Allo stesso risultato si sarebbe arrivati integrando prima rispetto alla x e poi rispetto alla y. Si ha infatti

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\right\},$$

da cui

$$\int_E xe^y \,dx\,dy = \int_0^1 e^y \,dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y^2)e^y \,dy,$$

e l'ultimo integrale è uguale a

$$e^y\left[y - \frac{1+y^2}{2}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali:

16. $\int_E y \arcsin x \,dx\,dy$ **17.** $\int_E x \sin y \,dx\,dy$

18. $\int_E \arcsin y \,dx\,dy$ **19.** $\int_E xy \ln xy \,dx\,dy$

20. $\int_E x\sqrt{1-y^2} \,dx\,dy$ **21.** $\int_E x\sqrt{y} \,dx\,dy$

dove E è l'insieme dell'Esempio 4.1.

22. $\int_E \frac{y}{2+x} \,dx\,dy$ **23.** $\int_E \frac{x^2}{3+y} \,dx\,dy$

24. $\int_E x^2\sqrt{y} \,dx\,dy$ **25.** $\int_E \frac{y}{4x^2+y^2} \,dx\,dy$

26. $\int_E \frac{1+x^2}{1+2y} \,dx\,dy$ **27.** $\int_E (2y+1)\ln(1+x^2) \,dx\,dy$

in cui E è la porzione del piano limitata dalla parabola $y = 1 - x^2$ e dall'asse delle x.

28. $\int_E xe^y \,dx\,dy$ **29.** $\int_E x \sin xy \,dx\,dy$

30. $\int_E x\cos(1-y) \,dx\,dy$ **31.** $\int_E \arcsin x \,dx\,dy$

nei quali si è posto

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}.$$

32. $\int_E (y - x^2) \,dx\,dy$ **33.** $\int_E (y+1) \,dx\,dy$

34. $\int_E \frac{1}{1+y} \,dx\,dy$ **35.** $\int_E (2-y)e^x \,dx\,dy$

dove

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 - \sqrt{1-x^2}\right\}.$$

36. $\int_E \frac{x}{1+y^2} \,dx\,dy$ **37.** $\int_E \ln(1+x+2y) \,dx\,dy$

38. $\int_E \frac{xy}{x+y} \,dx\,dy$ **39.** $\int_E y \arcsin x \,dx\,dy$

40. $\int_E x \sin y \,dx\,dy$ **41.** $\int_E xye^y \,dx\,dy$

nei quali E è l'insieme delimitato dalla parabola $x = y^2$ e dalle rette $y = 0$ e $x = 1$.

42. $\int_E \frac{y}{1+x+y} \,dx\,dy$ **43.** $\int_E (1+y)e^x \,dx\,dy$

44. $\int_E (x+y)\ln(1+x) \,dx\,dy$ **45.** $\int_E \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} \,dx\,dy$

46. $\int_E x \arcsin y \,dx\,dy$ **47.** $\int_E x \operatorname{arctg} xy \,dx\,dy$

48. $\int_E \sqrt{4x^2 - y^2} \,dx\,dy$

dove E è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

49. $\int_E \sin\frac{\pi}{2}(x+y) \,dx\,dy$ **50.** $\int_E (x^2 - y^2) \,dx\,dy$

51. $\int_E x \arcsin y \,dx\,dy$

quando E è il parallelogrammo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(2,1)$.

52. $\int_E \ln(x+2y)\,dx\,dy$

dove E è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$.

53. $\int_T \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$

con

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}.$$

54. $\int_E x^2 y\,dx\,dy$ **55.** $\int_E \frac{x}{1+y^2}\,dx\,dy$

56. $\int_E \frac{x}{1+xy}\,dx\,dy$ **57.** $\int_E x \operatorname{arctg} y\,dx\,dy$

58. $\int_E x\ln(1+y)\,dx\,dy$ **59.** $\int_E x^3 e^{x^2 y}\,dx\,dy$

con

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1,\ 1 < y < \frac{1}{x}\right\}.$$

60. $\int_D x\,dx\,dy$ **61.** $\int_D y\,dx\,dy$

62. $\int_D (x^2 y+1)\,dx\,dy$ **63.** $\int_D y^3 e^x\,dx\,dy$

dove D è l'insieme del semipiano $y > 0$ delimitato dalle circonferenze di centro l'origine e raggio 1 e 2, e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

Lo stesso metodo può essere usato nel caso di integrali in tre o più variabili.

Esempio 4.2

Si calcoli

$$\int_E x(y+z)\,dx\,dy\,dz,$$

dove E è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Risulta

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1\},$$

e dunque

$$\int_E x(y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_T x\,dx\,dy \int_0^{1-x-y} (y+z)\,dz,$$

dove T è il triangolo

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}.$$

Si ha allora

$$\int_E x(y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_T x\left[y(1-x-y) + \frac{1}{2}(1-x-y)^2\right] dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} [(1-x)^2 - y^2]\,dy,$$

e quest'ultimo integrale è uguale a

$$\frac{1}{3}\int_0^1 x(1-x)^3\,dx = \frac{1}{60}. \quad \blacksquare$$

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali:

64. $\int_E xy(y+z)\,dx\,dy\,dz$ **65.** $\int_E (1+y\sqrt{x})\,dx\,dy\,dz$

66. $\int_E (x+y)\,dx\,dy\,dz$ **67.** $\int_E xye^z\,dx\,dy\,dz$

68. $\int_E \arcsin x\,dx\,dy\,dz$ **69.** $\int_E \frac{dx\,dy\,dz}{1+x+y+z}$

dove E è il tetraedro definito nell'Esempio 4.2.

70. $\int_T (x + \ln y)\,dx\,dy\,dz$ **71.** $\int_T xy\sin(\pi z)\,dx\,dy\,dz$

72. $\int_T \frac{1+2xy}{1+z^2}\,dx\,dy\,dz$ **73.** $\int_T e^z\,dx\,dy\,dz$

in cui T è il tetraedro con vertici nei punti $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(0,0,1)$.

74. $\int_E xy\,dx\,dy\,dz$ **75.** $\int_E (x+z)\ln y\,dx\,dy\,dz$

76. $\int_E ye^x\,dx\,dy\,dz$

con

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 3 - x + y\}.$$

77. $\int_E (x + \sin z)\,dx\,dy\,dz$ **78.** $\int_E \operatorname{arctg}(x+y)\,dx\,dy\,dz$

dove si è posto

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le x - y\}.$$

79. $\int_E dx\,dy\,dz$ **80.** $\int_E x\ln(1+y)\,dx\,dy\,dz$

con

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 6 - x^2 - y^2\}.$$

81. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^a dx \int_0^x dy \int_y^x xyz\,dz,$$

e si trovi il dominio D di integrazione.

