## Matrice jacobiana e composizione di funzioni

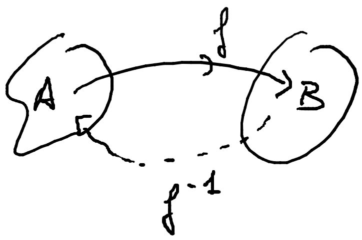
$$A \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} B \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$

$A$, $B$ aperti, $f$ e $g$ di classe $\mathcal{C}^1$ allora

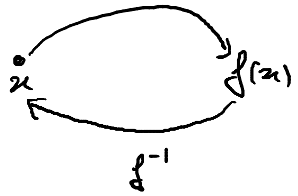
$$\mathrm{Jac}(g \circ f)(p) = \underbrace{\mathrm{Jac}\, g(f(p))}_{\substack{\text{Jacobiano di } g \\ \text{nel punto } f(p)}} \times \mathrm{Jac}\, f(p).$$

## FUNZIONI INVERTIBILI

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$




- $A$ aperto, $B$ sia aperto
- $f$ sia $\mathcal{C}^1$
- $f$ sia invertibile: esiste $f^{-1} : B \longrightarrow A$
  $[y \in B \quad f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)]$
- Supponiamo $f^{-1}$ di classe $\mathcal{C}^1$.




Dalla identità: $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$

$[\mathrm{Id}(x) = x]$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Jac}(f^{-1} \circ f)(p) = \mathrm{Jac}(\mathrm{Id})}$$

Calcoliamo $\mathrm{Jac}(\mathrm{Id})$: $\mathrm{Id}(x_1, .., x_n) \longmapsto (x_1, .., x_n)$

$$\mathrm{Jac}(\mathrm{Id})(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\underbrace{\mathrm{Jac}(f^{-1} \circ f)}_{\text{regola}}(p) = I$$

$$\mathrm{Jac}(f^{-1})(f(p)) \times \underbrace{\mathrm{Jac}\, f(p)}\, = I$$

[illegible]

$\Rightarrow \operatorname{Jac} f(p)$ è invertibile e $[\operatorname{Jac} f(p)]^{-1} = \operatorname{Jac}(f^{-1})(f(p))$.

Riassunto: se $f$ è $\mathcal{C}^1$ con inversa $\mathcal{C}^1$ allora $\operatorname{Jac} f(p)$ è invertibile e

$$\boxed{\operatorname{Jac}(f^{-1})(f(p)) = [\operatorname{Jac} f(p)]^{-1}}$$

PROBLEMA: quand'è che l'inversa di una funzione $\mathcal{C}^1$ è anch'essa di classe $\mathcal{C}^1$?

Torniamo al caso delle funzioni dell'Analisi I: in tal caso è sufficiente sapere che $f'$ non si annulla: se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ invertibile con inversa $f^{-1}$ $\Rightarrow f^{-1}$ è $\mathcal{C}^1$ e

$$\forall p: \quad \boxed{(f^{-1})'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}}$$

Se $f: I = [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$, $f' \neq 0$ allora $f$ è invertibile e l'inversa è $\mathcal{C}^1$.

L'analogo accade anche in dimensione $n > 1$.

PROP $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n$, $A$ aperto, $f$ di classe $\mathcal{C}^1$ invertibile. Allora $f^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ se e solo se $\operatorname{Jac} f(x)$ è una matrice invertibile per ogni $x \in A$; in tal caso $B = f(A)$ è aperto.

(Non dimostriamo al momento questa proposizione).

ESEMPIO. $f(x,y) = (x, y - x^2)$

• Invertibilità di $f$: sia $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ esistono unici $(x,y)$: $(u,v) = f(x,y)$?

$$(u,v) = f(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = y - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v + x^2 = v + u^2 \end{cases}$$

$f$ è invertibile $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $f^{-1}(u,v) = (u, u^2 + v)$

$f^{-1}$ è $\mathcal{C}^1$ e $\mathrm{Jac}\, f^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 1 \end{pmatrix}$.

