Università degli Studi di Padova
Laurea triennale in Ingegneria Meccanica
Esame di Analisi Matematica 1 del 27 gennaio 2009

Tema 1

NOTA: svolgere gli esercizi indicati con **A** per sostenere l'esame di *Analisi Matematica 1*, svolgere invece gli esercizi indicati con **M** per sostenere l'esame di *Matematica 1*.

GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE

(1AM) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(1 - \left|\frac{x}{2-3x}\right|\right).$$

(a) Determinarne il dominio, il segno, i limiti agli estremi del dominio, e gli eventuali asintoti.

(b) Determinarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo, relativi ed assoluti, e punti angolosi.

(c) Determinarne gli intervalli di concavità e convessità e gli eventuali punti di flesso.

(d) Disegnarne un grafico qualitativo.

(2AM) Determinare per quali $\alpha > 0$ è convergente la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3\alpha n - \sqrt{n^2+1}}{(n+3)^{2\alpha}}\sin\left(\frac{1}{1+n}\right)\right]$$

(3A) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x\left(\log^2|x| + y^2\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) **(facoltativo)** Dimostrarne la continuità in tutti i punti del piano.

(b) Determinarne l'insieme dei punti di differenziabilità.

(c) Determinarne i punti di estremo relativo nella regione $x \neq 0$.

(d) Scriverne l'equazione del piano tangente al punto $(1, 0, 0)$.

(3M) Calcolare il seguente integrale generalizzato:

$$\int_{-\infty}^{-\log 2}\frac{e^x\left(2e^{2x}-3\right)}{e^{3x}-3e^x+2}\,dx.$$

Università degli Studi di Padova
Laurea triennale in Ingegneria Meccanica
Esame di Analisi Matematica 1 del 27 gennaio 2009

Tema 2

NOTA: svolgere gli esercizi indicati con **A** per sostenere l'esame di *Analisi Matematica 1*, svolgere invece gli esercizi indicati con **M** per sostenere l'esame di *Matematica 1*.

GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE

(1AM) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(1 - \left|\frac{x}{3-2x}\right|\right).$$

(a) Determinarne il dominio, il segno, i limiti agli estremi del dominio, e gli eventuali asintoti.

(b) Determinarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo, relativi ed assoluti, e punti angolosi.

(c) Determinarne gli intervalli di concavità e convessità e gli eventuali punti di flesso.

(d) Disegnarne un grafico qualitativo.

(2AM) Determinare per quali $\alpha > 0$ è convergente la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(e^{\frac{1}{1+n}} - 1\right)\frac{4\alpha n - \sqrt{n^2+1}}{(n+2)^{3\alpha}}\right]$$

(3A) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + \log^2|y|\right)y, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

(a) Determinarne l'insieme dei punti di continuità.

(b) Determinarne l'insieme dei punti di differenziabilità.

(c) Calcolarne i punti di estremo relativo.

(d) Scriverne l'equazione del piano tangente al punto $(0,1,0)$.

(3M) Calcolare il seguente integrale generalizzato:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x\left(3e^{2x} + 4e^x - 2\right)}{e^{3x} - 3e^x - 2}\,dx.$$

Università degli Studi di Padova
Laurea triennale in Ingegneria Meccanica
Esame di Analisi Matematica 1 del 27 gennaio 2009

Tema 1

SCHEMA DI SOLUZIONE

(Si prega di comunicare eventuali errori a dagnolo@math.unipd.it)

Attenzione: questo è solo un breve schema di soluzione. In sede d'esame è richiesto che i risultati siano opportunamente giustificati.

(1AM) (a) Il dominio di definizione si ottiene risolvendo $|x/(2-3x)| < 1$, che porge $x \notin [1/2, 1]$. Risulta

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \log(2/3), \quad \lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = -\infty = \lim_{x \longrightarrow 1/2} f(x).$$

La funzione non è mai positiva. La retta $y = \log(2/3)$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, e le rette $x = 1/2$ ed $x = 1$ sono asintoti verticali.
(b) Notando che

$$f(x) = \begin{cases} \log 2 + \log\left(\frac{2x-1}{3x-2}\right) & x \in [0, 1/2), \\ \log\left(2\frac{x-1}{3x-2}\right) & x < 0, \ x > 1, \end{cases}$$