Il teorema di Fubini può anche essere usato per ottenere una interessante formula di trasformazione degli integrali.

Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione definita in un insieme misurabile E, misurabile e non negativa. Abbiamo già osservato che, posto

$$\mathcal{T}_0 = \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbf{R} : 0 < y < f(\mathbf{x})\},$$

si ha

$$\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \mathrm{m}_{n+1}(\mathcal{T}_0).$$

D'altra parte si ha

$$\mathcal{T}_{0t} = \{\mathbf{x} \in E : (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{T}_0\} = \{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) > t\} = F_t,$$

e dunque, per il teorema di Fubini (vedi *Lezioni*, cap. 6, Teorema 5.1, e in particolare la [5.8]):

$$\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_0^\infty \mathrm{m}_n(F_t)\,dt. \qquad [4.1]$$

La formula [4.1], oltre al suo interesse intrinseco, può talvolta essere usata per semplificare il calcolo di alcuni integrali.

Esempio 4.3

Si calcoli

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1 + x^2 + 2y^2)^{-5/2}\,dx\,dy.$$

Si ha $0 < f(x,y) \le 1$, e dunque $F_t = \emptyset$ se $t \ge 1$. Se invece $0 < t < 1$, si ha

$$F_t = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 2y^2 > t^{-2/5} - 1 =: \varrho^2\right\},$$

e quindi F_t è l'ellisse di semiassi ϱ e $\frac{\varrho}{\sqrt{2}}$. Ne segue $\mathrm{m}(F_t) = \frac{\pi\varrho^2}{\sqrt{2}}$, e dunque

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1 + x^2 + 2y^2)^{-5/2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(t^{-2/5} - 1\right) dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}. \quad \blacksquare$$

Esercizi

82. Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione misurabile in un insieme E di misura finita. Dimostrare che la misura dell'insieme

$$\Phi_t = \{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) = t\}$$

è diversa da zero al più per un'infinità numerabile di valori di t.

L'ultimo integrale si calcola mediante il teorema di Fubini:

$$\int_0^1 dv \int_0^1 \frac{du}{2\sqrt{1+u-v}} = \int_0^1 \left(\sqrt{2-v} - \sqrt{1-v}\right) dv = \frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right). \blacksquare$$

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali:

86. $\int_T (x+y)\,dx\,dy$ **87.** $\int_T x^2\,dx\,dy$

88. $\int_T \ln(y+2x)\,dx\,dy$ **89.** $\int_T (x^2+y)\,dx\,dy$

dove T è il dominio definito nell'Esempio 5.2.

90. $\int_E \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$ **91.** $\int_E \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

92. $\int_E x\,dx\,dy$ **93.** $\int_E \frac{\ln x}{y^3}\,dx\,dy$

dove E è l'insieme dell'Esempio 5.1.

94. $\int_T dx\,dy$ **95.** $\int_T y\,dx\,dy$

96. $\int_T x\,dx\,dy$ **97.** $\int_T e^x \ln y\,dx\,dy$

con

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le ye^{-x} \le 2,\ 2 \le ye^x \le 3\}.$$

98. $\int_T \cos\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$

in cui T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

99. $\int_E dx\,dy$ **100.** $\int_E x\,dx\,dy$

101. $\int_E \frac{dx\,dy}{xy}$

dove E è l'insieme del primo quadrante delimitato dalle rette $y = 2x$ e $2y = x$ e dalle ellissi $4x^2 + y^2 = 4$ e $4x^2 + y^2 = 16$.

102. $\int_T dx\,dy$ **103.** $\int_T (x+y)\,dx\,dy$

104. $\int_T \sin(\pi y)\,dx\,dy$ **105.** $\int_T \frac{\ln y}{x}\,dx\,dy$

dove T è il dominio delimitato dai grafici delle funzioni $y = \ln x$, $y = \ln x + 2$, $y = -\ln x$ e $y = 4 - \ln x$.

106. $\int_T \frac{dx\,dy}{xy}$ **107.** $\int_T y^2 e^{xy}\,dx\,dy$

108. $\int_T xy^2 \ln xy\,dx\,dy$ **109.** $\int_T \frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{x^2}\,dx\,dy$

nei quali si è posto

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 2 \le xy \le 3\}.$$

110. $\int_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,dx\,dy$

con

$$D = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ 0 < a \le xy \le b,\ 0 < y^2 - x^2 < 1\}.$$

111. Calcolare il volume del solido

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1,\ 0 \le z \le \sqrt{xy}\right\}.$$

112. Ricordando che il *baricentro* di un solido E è il punto di coordinate

$$\overline{x}_i = \frac{1}{m(E)} \int_E x_i\,d\mathbf{x},$$

si trovi il baricentro del solido dell'esercizio precedente.

6 Coordinate polari

Un caso particolarmente importante di cambiamento di variabili consiste nell'introduzione di coordinate polari (in due o tre dimensioni) o cilindriche (in tre dimensioni). Nel caso bidimensionale si pone

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta \\ y = \varrho \sin\vartheta \end{cases}$$

116. Dire per quali valori di $\alpha < 0$ e $p > 0$ la funzione x^α è sommabile nell'insieme $E = \{(x,y) : 0 < x < 1, -x^p < y < x^p\}$. Per questi valori, calcolare l'integrale $\int_E x^\alpha \, dx\, dy$.

117. Dire per quali valori di $\alpha < 0$ e $p > 0$ la funzione z^α è sommabile nell'insieme $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < z < 1, x^2 + y^2 < z^{2p}\}$. Per questi valori calcolare l'integrale $\int_E z^\alpha \, dx\, dy\, dz$.

118. Dire per quali valori di α e p la funzione

$$\frac{y^\alpha}{x^2 + y^2}$$

è sommabile nell'insieme $T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^p\}$.

Calcolare i seguenti integrali:

119. $\int_E x e^{2y} \, dx\, dy$ **120.** $\int_E x \ln x \, dx\, dy$

dove E è l'insieme dell'Esempio 6.1.

121. $\int_E x^2 y^2 \, dx\, dy$ **122.** $\int_E \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \, dx\, dy$

123. $\int_E \frac{x^2}{x^2 + 2y^2} \, dx\, dy$ **124.** $\int_E \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} \, dx\, dy$

dove E è la corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2.

125. $\int_G \frac{dx\, dy}{3y + 4x}$ **126.** $\int_G x \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \, dx\, dy$

127. $\int_G x e^y \, dx\, dy$ **128.** $\int_G x \ln(1 + y) \, dx\, dy$

nei quali G è la parte della corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2, contenuta nel primo quadrante.