- Supponiamo di non essere riusciti a trovare esplicit. $f^{-1}$ ma di sapere che $f$ è invertibile. Proviamo che $f^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^1$.

$[f(x,y) = (x, y-x^2)]$

Determiniamo $\mathrm{Jac}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$

$\det \mathrm{Jac}\, f(x,y) = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Jac}\, f$ è invertibile su $\mathbb{R}^2$.

$\mathrm{Jac}\, f^{-1}(u,v) = [\mathrm{Jac}\, f(x,y)]^{-1}$ se $(u,v) = f(x,y)$.

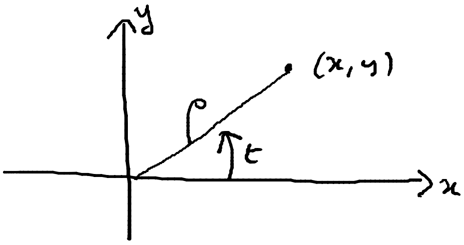
Ripasso: se $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ è invertibil allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow [\mathrm{Jac}\, f(x,y)]^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

Se $(u,v) = f(x,y) \Rightarrow \underline{\mathrm{Jac}\, f^{-1}(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$

$(u,v) = (x, y-x^2) \Rightarrow \underline{\mathrm{Jac}\, f^{-1}(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 1 \end{pmatrix}}$

ESERCIZIO.




$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases}$ $\rho \geq 0$ $t \in ]-\pi, \pi]$ $t$ = argomento principale di $(x,y)$

$t(x,y) = \mathrm{Arg}(x,y)$

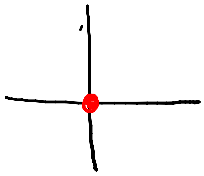
$(\rho, t) \xmapsto{f} (\rho \cos t, \rho \sin t)$ (passaggio in coordinate polari)

$\rho \in [0, +\infty[$
$t \in ]-\pi, \pi]$

OSS: su $]0,+\infty[ \times ]-\pi,\pi]$ l'applicazione $f$ è

OSS: su $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi]$ l'applicazione $f$ è invertibile da $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Studiamo la "regolarità" della applicazione inversa:



$$(x,y) \xmapsto{f^{-1}} (\rho(x,y),\ \mathrm{Ang}(x,y))$$
$$\longmapsto (\rho,\ t) \qquad \left( \Leftrightarrow \begin{cases} x=\rho\cos t \\ y=\rho\sin t \end{cases} \right)$$

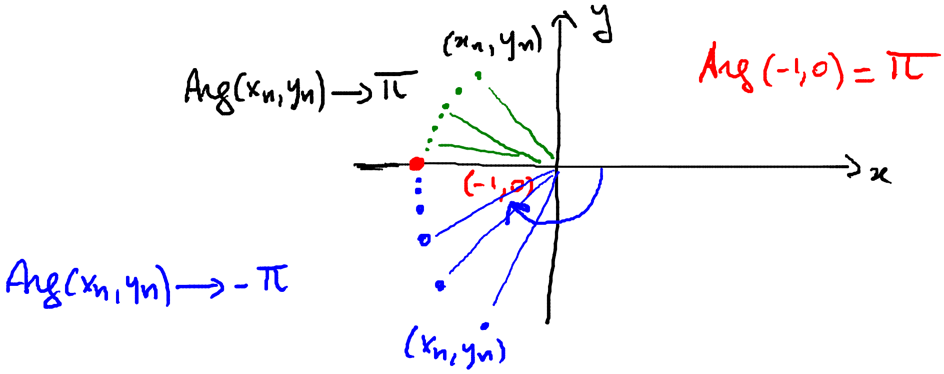
$f$ è continua ($\rho\cos t$ e $\rho\sin t$ sono continue)

- $f^{-1}: \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to ]0,+\infty[\times]-\pi,\pi]$ è continua?

$f^{-1}(x,y) = (\rho(x,y),\ \mathrm{Ang}(x,y))$ è continua?