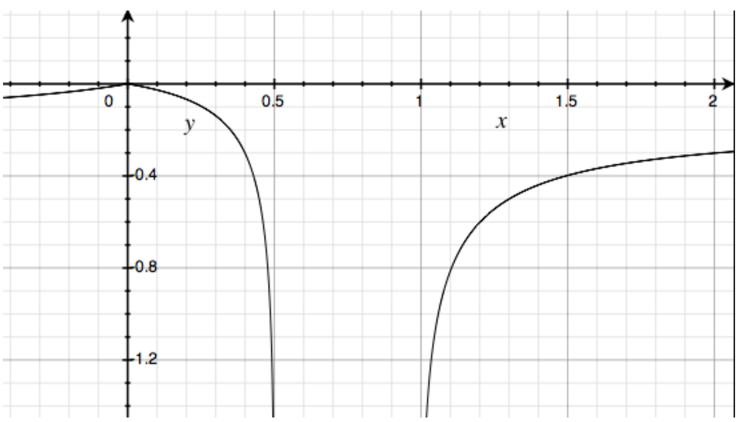
si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(2x-1)(3x-2)} & x \in (0, 1/2), \\ \frac{1}{(x-1)(3x-2)} & x < 0, \ x > 1. \end{cases}$$

Il punto $x = 0$ è angoloso, avendosi $\lim_{x \longrightarrow 0\pm} f'(x) = \mp 1/2$. La funzione cresce negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$ e decresce in $(0, 1/2)$. Si ha quindi un massimo (assoluto) per $x = 0$, e non vi sono altri punti di estremo relativo.
(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{12x-7}{(2x-1)^2(3x-2)^2} & x \in (0, 1/2), \\ \frac{5-6x}{(x-1)^2(3x-2)^2} & x < 0, \ x > 1. \end{cases}$$

La funzione è concava negli intervalli $(0, 1/2)$ e $(1, +\infty)$ e convessa in $(-\infty, 0)$. Non si hanno punti di flesso.
(d) Abbozzo del grafico



(2AM) Per $n \to +\infty$ risulta

$$\sin\left(\frac{1}{1+n}\right) \sim \frac{1}{1+n} \sim \frac{1}{n}, \qquad (n+3)^{2\alpha} \sim n^{2\alpha}.$$

Inoltre, razionalizzando si ottiene

$$3\alpha n - \sqrt{n^2+1} = \frac{(9\alpha^2-1)n^2-1}{3\alpha n + \sqrt{n^2+1}} \sim \frac{(9\alpha^2-1)n^2-1}{(3\alpha+1)n} \sim \begin{cases} (3\alpha-1)n & \alpha \neq 1/3, \\ -1/2n & \alpha = 1/3. \end{cases}.$$

Posto

$$a_n = \left[\frac{2\alpha n - \sqrt{n^2+1}}{(n+3)^{3\alpha}} \sin\left(\frac{1}{1+n}\right)\right],$$

per $n \to +\infty$ risulta

$$a_n \dot{\sim} \begin{cases} \frac{1}{n^{2\alpha}} & \alpha \neq 1/3, \\ \frac{1}{n^{8/3}} & \alpha = 1/3. \end{cases}$$

Quindi la serie è di segno definitivamente costante e converge se e solo se $2\alpha > 1$ o $\alpha = 1/3$, ossia per $\alpha \in (1/2, +\infty) \cup \{1/3\}$.

(3A) (a) La funzione è continua fuori dall'asse, mentre per $(x,y) \to (0, y_\circ)$ risulta $|f(x,y)| \leq x(\log^2|x| + y_\circ^2 + 1) \to 0$. Quindi è continua in tutto il piano.
(b) La funzione è differenziabile fuori dall'asse, ma $\partial_x f(x,y)$ non esiste lungo l'asse (il rapporto incrementale diverge). Quindi è differenziabile in $x \neq 0$.
(c) (La funzione cambia segno lungo l'asse, quindi lì non vi sono estremi.) Per $x \neq 0$ i punti stazionari si hanno risolvendo il sistema $\log^2|x| + 2\log|x| + y^2 = 0 = 2xy$, e sono quindi $(\pm 1, 0)$ ed $(\pm e^{-2}, 0)$. L'Hessiano vale

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (\log|x|+1)/x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$$

Ne segue che $(\pm e^{-2}, 0)$ sono punti di sella, mentre si ha un massimo relativo in $(1,0)$ ed un minimo relativo in $(-1,0)$.
(d) Avendosi $\operatorname{grad} f(0,1) = (0,0)$, l'equazione è $z = 0$