129. $\int_B (x + y^2)^2 \, dx\, dy$ **130.** $\int_B x^2 \operatorname{arctg}(x^2 + y^2) \, dx\, dy$

131. $\int_B \frac{x^2}{1 + y^2} \, dx\, dy$ **132.** $\int_B \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \, dx\, dy$

133. $\int_B \frac{y^2}{1 + x^2 + y^2} \, dx\, dy$ **134.** $\int_B x^2 e^{x^2 + y^2} \, dx\, dy$

dove B è il cerchio di raggio 1 con centro in O.

135. Determinare la misura e il baricentro dell'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le \frac{x + y}{x^2 + y^2}\right\}.$$

136. Si trovi l'area dell'intersezione dei cerchi $x^2 + y^2 - 2x \le 0$ e $x^2 + y^2 - 2y \le 0$.

Talvolta l'insieme E è dato direttamente in coordinate polari.

Esempio 6.4

Si calcoli l'area della porzione di piano racchiusa dalla curva

$$\varrho = a \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos \varphi}, \quad -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$$

L'insieme in esame è in coordinate polari:

$$E = \left\{(\varrho, \varphi) : -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \varrho \le a \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos \varphi}\right\}.$$

Si ha allora

$$\mathrm{m}(E) = \int_E \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos \varphi}} \varrho \, d\varrho,$$

da cui

$$\mathrm{m}(E) = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right). \blacksquare$$

Esercizi

137. Si calcoli l'integrale

$$\int_E x^2 \, dx\, dy,$$

dove E è l'insieme dell'Esempio 6.4.

138. Si calcoli l'area della porzione di piano racchiusa dalla curva

$$\varrho = a \frac{\operatorname{tg} \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)}{\cos \varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$$

Le coordinate polari sono utili per calcolare integrali estesi a domini circolari, anche quando non sono centrati nell'origine. Se il centro è nel punto (x_0, y_0), si opererà il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x = x_0 + \varrho \cos \vartheta \\ y = y_0 + \varrho \sin \vartheta. \end{cases}$$

Naturalmente la matrice jacobiana rimane la stessa, data che in essa entrano solo le derivate.

Esempio 6.5

Si calcoli

$$\int_C xy \, dx \, dy,$$

dove C è il semicerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 contenuto nel semipiano delle y positive.

Si può operare il cambiamento di variabili $x = 1 + \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$; si ottiene

$$\int_C xy \, dx \, dy = \int_0^1 \varrho^2 \, d\varrho \int_0^{\pi} (1 + \varrho \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = 2 \int_0^1 \varrho^2 \, d\varrho = \frac{2}{3}.$$

Allo stesso risultato si sarebbe potuti arrivare osservando che C è un dominio normale:

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2} \right\},$$

o anche usando le coordinate polari usuali $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$. In questo caso si deve avere $(x-1)^2 + y^2 \le 1$, e dunque il raggio ϱ varierà tra 0 e $2 \cos \vartheta$, mentre ϑ varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Ne segue

$$\int_C xy \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2 \cos \vartheta} \varrho^3 \, d\varrho,$$

da cui, calcolando gli integrali, si ottiene il valore $\frac{2}{3}$, come di dovere. ∎

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali:

139. $\int_E y \, dx \, dy$ **140.** $\int_E x^2 y \, dx \, dy$

141. $\int_E (1 + x^2 + y^2) \, dx \, dy$ **142.** $\int_E (y - x^2) \, dx \, dy$

dove E è il cerchio di raggio 1 centrato in $(0,1)$.

143. $\int_T \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

con $T = C_1 - C_2$, essendo C_1 e C_2 i cerchi di raggio 1, centrati nei punti $(0,1)$ e $(0,0)$.

144. $\int_A (x^2 + y^2 - y + 1) \, dx \, dy$

dove A è la corona circolare delimitata dalle circonferenze di raggi 2 e 3, centrate nel punto $(1,2)$.

Veniamo ora alle coordinate polari in tre variabili. In questo caso si pone

$$\begin{cases} x = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \varrho \cos \vartheta, \end{cases}$$

da cui segue

$$J = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \varrho \cos \vartheta \cos \varphi & \varrho \cos \vartheta \sin \varphi & -\varrho \sin \vartheta \\ -\varrho \sin \vartheta \sin \varphi & \varrho \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$|\det J| = \varrho^2 \sin \vartheta.$$

Di conseguenza:

$$\int_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_G f(\varrho \sin \vartheta \cos \varphi, \varrho \sin \vartheta \sin \varphi, \varrho \cos \vartheta) \, \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi,$$

dove G è l'insieme E espresso tramite le coordinate polari ϱ, ϑ e φ.

Esempio 6.6

Calcoliamo l'integrale

$$\int_B x^2 \, dx\, dy\, dz,$$

dove B è la palla unitaria in $\mathbf{R}^3$.

In coordinate polari la palla unitaria B è determinata dalle relazioni

$$\varrho \le 1,\ 0 \le \vartheta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Si ha allora

$$\int_B x^2 \, dx\, dy\, dz = \int_0^1 d\varrho \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} \varrho^4 \sin^3 \vartheta \cos^2 \varphi \, d\varphi.$$

Di conseguenza:

$$\int_B x^2 \, dx\, dy\, dz = \frac{4\pi}{15}. \ \blacksquare$$

Esempio 6.7

Si calcoli l'integrale

$$\int_E \ln(x^2 + y^2 + z^2) \, dx\, dy\, dz,$$

dove E è l'intersezione della palla unitaria B con il cono

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \ge 0,\ x^2 + y^2 \le z^2\}.$$

In coordinate polari il dominio E è determinato dalle relazioni

$$0 \le \varrho \le 1,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Ne segue

$$\int_E \ln(x^2 + y^2 + z^2) \, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \varrho^2 \ln \varrho^2 \, d\varrho \int_0^{\pi/4} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

e dunque l'integrale cercato è uguale a

$$4\pi \int_0^1 \varrho^2 \ln \varrho \, d\varrho \int_0^{\pi/4} \sin \vartheta \, d\vartheta = 2\sqrt{2}\pi \left(\sqrt{2} - 1\right) \int_0^1 \varrho^2 \ln \varrho \, d\varrho.$$

Quest'ultimo integrale si calcola facilmente per parti, ottenendo

$$\int_E \ln(x^2 + y^2 + z^2) \, dx\, dy\, dz = \frac{2\sqrt{2}}{9} \pi \left(\sqrt{2} - 1\right). \ \blacksquare$$

Esercizi

Si calcolino i seguenti integrali:

145. $\displaystyle\int_E x^2 \, dx\, dy\, dz$ **146.** $\displaystyle\int_E y^2 z \, dx\, dy\, dz,$

dove E è l'intersezione della palla di centro O e raggio 1 con il cono

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \ge 0,\ 3(x^2 + y^2) \le z^2\}.$$