$\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ è continua MA

$\mathrm{Ang}(x,y): \mathbb{R}^2\setminus 0 \to ]-\pi,\pi]$ non è continua.



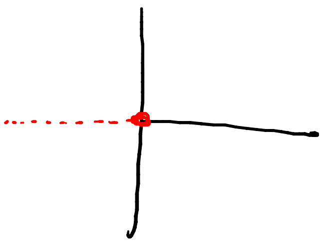

$(x_n,y_n) \to (-1,0)$ MA $\mathrm{Ang}(x_n,y_n) \longrightarrow -\pi \neq \mathrm{Ang}(-1,0)$

$\Rightarrow \mathrm{Ang}: \mathbb{R}^2\setminus 0 \to ]-\pi,\pi]$ non è continua.

Consideriamo ora $f$ ristretta a un insieme più piccolo: $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$

$$f: ]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{(x,0): x\leq 0\}.$$

$f$ è $\mathscr{C}^1$, invertibile, con inversa di classe $\mathscr{C}^1$.



- $f$ è $\mathcal{C}^1$: $f(\rho,t)=(\rho\cos t,\ \rho\sin t)$

$$\mathrm{Jac}\, f(\rho,t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\rho\sin t\\ \sin t & \rho\cos t\end{pmatrix}$$

- $f$ è invertibile: dati $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):\ x\leq 0\}$ esistono unici $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ e $t=\mathrm{Arg}(x,y)$ tali che $(x,y)=f(\rho,t)$.

- $f^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^1$: infatti $\mathrm{Jac}\, f$ è invertibile su $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$:

$$\det\begin{pmatrix}\cos t & -\rho\sin t\\ \sin t & \rho\cos t\end{pmatrix}=\rho\cos^2 t+\rho\sin^2 t=\rho\neq 0$$

$\Rightarrow$ (per la prop.) $f^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^1$.

- Calcoliamo $\mathrm{Jac}(f^{-1})(x,y)$.

OSS: $f^{-1}(x,y)=(\rho(x,y),\ \mathrm{Arg}(x,y))$.

$$\mathrm{Jac}\, f^{-1}(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_x\rho & \partial_y\rho\\ \partial_x\mathrm{Arg} & \partial_y\mathrm{Arg}\end{pmatrix}$$

$\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \partial_x\rho(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad \partial_y\rho(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Per calcolare $\partial_x\mathrm{Arg}(x,y)$ e $\partial_y\mathrm{Arg}(x,y)$ usiamo la formula sulla jacobiana dell'inversa.

$$\mathrm{Jac}\, f^{-1}(x,y)=\left[\mathrm{Jac}\, f(\rho,t)\right]^{-1}\qquad (x,y)=f(\rho,t)=(\rho\cos t,\rho\sin t)$$

$$\mathrm{Jac}\, f(\rho,t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\rho\sin t\\ \sin t & \rho\cos t\end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{Jac}\, f(\rho,t)]^{-1}=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos t & \rho\sin t\\ \ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\rho\cos t}{\rho} & \frac{\rho\sin t}{\rho}\\ \ldots\end{pmatrix}$$

$$\left[\mathrm{Jac}\, f(\rho,t)\right]^{-1} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ -\frac{\sin t}{\rho} & \frac{\cos t}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$(\mathrm{Jac}\, f^{-1})(x,y)$$

Scriviamo (se possibile) la matrice in termini di $(x,y)$

$$\frac{\rho\cos t}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\rho\sin t}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ : conferma di quanto predetto sopra.

$$\frac{-\sin t}{\rho} = \frac{-\rho\sin t}{\rho^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\cos t}{\rho} = \frac{\rho\cos t}{\rho^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

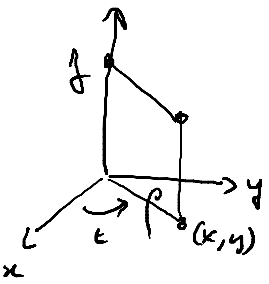
$$\mathrm{Jac}\,\underbrace{\left(\rho(x,y), \mathrm{Arg}(x,y)\right)}_{f^{-1}(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Arg}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Arg}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

