Esercizio. Studiare la differenziabilità di

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Soluzione. Su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ f è composta di funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ ed è dunque differenziabile. Si ha inoltre

$$\forall (x,y)\neq(0,0)\qquad \partial_x f(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\partial_y f(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Esaminiamo cosa succede in $(0,0)$

Si ha $\partial_x f(0,0)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{se esiste}}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h^2}=0;$

analogamente è $\partial_y f(0,0)=0$. Si osservi tuttavia che $\partial_x f$ e $\partial_y f$ non sono continue in $(0,0)$: ad esempio è

$\partial_x f(x,0)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ ed è $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$ ma $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ non esiste.

Se f è differenziabile in $(0,0)$ necessariamente il differenziale in $(0,0)$ è l'applicazione lineare nulla: $\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\longmapsto\nabla f(0,0)\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=0$,

pertanto sarà

$$\forall(x,y)\qquad f(x,y)=\overbrace{f(0,0)+\nabla f(0,0)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}^{0}+o(\sqrt{x^2+y^2})\ \text{per } (x,y)\to(0,0)\ (*)$$

Viceversa, se vale $(*)$ allora per definizione f è differenziale.

Vale $(*)$? Sì: infatti

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\downarrow\ 0}\ \underbrace{\sin\frac{1}{x^2+y^2}}_{\text{limitato}}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

cioè $f(x,y)\in o(\sqrt{x^2+y^2})$ per $(x,y)\to(0,0)$

quindi f è differenziabile in 0 e il suo differenziale in $(0,0)$ è l'<u>applicazione lineare</u> nulla.

Dimostriamo la regola della catena enunciata nella Lez. 7.

Prop (regola della catena I)

Siano $r:[a,b]\longrightarrow A\subseteq\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ con

- r derivabile in t_0

- f differenziabile in $r(t_0)$

Allora $f \circ r$ è derivabile in t_0 e si ha

$$\boxed{(f \circ r)'(t_0) = \nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(r(t_0))\, r_i'(t_0).}$$

Scritto in componenti, se $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ è

$$\frac{d}{dt} f(r_1(t), \dots, r_n(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(r(t_0))\, r_1'(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(r(t_0))\, r_n'(t_0).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(r(t_0))\, r_i'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(r(t_0)) \frac{dr_i}{dt}(t_0)$$

Dim. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(r(t)) - f(r(t_0))}{t - t_0}$$

Essendo f differenziabile in $r(t_0)$ si ha

$$f(x) = f(r(t_0)) + \nabla f(r(t_0)) \cdot (x - p) + R(x)\, \|x - r(t_0)\| \quad \text{con} \lim_{x \to r(t_0)} R(x) = 0$$

Inoltre $r(t) = r(t_0) + r'(t_0)(t - t_0) + \omega(t)(t - t_0)$ con $\lim_{t \to t_0} \omega(t) = 0$.

Si ha quindi

$$f(r(t)) = f(r(t_0)) + \nabla f(r(t_0)) \cdot (r(t) - r(t_0)) + R(r(t)) \cdot \|r(t) - r(t_0)\|$$

$$= f(r(t_0)) + \nabla f(r(t_0)) \cdot (r'(t_0)(t - t_0) + \omega(t)(t - t_0)) + R(r(t))\, \|r(t) - r(t_0)\|$$

$$= f(r(t_0)) + \nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0)(t - t_0) + \nabla f(r(t_0)) \cdot \omega(t)(t - t_0) + R(r(t))\, \|r(t) - r(t_0)\|$$

da cui

$$\frac{f(r(t)) - f(r(t_0))}{t - t_0} = \nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0) + \nabla f(r(t_0)) \cdot \omega(t) + R(r(t)) \frac{\|r(t) - r(t_0)\|}{t - t_0}$$

Ora $\lim_{t \to t_0} \nabla f(r(t_0)) \cdot \omega(t) = 0$ e

$$\left| \frac{\|r(t) - r(t_0)\|}{t - t_0} \right| = \left\| \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} \right\| \longrightarrow \|r'(t_0)\|$$ da cui, essendo $r(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} r(t_0)$,

$$\lim_{t \to t_0} R(r(t)) \frac{\|r(t) - r(t_0)\|}{t - t_0} = 0.$$ Pertanto

$$(f \circ r)'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(r(t)) - f(r(t_0))}{t - t_0} = \nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0) \quad \#$$