147. $\displaystyle\int_G e^z \, dx\, dy\, dz$ **148.** $\displaystyle\int_G z \ln z \, dx\, dy\, dz,$

dove G è l'intersezione della palla unitaria con il cono

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 3z^2\}.$$

Sempre in tre dimensioni, risultano talvolta utili le coordinate cilindriche, che consistono nell'introdurre coordinate polari bidimensionali nel piano xy, lasciando inalterata la variabile z. In formule:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \\ z = z, \end{cases}$$

e dunque

$$\det J = \varrho.$$

Si ha allora

$$\int_E f(x, y, z) \, dx\, dy\, dz = \int_G f(\varrho \cos \vartheta,\ \varrho \sin \vartheta,\ z) \, \varrho \, d\varrho\, d\vartheta\, dz,$$

dove G è il trasformato di E nelle variabili (ϱ, ϑ, z).

allora si può eseguire subito l'integrazione rispetto a ϱ, e si trova

$$\mathrm{m}(S) = \pi \int_a^b [g^2(z) - f^2(z)]\,\mathrm{d}z.$$

Esempio 6.10

Si calcoli il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (1 - z)^2 \le x^2 + y^2 \le 1 - z\}.$$

Il solido è ottenuto ruotando attorno all'asse z la figura

$$G = \left\{(x, z) : 1 - z \le x \le \sqrt{1 - z},\ 0 \le z \le 1\right\}.$$

Si ha allora

$$\mathrm{m}(S) = \pi \int_0^1 [1 - z - (1 - z)^2]\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{6}\cdot \blacksquare$$

Per quanto riguarda il baricentro dei solidi di rotazione, è evidente che, nel caso di una rotazione completa, esso si troverà sull'asse z. Sarà allora sufficiente calcolare la quantità $\overline{z}$, o se si vuole la sua altezza. Risulta

$$\overline{z} = \frac{1}{\mathrm{m}(E)} \int_E z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{\mathrm{m}(E)} \int_a^b z[g^2(z) - f^2(z)]\,\mathrm{d}z.$$

Esempio 6.11

L'altezza del baricentro del solido S dell'esempio precedente è data da

$$6 \int_0^1 z[1 - z - (1 - z)^2]\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\cdot \blacksquare$$

Le coordinate polari, e ancor più quelle cilindriche, sono utili per il calcolo del momento d'inerzia di un solido rispetto a un asse. Ricordiamo che si definisce *momento d'inerzia* del solido E rispetto a una retta r la quantità

$$I_r = \int_E \mathrm{dist}(\mathbf{x}, r)^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

In particolare, i momenti d'inerzia rispetto ai tre assi x, y e z sono dati rispettivamente da

$$I_x = \int_E (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$I_y = \int_E (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$I_z = \int_E (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Se poi E è un solido di rotazione, ottenuto ruotando attorno all'asse z la figura $F = \{(x, z) : a \le z \le b,\ f(z) \le x \le g(z)\}$, si ha

$$I_z = \int_a^b \mathrm{d}z \int_{f(z)}^{g(z)} \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{2} \int_a^b [g^4(z) - f^4(z)]\,\mathrm{d}z.$$

Esempio 6.12

Il momento d'inerzia rispetto all'asse z del solido S degli esempi precedenti è

$$I_z = \frac{\pi}{2} \int_0^1 [(1 - z)^2 - (1 - z)^4]\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{15}\cdot \blacksquare$$

Esercizi

Si calcolino i seguenti integrali

149. $\displaystyle\int_E x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ **150.** $\displaystyle\int_E (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

151. $\displaystyle\int_E (x^2 - z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ **152.** $\displaystyle\int_E y^2 \ln z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

con

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z > 0,\ x^2 + y^2 + 1 \le z^2 \le 4\}.$$

153. $\displaystyle\int_E x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ **154.** $\displaystyle\int_E z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

155. $\displaystyle\int_E e^{x^2+y^2} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ **156.** $\displaystyle\int_E x^2 \sin\frac{\pi z}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

157. $\displaystyle\int_E y^2 \cos\frac{\pi z}{2}\,dx\,dy\,dz$ **158.** $\displaystyle\int_E \frac{|x|}{1+\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$

dove $E = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le 1\}$.

Si calcolino il volume, l'altezza del baricentro e il momento d'inerzia rispetto all'asse z dei solidi ottenuti facendo ruotare attorno all'asse z le seguenti figure:

159. $G = \left\{(x,z) : 0 \le x \le \ln(z+\sqrt{z^2-1}),\ 1 \le z \le a\right\}$

160. $G = \left\{(x,z) : 0 \le x \le \frac{e^z+e^{-z}}{2},\ 0 \le z \le a\right\}$

161. $G = \left\{(x,z) : \sqrt{z-1} \le x \le \sqrt{4-z},\ 1 \le z \le 2\right\}$

162. $G = \left\{(x,z) : 0 \le x \le \left(a^{2/3}-z^{2/3}\right)^{3/2},\ 0 \le z \le a\right\}$

163. $G = \left\{(x,z) : 1 \le a \le z \le b,\ 0 \le x \le \sqrt{z^2-1}\right\}$.

164. Si calcoli il volume del solido delimitato dalle superfici $z = x^2+y^2$ e $z = \sqrt{3-2(x^2+y^2)}$.

165. Si determini il volume dell'intersezione del cilindro $x^2+y^2-ax=0$ e della sfera con centro nell'origine e raggio a.

166. Si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare la cardioide, di equazione $0 \le \varrho \le a(1+\cos\vartheta)$, $0 \le \vartheta \le \pi$, attorno all'asse x.

167. Si calcoli

$$\int_V \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{z}\right) dx\,dy\,dz,$$

dove

$$V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x^2+y^2 \le z^2,\ z \ge 0\}.$$

168. Si calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse x del solido ottenuto ruotando la cicloide attorno a questo asse.

7 Derivazione sotto il segno di integrale

Ricordiamo dalle *Lezioni* (cap. 6, § 9) alcuni risultati concernenti la continuità e la differenziabilità di integrali dipendenti da un parametro.

Teorema 7.1 *Siano E un insieme misurabile di $\mathbf{R}^n$, A un aperto di $\mathbf{R}^k$, e $f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ una funzione definita in $E \times A$. Supponiamo che f sia integrabile in $\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{t} \in A$ e continua in $\mathbf{t}$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$, e che esista una funzione*

$g(\mathbf{x})$ sommabile in E e tale che $|f(\mathbf{x},\mathbf{t})| \le g(\mathbf{x})$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$ e per ogni $\mathbf{t} \in A$. Allora la funzione

$$F(\mathbf{t}) = \int_E f(\mathbf{x},\mathbf{t})\,d\mathbf{x}$$

è continua in A.