**ESEMPIO.** Coordinate cilindriche

$f(\rho, t, z) = (\rho\cos t, \rho\sin t, z)$

$\rho > 0, \quad t \in ]-\pi, \pi[\ , \quad z \in \mathbb{R}$

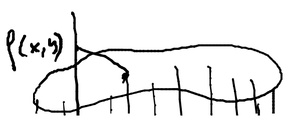


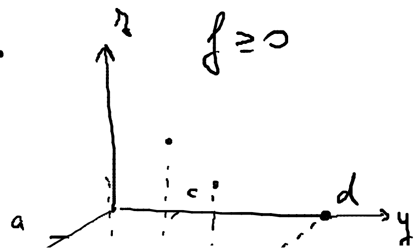

coordinate cilindriche. $f$ è $\mathcal{C}^1$ con inversa $\mathcal{C}^1$, determinare $\mathrm{Jac}\, f^{-1}$.

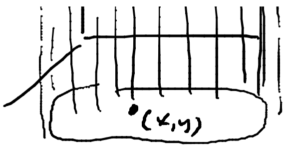
# INTEGRALI.

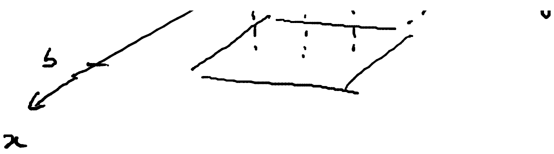
## Cenno sull' integrale di Riemann su un rettangolo in $\mathbb{R}^2$

Sia $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f \geq 0$





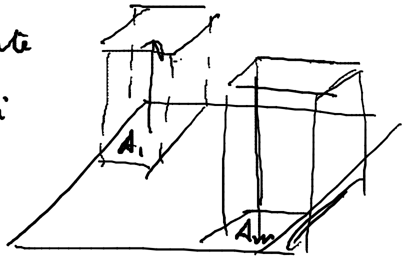



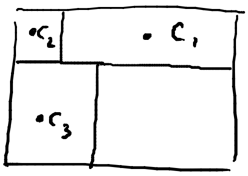

$$\text{Trap}(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le f(x,y), \ (x,y) \in [a,b]\times[c,d] \}$$

Idea: cercare di calcolare $\text{Vol}(\text{Trap}\, f)$.

Sarebbe semplice se si potesse suddividere il dominio in rettangoli sui quali $f$ è costante

Se $\{A_1, \dots, A_m\}$ ($f$ costante su $A_i$) è la suddivisione e $c_1 \in A_1, \dots, c_m \in A_m$ allora il volume di $\text{Trap}(f) =$ $\text{Area}(A_1) \times f(c_1) + \dots + \text{Area}(A_m) \times f(c_m)$

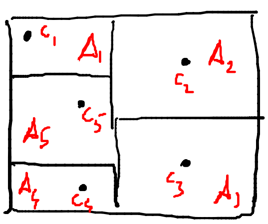



**Def**

Una suddivisione puntata di $[a,b]\times[c,d]$ è una famiglia $\{(A_1, c_1), \dots, (A_m, c_m)\}$ dove