Esempio. $r(t) = (t, e^t, \cos t)$ $\quad f(x, y, z) = x^2 y \lg(z^2 + 1)$.

$$\frac{d}{dt} f(t, e^t, \cos t) = f_x(t, e^t, \cos t) \frac{dt}{dt} + f_y(t, e^t, \cos t) \frac{de^t}{dt} + f_z(t, e^t, \cos t) \frac{d(\cos t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} f(t, e^t, \cos t) = f_x(t, e^t, \cos t)\frac{dt}{dt} + f_y(t, e^t, \cos t)\frac{de^t}{dt} + f_z(t, e^t, \cos t)\frac{d(\cos t)}{dt}$$

$$= 2x(t)y(t)\lg(z^2(t)+1) + x^2(t)\lg(z^2(t)+1)e^t - x^2(t)y(t)\frac{2z(t)}{z^2(t)+1}\sin t \quad \text{dove}$$

$x(t) = t$, $y(t) = e^t$, $z(t) = \cos t$

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $(0,0)$ tale che $\forall t$ $f(t,t) = 2t$ e $f(t,-t) = 0$. Determinare $\nabla f(0,0)$.

Soluzione. Si ha $2 = \frac{d}{dt}(2t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f(t,t))\Big|_{t=0}$

$$= \partial_x f(0,0)\frac{dt}{dt} + \partial_y f(0,0)\frac{dt}{dt}$$

$$= \partial_x f(0,0) + \partial_y f(0,0)$$

Analogamente $0 = \frac{d}{dt} 0 = \frac{d}{dt} f(t,-t)\Big|_{t=0}$

$$= \partial_x f(0,0)\frac{dt}{dt} + \partial_y f(0,0)\frac{d(-t)}{dt}$$

$$= \partial_x f(0,0) - \partial_y f(0,0)$$

da cui $\begin{cases} \partial_x f(0,0) + \partial_y f(0,0) = 2 \\ \partial_x f(0,0) - \partial_y f(0,0) = 0 \end{cases}$ che porge $\partial_x f(0,0) = 1 = \partial_y f(0,0)$.

Funzioni di più variabili a valori vettoriali.

Def. Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $n, m \geq 1$, A aperto

$$x = (x_1, .., x_n) \longmapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 ... x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, .., x_n) \end{pmatrix}$$

Se $\bar{x}$ è interno ad A la derivata parziale di f rispetto a x_1, indicata con $\partial_{x_1} f(\bar{x})$ o con $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})$ o $D_{x_1} f(\bar{x})$ è, se esiste in $\mathbb{R}^m$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2, .., \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, .., \bar{x}_n)}{h}$$

Dato che quest'ultimo limite è $\lim_{h \to 0} \begin{pmatrix} \frac{f_1(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2, .., \bar{x}_n) - f_1(\bar{x}_1, .., \bar{x}_n)}{h} \\ \vdots \\ \frac{f_m(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2, .., \bar{x}_n) - f_m(\bar{x}_1, .., \bar{x}_n)}{h} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$ si ha che f è derivabile in $\bar{x}$ rispetto a x_1

se e solo se ogni componente $f_1, .., f_m$ di f lo è, ed inoltre $\partial_{x_1} f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$.

Analogamente per ogni $i \in \{1, .., n\}$ è

i-esima parte

Analogamente per ogni $i \in \{1, .., n\}$ è ($e_i = (0, 0, .., 1, .., 0)$ posto i)

$$\partial_{x_i} f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+he_i) - f(\bar{x})}{h} = \begin{pmatrix} \partial_{x_i} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \partial_{x_i} f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$ se

$\partial_{x_i} f_1, .., \partial_{x_i} f_m$ esistono in x.

La funzione f si dice di classe $\mathcal{C}^1$ se $\partial_{x_1} f, .., \partial_{x_n} f$ sono continue.