Questo teorema è una generalizzazione del teorema della convergenza dominata (*Lezioni*, cap. 6, Teorema 4.3), e si dimostra esattamente allo stesso modo.

Teorema 7.2 *Se inoltre per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$ la funzione $f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ è di classe $C^1(A)$, e se esistono k funzioni sommabili $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_k(\mathbf{x})$ tali che per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$ e per ogni $\mathbf{t} \in A$ risulti*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_i}(\mathbf{x},\mathbf{t})\right| \le g_i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

allora la funzione F è di classe $C^1(A)$, e si ha

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_i}(\mathbf{x},\mathbf{t})\,d\mathbf{x}.$$

Naturalmente, se si vuole dimostrare la continuità [o la differenziabilità] di F in un intorno di un punto $\mathbf{t}_0 \in A$, sarà sufficiente verificare le ipotesi del teorema, in particolare la diseguaglianza $|f(\mathbf{x},\mathbf{t})| \le g(\mathbf{x})$, in questo intorno. Questa osservazione è utile specialmente quando A non è limitato, o quando la funzione f tende all'infinito per $\mathbf{t}$ che si avvicina alla frontiera di A.

Una conseguenza di questo teorema ($k = n = 1$) è la formula della derivata della funzione

$$G(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx.$$

Se, oltre alle ipotesi precedenti, si suppone anche che le funzioni $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ siano derivabili in $A = (a,b)$, si ha

$$G'(t) = f(\beta(t),t)\,\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\,\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Calcolare i seguenti integrali:

177. $\int_D \cos\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$ **178.** $\int_D \frac{x^2y}{1+xy}\,dx\,dy$

179. $\int_D x\ln(1+y)\,dx\,dy$

nei quali D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$.

180. $\int_P \frac{y}{1+x}\,dx\,dy\,dz$ **181.** $\int_P \frac{dx\,dy\,dz}{1+x+y+z}$

dove P è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

182. $\int_E e^{xy}\ln^3 x\,dx\,dy$ **183.** $\int_E (x+y)\,dx\,dy$

dove E è il dominio limitato dalle rette $x=1$ e $x=e^3$ e dalle curve $y=\frac{1}{x}$ e $y=\frac{\ln x}{x}$.

184. $\int_T [x\sin(x+y)-2y\cos(x+y)]\,dx\,dy$ **185.** $\int_T x^2e^y\,dx\,dy$

in cui T è il quadrato di vertici $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ e $(-1,0)$.

186. $\int_E x^2\,dx\,dy$ **187.** $\int_E y\arccos x\,dx\,dy$

dove $E=\{(x,y): x^2+y^2\le 1,\ y\ge x^2-1\}$.

188. $\int_E y\cos(x+z)\,dx\,dy\,dz$ **189.** $\int_E \frac{xy}{1+y^2}\,dx\,dy\,dz$

dove E è l'insieme caratterizzato dalle diseguaglianze $0\le z\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\sqrt{x}$, $z\le x+z\le\frac{\pi}{2}$.

190. $\int_K \sin y\,dx\,dy\,dz$ **191.** $\int_K x^2\,dx\,dy\,dz$ **192.** $\int_K (z^2-y^2)\,dx\,dy\,dz$

in cui K è il cono con vertice $(0,1,0)$ e base l'ellisse $x^2+\frac{z^2}{9}\le 1$, contenuta nel piano $y=0$.

193. $\int_D xy\,dx\,dy$ **194.** $\int_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$ **195.** $\int_D (x+y)\,dx\,dy$

con $D=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ 1\le x+2y\le 3,\ x^2-4y^2\ge 1\}$.

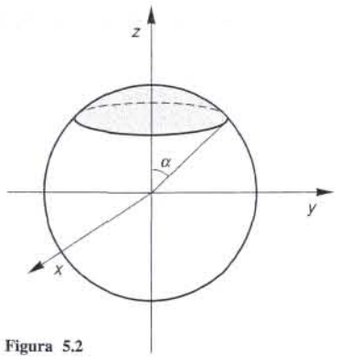

Figura 5.2

196. $\int_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ **197.** $\int_E \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$ **198.** $\int_E \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+2z^2}$

dove E è la porzione della palla unitaria che sta al di sopra del piano orizzontale $z=\cos\alpha$ (fig. 5.2).

199. $\int_E x\,dx\,dy$ **200.** $\int_E (x-y)\,dx\,dy$ **201.** $\int_E (xy-x)\,dx\,dy$ **202.** $\int_E \frac{x\,dx\,dy}{1+xy}$

dove

$$E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ xy\le 1\}.$$

203. Provare che ogni insieme misurabile $E\subset\mathbf{R}^n$ si può scrivere come l'unione di un'infinità numerabile di compatti e di un insieme di misura nulla.

204. Si dice che un insieme E ha *frontiera continua*, se per ogni punto di ∂E esiste un intorno U tale che $\partial E\cap U$ è grafico di una funzione continua. Dimostrare che ogni insieme E con frontiera ∂E continua è misurabile.

Calcolare il volume, le coordinate del baricentro, e i momenti d'inerzia rispetto ai tre assi, dei solidi

205. $D=\{(x,y,z): 4(x^2+y^2)\le z\le x^2+y^2+3\}$

206. $D=\{(x,y,z): 2x^2y^2+z^2\le 1,\ 1\le y\le 2\}$.

207. Calcolare l'area racchiusa dalla curva di equazione

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{25}.$$

7. Poiché per un cubo si ha $m(Q)=\left(\frac{\text{diam}(Q)}{\sqrt{n}}\right)^n$, se E ha misura nulla esisterà (vedi l'esercizio precedente) un'infinità numerabile di cubi Q_k con $\bigcup Q_k \supset E$ e $\Sigma(\text{diam}(Q_k))^n < n^{n/2}\epsilon$. Supponiamo viceversa che esistano degli insiemi con le proprietà richieste. Ognuno di questi insiemi E_k si può mettere in un cubo Q_k di lato uguale a $\text{diam}(E_k)$. Di conseguenza, si ha $E \subset \bigcup Q_k$, e $\Sigma m(Q_k) = \Sigma(\text{diam}(E_k))^n < \epsilon$.

