabile}]{f} f(x(t), y(t))$$

derivabile in t_0

$$(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$$

• $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

• $t_0 \in [a, b]$ $\gamma(t_0)$ interno a A ; f differenz. in (x_0, y_0) .

• γ derivabile in t_0 .

$$[a, b] \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$$

$\Rightarrow t \mapsto f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$ è derivabile in t_0

$$e \quad \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \partial_x f(x_0, y_0) x'(t_0) + \partial_y f(x_0, y_0) y'(t_0).$$

REGOLA della CATENA

ESEMPIO. $f(x, y) = x^2 + y \cos x$ $x(t) = t^3$ $y(t) = e^t$

$$t \mapsto (t^3, e^t) \quad f(\gamma(t)) = f(t^3, e^t)$$

Per calcolare $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$ ho 2 modi:

$$1. \dots \quad 2. \dots$$

a) esplicitare $f(t^3, e^t) = t^6 + e^t \cos t^3 \rightarrow$ derivare...

b) usare la regola della catena:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \partial_x f(x(t), y(t)) x'(t) + \partial_y f(x(t), y(t)) y'(t).$$

$$f(x, y) = x^2 + y \cos x \quad \partial_x f(x, y) = 2x - y \sin x \quad \partial_y f(x, y) = \cos x$$

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = (2x(t) - y(t) \sin x(t)) x'(t) + (\cos x(t)) y'(t) \quad \left| \begin{array}{l} x(t) = t^3 \\ y(t) = e^t \end{array} \right.$$

$$= (2t^3 - e^t \sin t^3) 3t^2 + (\cos t^3) e^t.$$

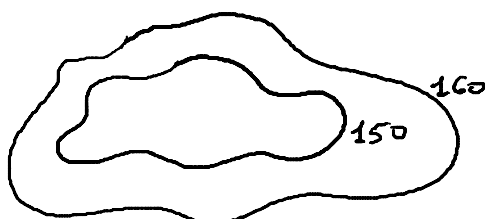
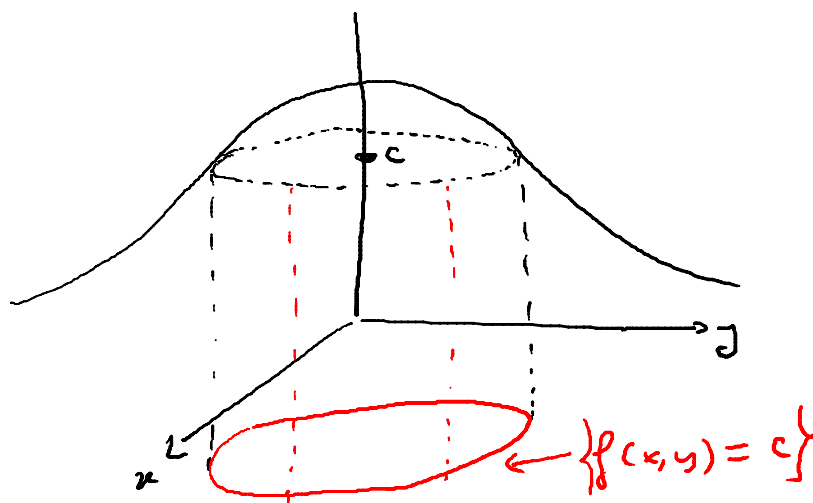
Dim. (prossima lezione).

CURVE di LIVELLO.

Se $f(x, y)$ è una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

una curva di livello di f è un insieme

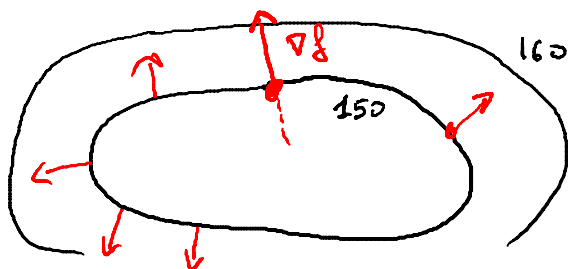
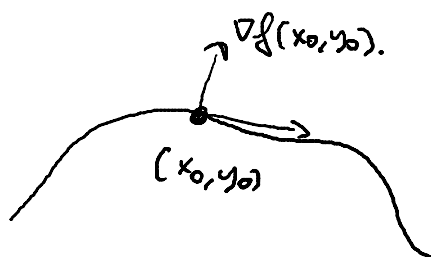
$$\{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}.$$



Prop. f sia differenziabile in un aperto;
 supponiamo che le curve di livello di f sia
 curve di classe $\mathcal{C}^1$. Allora ∇f è ortogonale alle
 curve di livello: se $\gamma(t)$ è curva di livello

$$\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$$

$$\nabla f(x_0, y_0) \perp \gamma'(t_0)$$



Dim: Sappiamo che $f(\gamma(t)) = \text{costante}$

$$f(x(t), y(t)) \equiv c \text{ fissata.}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))}_{\text{regola della catena}} \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} c = 0.$$

$$\underbrace{\partial_x f(x(t_0), y(t_0))}_{(x_0, y_0)} x'(t_0) + \partial_y f(x(t_0), y(t_0)) y'(t_0) = 0$$

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}}_{\gamma'(t_0)} = 0 \quad \#$$