Se f ha derivate parziali in $\bar{x}$ la <u>matrice Jacobiana</u> di f in $\bar{x}$ è la matrice $m \times n$ data da.

$$\mathrm{Jac}\, f(\bar{x}) = \left(\partial_{x_1} f(\bar{x}) \middle| \dots \middle| \partial_{x_n} f(\bar{x}) \right)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}}_{n \text{ colonne}} \Bigg\} m \text{ righe}$$

Esempio. $f(x,y,z) = (x^2 y, z e^y)$.

$$\mathrm{Jac}\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & ze^y & e^y \end{pmatrix}.$$

OSSERVAZIONE. Se $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è

$$\mathrm{Jac}\, f = (\partial_{x_1} f, .., \partial_{x_n} f) = {}^t\nabla f$$ (il trasposto del gradiente).

Se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è $\mathrm{Jac}\, f = (f')$ cioè

$$\mathrm{Jac}\, f(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

La regola della catena II: la vendetta!

Abbiamo visto come si deriva la composta di funzioni

Abbiamo visto come si deriva la composta di funzioni

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Vediamo ora come si derivano composte del tipo

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

Proposizione. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} B \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ con A, B aperti.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \longmapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \qquad y \longmapsto g(y), \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$.

Allora $g \circ f$ è $\mathcal{C}^1$ e per ogni $p \in A$ si ha

$$\boxed{\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x_j}(p) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(p)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}}$$

Dim. Si tratta di una conseguenza immediata della precedente regola della catena. Fissiamo ad esempio $j = 1$.

È $\dfrac{\partial (g\circ f)}{\partial x_1}(p) = (g \circ r)'(0)$ dove $r(t) = f(p_1 + t, \dots, p_n)$, con $p = (p_1, \dots, p_n)$

Infatti: $$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x_1} = \lim_{t \to 0} \frac{(g\circ f)(p_1+t, p_2, \dots, p_n) - (g\circ f)(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(g\circ r)(t) - (g\circ r)(0)}{t} = (g\circ r)'(0).$$

Per la regola della catena I si ha allora

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x_1} = (g\circ r)'(0) = \nabla g(r(0)) \cdot r'(0)$$

$$= \nabla (f(p)) \cdot \partial_{x_1} f(p) \qquad \text{dato che } r'(0) = \partial_{x_1} f(p)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(p)) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(p)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(p) \\ \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(p) \end{pmatrix}$$

$$= \sum \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(p)) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p) \qquad \#$$

Esempio. (un caso importante: $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$)

Nel caso in cui $m = 1$ la formula precedente porge

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x_i}(p) = g'(f(p))\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{\nabla (g\circ f)(p) = g'(f(p))\,\nabla f(p)}$$

Esempio. $\nabla \|x\| = \frac{x}{\|x\|}$ per $x \neq 0$. Infatti $\|x\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ è la composta di $x \longmapsto \underbrace{x_1^2+\dots+x_n^2}_{=\|x\|^2} \xmapsto{\sqrt{\ }} \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ da cui

$$\nabla\|x\| = \nabla(\sqrt{\ }\circ \|\cdot\|^2)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\|x\|^2}}\,\nabla(\|x\|^2) = \frac{1}{2\|x\|}\,2x = \frac{x}{\|x\|}. \quad (x\neq 0).$$

[Il fatto che $\nabla\|x\|^2 = 2x$ è immediato: $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2+\dots+x_n^2) = 2x_i$].

Esempio. Sia $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^1$. Allora, posto $h(x) = |f(x)|$ è $\nabla h(p) = \nabla f(p)\,\frac{f(p)}{|f(p)|}$ in ogni punto p con $f(p)\neq 0$.

Infatti $h(x) = \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \xmapsto{f} & f(x) & \xmapsto{|\cdot|} & |f(x)| \end{array}$ da cui

$$\nabla h(p) = |\cdot|'(f(p))\,\nabla f(p) \quad \text{se } |\cdot| \text{ è derivabile in } f(p)$$

$$= \frac{f(p)}{|f(p)|}\,\nabla f(p) \quad \text{se } f(p)\neq 0.$$

REGOLA DELLA CATENA III: IL FINALE.