8. Poiché risulta $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq M|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, per ogni $G \subset \mathbf{R}^n$ si ha $\text{diam}(f(G)) \leq M\,\text{diam}(G)$. Supponiamo ora che $m(E) = 0$. Per ogni $\epsilon > 0$ esisterà un ricoprimento numerabile E_k di E, con $\Sigma(\text{diam}(E_k))^n < \epsilon$. Gli insiemi $F_k = f(E_k)$ sono un ricoprimento numerabile di $f(E)$, e si ha $\text{diam}(F_k) \leq M\,\text{diam}(E_k)$. Ma allora $\Sigma(\text{diam}(F_k))^n \leq M^n\Sigma(\text{diam}(E_k))^n < M^n\epsilon$.

9. $F_t = \mathbf{R}$ se $t < 0$, $F_t = [0, 1]$ se $0 \leq t < 1$, $F_t = \emptyset$ se $t \geq 1$.

10. La funzione è continua in $\mathbf{R}^2$ privato dell'asse delle y, e dunque i relativi insiemi $\widetilde{F}_t$ sono aperti. D'altra parte, gli insiemi F_t differiscono dagli $\widetilde{F}_t$ per l'aggiunta di parti dell'asse delle y, che ha misura nulla, e dunque sono anch'essi misurabili.

11. Posto $\Phi_t = \{x \in A : 1/f(x) > t\}$, risulta

$$\Phi_t = \begin{cases} \{x \in A : 0 < f(x) < 1/t\} & \text{se} \quad t > 0 \\ F_0 =: \{x \in A : f(x) > 0\} & \text{se} \quad t = 0 \\ F_0 \cup \{x \in A : f(x) < 1/t\} & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

e quindi Φ_t è misurabile per ogni t.

12. Risulta $F = F_0' \cap F_0''$.

13. Se A è un aperto di $\mathbf{R}$, si ha $(u \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(u^{-1}(A))$. Poiché u è continua, $u^{-1}(A)$ è un aperto, e dunque $f^{-1}(u^{-1}(A))$ è misurabile.

14. Si ha infatti $f^- \leq \psi^-$ [ovvero $f^+ \leq \psi^+$], e dunque l'integrale di f^- [o di f^+] è finito. Se poi $|f| \leq \psi$, ambedue gli integrali sono finiti, e f è sommabile.

15. Se f è sommabile, gli integrali di f^+ e f^- sono finiti, e quindi è finito anche quello di $|f| = f^+ + f^-$. Il viceversa segue dall'esercizio precedente.

16. $\frac{\pi}{6} - \frac{7}{18}$

17. $\frac{3}{2} - \sin 1 - \cos 1$

18. $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$

19. $-\frac{3}{16}$

20. $\frac{3\pi}{32}$

21. $\frac{4}{21}$

22. $\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{14}{3}$

23. $\frac{16}{3}\ln 3 - \frac{52}{9}$

24. $\frac{\pi}{24}$

25. $\pi - 2$

26. $-\frac{29}{9} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

27. $\frac{12}{5}\ln 2 - \frac{284}{25} + \frac{16\pi}{5}$

28. $\frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e} - 2\right)$

29. 0

30. $\cos 1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 2)$

31. $\frac{2\pi}{3} - \frac{14}{9}$

32. $\frac{10}{3} - \frac{7\pi}{8}$

33. $\frac{26}{3} - \frac{3\pi}{2}$

34. $2\ln 3 - 2 - 3\pi + 8\sqrt{2}\,\text{arctg}\,\sqrt{2}$

35. $2e - 4e^{-1}$

36. $\frac{1}{3}$

37. $\frac{5}{3}\ln 2 - \frac{11}{18}$

38. $\frac{5}{36}$

39. $\frac{\pi}{16}$

40. $6\cos 1 + 10\sin 1 - \frac{23}{2}$

41. $22e - \frac{119}{2}$

42. $\frac{3}{4} + 2\ln 2 - \frac{15}{8}\ln 3$

43. $\frac{e}{2}$

44. $\ln 2 - \frac{5}{12}$

45. $\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\ln(1 + \sqrt{2})$

46. $\frac{\pi}{6} - \frac{7}{18}$

47. $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\ln(3 - 2\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3}(\text{arctg}(\sqrt{2} - 1) - \text{arctg}(\sqrt{2} + 1))$

48. $\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{9}$

49. $\frac{4}{\pi^2}$

50. $\frac{5}{6}$

51. $\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}$

52. $-\frac{3}{2} + 3\ln 3 - 2\ln 2$

53. $2 - \frac{4}{3}\ln 2$

54. $\frac{1}{3}$

55. $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

56. $1 - \ln 2$

57. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$

58. $\ln 2$

59. $\frac{3 - e}{2}$

60. $\frac{7}{3} - \sqrt{3}$

61. $\frac{3}{2}$

62. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$

63. $\frac{9e - 3}{4}$

64. $\frac{1}{240}$

65. $\frac{347}{1890}$

66. $\frac{1}{12}$

67. $e - \frac{65}{24}$

68. $\frac{5\pi}{24} - \frac{11}{18}$

69. $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$

70. $-\frac{19}{72}$

71. $\frac{1}{24}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^5}\right)$

72. $\frac{4}{9} - \frac{5\pi}{48}$

73. $\frac{1}{2}(e-2)$

74. $\frac{3}{4}$

75. $-\frac{185}{36}$

76. $\frac{11e}{6} - \frac{7}{3}$

77. $-\frac{3}{8} + \cos 1$

78. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg} 2 - \frac{11}{24}\ln 5 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln 2$

79. $\frac{26}{3}$

80. $\frac{27}{4}\ln 3 - \frac{91}{18}$

81. $\frac{a^6}{48}$. D è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(a,0,a)$ e (a,a,a).

82. Gli insiemi Φ_t sono misurabili, dato che $\Phi_t = F_t' \cap F_t'''$. Poiché tutti i Φ_t sono disgiunti, al più un numero finito di essi ha misura maggiore di 1, in quanto la misura della loro unione, che è la somma delle loro misure, non può superare $\mathrm{m}(E)$. Analogamente sono in numero finito quelli con misura compresa tra $\frac{1}{2}$ e 1, quelli tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, e così via. Ne segue che gli insiemi Φ_t con misura maggiore di zero sono al più un'infinità numerabile.

83. Per ogni intero n, i valori di t per i quali la misura di $\Phi_t \cap I_n$ è diversa da zero formano al più un insieme T_n numerabile. L'unione di tutti questi T_n è ancora numerabile.

84. Si ha infatti $\mathrm{m}(F_t''') = \mathrm{m}(F_t)$ per ogni t, tranne al più un insieme numerabile, e dunque per quasi ogni t.

85. Si ha

$$\{\mathbf{x} \in E : |u(\mathbf{x})|^p > s\} = \{\mathbf{x} \in E : |u(\mathbf{x})| > s^{1/p}\} = U_{s^{1/p}}$$

e quindi, usando la [4.1],

$$\int_E |u|^p \, d\mathbf{x} = \int_0^\infty \mathrm{m}(U_{s^{1/p}})\, ds.$$

La tesi segue dal cambiamento di variabile $s = t^p$.