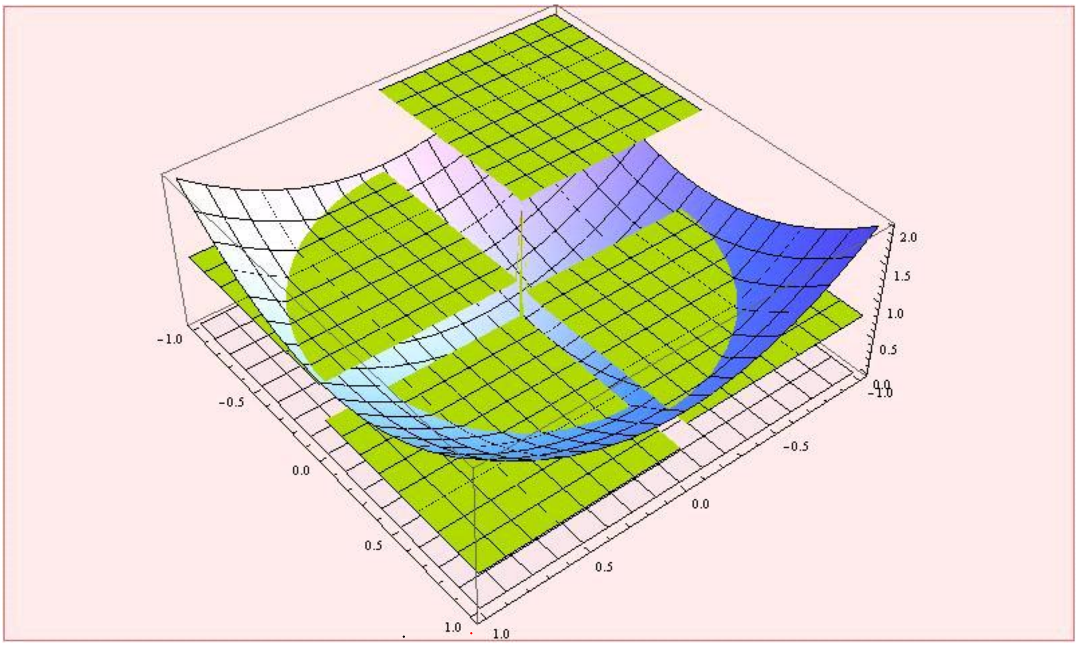
- $A_1, \dots, A_m$ sono rettangoli con interni a due a due disgiunti tali che $A_1 \cup \dots \cup A_m = [a,b]\times[c,d]$
- $c_i \in A_i$




La somma di Riemann associata a questa suddivisione puntata è

$$f(c_1) \times \text{Area}(A_1) + \dots + f(c_m) \times \text{Area}(A_m).$$

Si tratta del volume del trapezoide della funzione che su $A_i$ assume il valore $f(c_i)$.




**Prop.** Se $f$ è continua su $[a,b]$ le somme di Riemann di $f$ convergono ad un numero al tendere a 0 del massimo della lunghezza dei lati degli insiemi $A_i$: questo numero si chiama integrale di Riemann di $f$ su $[a,b]\times[c,d]$ e si indica $I = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$

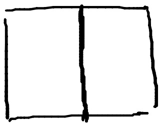
Si dimostra che tale integrale si calcola così:

Si dimostra che tale integrale si calcola così:

$$I = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$$

FORMULA di RIDUZIONE

fisso $x$ e calcolo $\int_c^d f(x,y)\,dy$



$$x \longmapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Es: $f(x,y) = x e^{-y}$ $\quad I = \int_{[0,1]\times[2,3]} f(x,y)\,dx\,dy$

integrale doppio

La prop: $I = \int_0^1 \left\{ \int_2^3 f(x,y)\,dy \right\} dx$

Calcoliamo, per $x$ fissato in $[0,1]$; $\int_2^3 f(x,y)\,dy$

come se fosse COSTANTE

$$\int_2^3 x e^{-y}\,dy = x \int_2^3 e^{-y}\,dy = x \left[ -e^{-y} \right]_{y=2}^{y=3} =$$

$$= \underbrace{x\left(-e^{-3}+e^{-2}\right)}_{\text{funzione di } x}$$

$$\underbrace{\int_0^1 \left\{ \int_2^3 x e^{-y}\,dy \right\} dx}_{\text{integrale iterato}} = \int_0^1 x\left(-e^{-3}+e^{-2}\right) dx$$

$$= \left(e^{-2}-e^{-3}\right) \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{-2}-e^{-3}\right).$$

Es: integrare prima rispetto a $x$, poi risp. a $y$.