Trattiamo ora il caso generale $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$

PROP. Siano $A\subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} B \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ con A, B aperti due funzioni di classe $\mathscr{C}^1$. Allora per ogni $p\in A$

Jacobiana della composta $g\circ f$ in p

Jacobiana di g in $f(p)$

Jacobiana di f in p

$$\underbrace{\mathrm{Jac}\,(g\circ f)(p)}_{k\times n} = \underbrace{\mathrm{Jac}\,g(f(p))}_{k\times m} \times \underbrace{\mathrm{Jac}\,f(p)}_{m\times n}$$

prodotto tra matrici

Dim. Posto $f(\underbrace{x_1,\dots,x_n}) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ e $g(\underbrace{y_1,\dots,y_m}) = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ \vdots \\ g_k(y) \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\qquad}_{x} \quad f_m(x) \Big) \qquad \underbrace{\qquad}_{y} \Big) \quad g_k(y) \Big)$$

per ogni $\ell \in \{1,\dots,k\}$ e $i \in \{1,\dots,n\}$ si ha $(g\circ f)_\ell(x) = g_\ell(f(x))$

da cui
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f)_\ell(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[g_\ell(f(x))\right](p)$$
$$\overset{\text{regola catena II}}{=} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_\ell}{\partial y_j}(f(p))\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$$

Di conseguenza $\frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f)_\ell(p)$ è l'elemento al posto (ℓ, i)

del prodotto delle matrici $\operatorname{Jac} g(f(p)) \times \operatorname{Jac} f(p)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(p)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(p)) \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{\frac{\partial g_\ell}{y_1}(f(p)) \quad \cdots \quad \frac{\partial g_\ell}{\partial y_m}(f(p))} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(f(p)) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(f(p)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

da cui $\operatorname{Jac}(g\circ f)(p) = \operatorname{Jac} g(f(p)) \times \operatorname{Jac} f(p)$.

Esempio. Siano $f(x,y) = (xy, x^2y)$ e $g(s,t) = (s+t, s^2-t^2)$.
Determinare la matrice jacobiana di $F(s,t) = (f\circ g)(s,t)$.

<u>Metodo I:</u> $F(s,t) = f(g(s,t)) = f(s+t, s^2-t^2)$
$$= \left((s+t)(s^2-t^2),\ (s+t)^2(s^2-t^2)\right)$$
$$= \left(s^3+ts^2-st^2-t^3,\ (s^2+2st+t^2)(s^2-t^2)\right)$$
$$= \left(s^3+ts^2-st^2-t^3,\ s^4+2s^3t-2st^3-t^4\right)$$

da cui
$$\operatorname{Jac} F(s,t) = \begin{pmatrix} 3s^2+2ts-t^2 & s^2-2ts-3t^2 \\ 4s^3+6s^2t-2t^3 & 2s^3-6st^2-4t^3 \end{pmatrix}$$

<u>Metodo II:</u> usando la regola della catena

$$\operatorname{Jac} F(s,t) = \operatorname{Jac} f(g(s,t)) \times \operatorname{Jac} g(s,t)$$
$$= \operatorname{Jac} f(s+t, s^2-t^2) \times \operatorname{Jac} g(s,t).$$

Ora $\mathrm{Jac}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$ da cui

$$\mathrm{Jac}\, f(s+t, s^2-t^2) = \begin{pmatrix} s^2-t^2 & s+t \\ 2(s+t)(s^2-t^2) & (s+t)^2 \end{pmatrix}$$ sicché

$$\mathrm{Jac}\, F(s,t) = \begin{pmatrix} s^2-t^2 & s+t \\ 2(s+t)(s^2-t^2) & (s+t)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2s & -2t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s^2-t^2+2s^2+2st & s^2-t^2-2t(s+t) \\ 2(s+t)(s^2-t^2)+2s(s+t)^2 & 2(s+t)(s^2-t^2)-2t(s+t)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s^2-t^2+2s^2+2st & s^2-t^2-2st-2t^2 \\ (s+t)\,(2s^2-2t^2+2s(s+t)) & (s+t)\,(2(s^2-t^2)-2t(s+t)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3s^2-t^2+2st & s^2-3t^2-2st \\ (s+t)\,(4s^2-2t^2+2st) & (s+t)\,(2s^2-4t^2-2ts) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3s^2-t^2+2st & s^2-3t^2-2st \\ 4s^3+6s^2t-2t^3 & 2s^3-6st^2-4t^3 \end{pmatrix} \#$$