86. $\frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{59}{30}$

87. $\frac{28}{15}\sqrt{2} - \frac{13}{5}$

88. $\frac{20}{9}(1-\sqrt{2}) + \frac{4}{3}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

89. $\frac{8}{5}(3\sqrt{2} - 4)$

90. $-\frac{25}{6}\ln 2 + \frac{17}{6}\ln 3 - \frac{1}{6}$

91. $\frac{1}{16}\left(3\operatorname{arctg} 2 - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{10}\right)$

92. $\frac{13}{108}$

93. $\frac{3}{16} + \frac{37}{16}\ln 2 - \frac{27}{16}\ln 3$

94. $2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

95. $\frac{1}{2}$

96. $(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}\ln 3 - (\sqrt{3}-1)\sqrt{2}\ln 2$

97. $\frac{1}{8}\ln 2(6\ln 3 - 3\ln 2 - 2)$

98. $\frac{\sin 1}{2}$

99. $\frac{3\pi}{4} - 3\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$

100. $\frac{14}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

101. $2\ln^2 2$

102. $\frac{2}{e}(e^2-1)(e-1)$

103. $\frac{1}{2}e^{-2}(e^4-1)(e^2-1) + 2e(2e-3) + 2e^{-1}$

104. 0

105. $9\ln 3 - 4\ln 2 - 6$

106. $\ln 2 \ln\frac{3}{2}$

107. $\frac{3}{8}e^2(5e-2)$

108. $\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{19}{18}$

109. $-\frac{2}{\pi^2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

110. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+b}{1+a}$

111. $\frac{1}{45}$

112. $\left(\frac{3}{14}, \frac{3}{14}, \frac{9}{112}\right)$

113. Per $t > 1$ si ha $\int_{B_t - B} |\mathbf{x}|^\alpha \, d\mathbf{x} = \frac{\pi}{\alpha+2}(t^{\alpha+2} - 1)$. Passando al limite per $t \to +\infty$, si ottiene la tesi. Il valore dell'integrale, per $\alpha < -2$, è $\frac{-\pi}{\alpha+2}$.

114. $\alpha > -3$; $\frac{4\pi}{\alpha+3}$

115. $\alpha < -3$; $\frac{-4\pi}{\alpha+3}$

116. $\alpha > -p-1$; $\frac{2}{\alpha+p+1}$

117. $\alpha > -1-2p$; $\frac{\pi}{\alpha+2p+1}$

118. $\alpha > 0$ se $p \le 1$; $\alpha > -1 + \frac{1}{p}$ se $p > 1$

119. $\frac{1}{e}$

120. $\frac{1}{6}\ln\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\ln 3 - \frac{4}{9}$

121. $\frac{21\pi}{8}$

122. $\frac{3\pi}{2}$

123. $3\pi(\sqrt{2}-1)$

124. $2\sqrt{2}\pi \ln 2$

125. $\dfrac{\ln 6}{5}$

126. $\dfrac{7}{3}$

127. $e^2 - \dfrac{3}{2}$

128. $\dfrac{9}{2}\ln 3 - \dfrac{2}{3}\ln 2 - \dfrac{115}{36}$

129. $\dfrac{3\pi}{8}$

130. $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$

131. $\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi$

132. $\dfrac{\pi}{16}$

133. $\dfrac{\pi}{2}(1 - \ln 2)$

134. $\dfrac{\pi}{2}$

135. $\mathrm{m}(E) = 1+\sqrt{2}$, $\bar{\mathbf{x}} = \dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})}\left(\dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{9\pi}{8}+\dfrac{3}{2}, \left(\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\ln 2\right)$

136. $\dfrac{\pi}{2} - 1$

137. $\dfrac{4-\pi}{4}a^4$

138. $\dfrac{4a^2}{105}$

139. π

140. $\dfrac{\pi}{4}$

141. $\dfrac{5\pi}{2}$

142. $\dfrac{3\pi}{4}$

143. $\dfrac{2\pi}{3} - \ln(2+\sqrt{3})$

144. $\dfrac{105\pi}{2}$

145. $\dfrac{\pi}{5}\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

146. $\dfrac{\pi}{384}$

147. $2\pi(2\sqrt{e}-3)$

148. $\dfrac{\pi}{64}(4\ln 2 - 9)$

149. $\dfrac{19\pi}{30}$

150. 0

151. $-\dfrac{97\pi}{30}$

152. $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{23}{15}\ln 2 - \dfrac{77}{225}\right)$

153. $\dfrac{\pi}{12}$

154. $\dfrac{\pi}{3}$

155. $\dfrac{\pi}{2}$

156. $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi^2}$

157. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}$

158. $-\dfrac{14}{9} + \dfrac{8}{3}\ln 2$

159.

$$V = \pi\left(aL^2 - 2\sqrt{a^2-1}L + 2(a-1)\right)$$

$$h = \frac{\pi}{4V}\left(2a^2L^2 + a^2 - 1 - L^2 - 2a\sqrt{a^2-1}L\right)$$

$$I_z = \pi\left[12(a-1) + \frac{a}{2}L^2(L^2+12) - 2\sqrt{a^2-1}L(L^2+6)\right]$$

$$L =: \ln(a + \sqrt{a^2-1})$$

160. $V = \dfrac{\pi}{4}(2a + \sinh 2a)$; $h = \dfrac{2a^2 + 2a\sinh 2a + 1 - \cosh 2a}{4a + 2\sinh 2a}$; $I_z = \dfrac{\pi}{64}(\sinh 4a + 8\sinh 2a + 12a)$

161. $V = 2\pi$; $h = \dfrac{17}{12}$; $I_z = 3\pi$

162. $V = \dfrac{16\pi a^3}{105}$; $h = \dfrac{21a}{128}$; $I_z = \dfrac{512\pi a^5}{15015}$

163.

$$V = \frac{\pi}{3}(b-a)(b^2 + ab + a^2 - 3)$$

$$h = \frac{3}{4}(b+a)\frac{b^2 + a^2 - 2}{b^2 + a^2 + ab - 3}$$

$$I_z = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{b^5 - a^5}{5} - 2\frac{b^3 - a^3}{3} + b - a\right\}$$

164. $\left(-\dfrac{5}{6} + \sqrt{3}\right)\pi$

165. $\dfrac{4a^3}{3}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right)$

166. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$

167. $\dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{\pi}{2}\ln 2$

168. $\dfrac{63}{8}\pi^2 a^5$

169. Si ha $F'(t) = -p\displaystyle\int_E |u(\mathbf{x}) - t|^{p-2}(u(\mathbf{x}) - t)\,d\mathbf{x}$, e $F''(t) = p(p-1)\displaystyle\int_E |u(\mathbf{x}) - t|^{p-2}\,d\mathbf{x} > 0$. In particolare, $\varphi_p(t)$ è convessa, e tende all'infinito quando $|t|$ tende all'infinito. Ne segue che F ha un unico minimo.

170. Risulta $\dfrac{t^2 x\sqrt{|x|}}{1 + t^2x^2} \le \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$, che è sommabile in $(-1,4)$. Passando al limite, si ottiene $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2$.

171. 2

172. Risulta $2\sqrt{tx} \le t + x$, e dunque la funzione integranda si maggiora con $3/2$. Passando al limite, si ottiene il valore 1.

173. 3

174. Si ha $F' = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} = \frac{\pi}{2(1+y)}$. Di qui, osservando che $F(0) = 0$, si trova $F(y) = \frac{\pi}{2}\ln(1+y)$.

175. Risulta $F(0) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Inoltre,

$$F'(x) = -\int_1^{+\infty} \left(x + \frac{1}{t}\right)\frac{e^{-tx}}{t}\,dt, \quad F''(x) = \int_1^{+\infty} xe^{-tx}\,dx = e^{-x}.$$

Da quest'ultima relazione segue che $F(x) = e^{-x} + Ax + B$, e dunque $F(x) = e^{-x}$.

176. Per $\tau > 0$, poniamo $t = 1/\sqrt{\tau}$. Essendo per definizione $f_t(\mathbf{x}) = \min\{f(\mathbf{x}), t\}$, si ha

$$\int_E f_t\,d\mathbf{x} \le \int_{E-I_\tau} f\,d\mathbf{x} + t\mathrm{m}(I_\tau \cap E).$$

D'altra parte $f(\mathbf{x})$ è limitata in $E - I_\tau$, e dunque esisterà un τ, che potremo sempre supporre maggiore di t, tale che $f(\mathbf{x}) \le \tau$ in $E - I_\tau$. Ne segue che

$$\int_{E-I_\tau} f\,d\mathbf{x} = \int_{E-I_\tau} f_\tau\,d\mathbf{x} \le \int_E f_\tau\,d\mathbf{x},$$

e confrontando con la precedente:

$$\int_E f_t\,d\mathbf{x} - t\mathrm{m}(I_\tau) \le \int_{E-I_\tau} f\,d\mathbf{x} \le \int_E f_\tau\,d\mathbf{x}.$$

La tesi segue facendo tendere τ a zero, e osservando che, per come si è scelto t, si ha $t\mathrm{m}(I_\tau) \to 0$.

177. $\frac{\sin 1}{2}$

178. $\frac{13}{6} + \sqrt{5}\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

179. $\frac{4}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$

180. $\frac{4}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$

181. $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$

182. $12e^3 - 6 - \frac{63}{4}e$

183. $e^3 - 8e^{-3} - \frac{5}{2} + 2e + 4e^{-1}$

184. $\sin 1 - \cos 1$

185. $4e + \frac{4}{e} - 12$

186. $\frac{4}{15} + \frac{\pi}{8}$

187. $\frac{\pi}{15}$

188. $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$

189. $\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\frac{\pi}{2} - 2\right\}\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{5}{72}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi}{12}$

190. $3\pi(2\cos 1 - 1)$

191. $\frac{3\pi}{20}$

192. $\frac{5\pi}{4}$

193. $\frac{8}{27}$

194. $\frac{19}{8}\ln 3 - \frac{5}{4}\ln 5 - \frac{1}{2}$

195. $\frac{3}{2}$

196. $\frac{\pi}{30}(8 - 15\cos\alpha + 10\cos^3\alpha - 3\cos^5\alpha)$

197. $2\pi(1 - \cos\alpha + \cos\alpha\ln\cos\alpha)$

198. $2\pi\left(\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}(\cos\alpha)\right) - \pi\cos\alpha\ln\left(1 + \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{2}\right)$

199. $\frac{7}{4}$

200. 0

201. $\ln 2 - \frac{3}{2}$

202. $\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$

203. Per ogni $\epsilon > 0$ esistono un aperto $A \supset E$ e un compatto $K \subset E$, con $\mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(K) < \epsilon$. Prendiamo $\epsilon = 1/s$, $s = 1, 2, \ldots$, e siano A_s e K_s l'aperto e il compatto corrispondenti. Poniamo $F = \bigcup K_s$ e $G = \bigcap A_s$. Si ha $F \subset E \subset G$ e $\mathrm{m}(G) - \mathrm{m}(F) = 0$, cosicché a maggior ragione $\mathrm{m}(E) - \mathrm{m}(F) = 0$. Ne segue che E è l'unione dei compatti K_s e dell'insieme $E - F$ di misura nulla. Si osservi che abbiamo anche dimostrato che E è l'intersezione di un'infinità numerabile di aperti A_s, meno un insieme $G - E$ di misura nulla.

204. Sia $\mathbf{x} \in \partial E$, e sia U un intorno di $\mathbf{x}$ tale che $\partial E \cap U$ è grafico di una funzione continua. Per l'esercizio 2, $\partial E \cap U$ ha misura nulla. Poiché ∂E si può ricoprire con un'infinità numerabile di tali intorni (dimostrarlo), si può concludere che ∂E ha misura nulla, e dunque, per l'esercizio 4, E è misurabile.

205. $V = \frac{3\pi}{2}$; $\bar{\mathbf{x}} = \left(0, 0, \frac{7}{3}\right)$; $I_x = I_y = \frac{19\pi}{2}$, $I_z = \frac{\pi}{2}$

206. $V = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln 2$, $\bar{\mathbf{x}} = \left(0, \frac{1}{\ln 2}, 0\right)$, $I_x = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(6 + \ln 2)$, $I_y = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(\frac{3}{16} + \ln 2\right)$, $I_z = \frac{99\pi}{64\sqrt{2}}$

207. $\frac{39\pi}{25}$ **208.** $\alpha > -2$

209. Per ogni aperto A di $\mathbf{R}$, $u^{-1}(A)$ è un insieme misurabile. Per l'esercizio 203, quest'ultimo insieme è unione di una famiglia numerabile di compatti K_s, e di un insieme T di misura nulla. Poiché f^{-1} è continua, segue dal teorema di Weierstrass che $f^{-1}(K_s)$ è un compatto per ogni s. Inoltre, per l'esercizio 8, $f^{-1}(T)$ ha misura nulla. In conclusione, $(u \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(u^{-1}(A))$ è unione di un'infinità numerabile di compatti e di un insieme di misura nulla, e dunque è misurabile.