(3M) Posto $t = e^x$, il denominatore si fattorizza in $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$, che si annulla solo per $x = 0$. Quindi la funzione integranda è continua nell'intervallo di integrazione.
L'integrale indefinito si riduce a

$$\int \frac{2t^2-3}{t^3-3t+2} dt,$$

ed il metodo dei fratti semplici porge

$$\frac{2t^2-3}{t^3-3t+2} = -\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{7}{9}\frac{1}{x+2}.$$

Quindi
$$\int \frac{e^x(2e^{2x}-3)}{e^{3x}-3e^x+2}dx = \frac{1}{3}\frac{1}{e^x-1} + \frac{7}{9}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+2}\right| + C,$$
e
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x(2e^{2x}-3)}{e^{3x}-3e^x+2}dx = \frac{2}{9} + \frac{7}{9}\log 5 + \frac{1}{3} + \frac{7}{9}\log 2 = \frac{5}{9} + \frac{7}{9}\log 10.$$

Università degli Studi di Padova
Laurea triennale in Ingegneria Meccanica
Esame di Analisi Matematica 1 del 27 gennaio 2009

Tema 2

SCHEMA DI SOLUZIONE

(Si prega di comunicare eventuali errori a `dagnolo@math.unipd.it`)

Attenzione: questo è solo un breve schema di soluzione. In sede d'esame è richiesto che i risultati siano opportunamente giustificati.

(1AM) (a) Il dominio di definizione si ottiene risolvendo $|x/(3-2x)| < 1$, che porge $x \notin [1, 3]$. Risulta

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = -\log 2, \quad \lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = -\infty = \lim_{x\longrightarrow 3} f(x).$$

La funzione non è mai positiva. La retta $y = -\log 2$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, e le rette $x = 1/2$ ed $x = 1$ sono asintoti verticali.
(b) Notando che

$$f(x) = \begin{cases} \log 3 + \log\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) & x \in [0, 1), \\ \log\left(\frac{x-3}{2x-3}\right) & x < 0,\ x > 3, \end{cases}$$

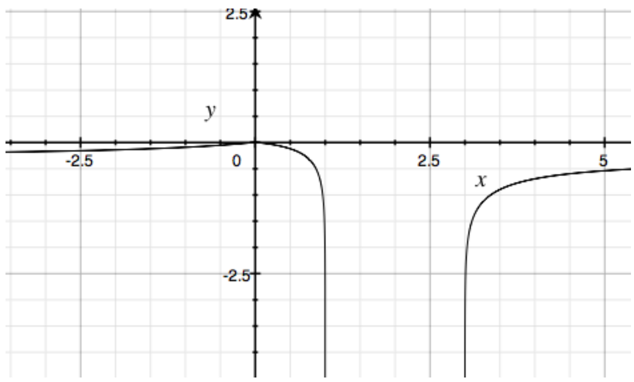
si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)(2x-3)} & x \in (0, 1), \\ \frac{3}{(x-3)(2x-3)} & x < 0,\ x > 3. \end{cases}$$

Il punto $x = 0$ è angoloso, avendosi $\lim_{x\longrightarrow 0\pm} f'(x) = \mp 1/3$. La funzione cresce negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(3, +\infty)$ e decresce in $(0, 1)$. Si ha quindi un massimo (assoluto) per $x = 0$, e non vi sono altri punti di estremo relativo.
(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4x-5}{(x-1)^2(2x-3)^2} & x \in (0, 1), \\ \frac{9-4x}{(x-3)^2(2x-3)^2} & x < 0,\ x > 3. \end{cases}$$

La funzione è concava negli intervalli $(0, 1)$ e $(3, +\infty)$ e convessa in $(-\infty, 0)$. Non si hanno punti di flesso.
(d) Abbozzo del grafico



(2AM) Risulta
$$e^{\frac{1}{1+n}}-1\sim\frac{1}{1+n}\sim\frac{1}{n},\qquad (n+2)^{3\alpha}\sim n^{3\alpha}.$$
Inoltre, razionalizzando si ottiene
$$4\alpha n-\sqrt{n^2+1}=\frac{(16\alpha^2-1)n^2-1}{4\alpha n+\sqrt{n^2+1}}\sim\frac{(16\alpha^2-1)n^2-1}{(4\alpha+1)n}\sim\begin{cases}(4\alpha-1)n & \alpha\neq 1/4,\\ -1/2n & \alpha=1/4.\end{cases}.$$
Posto
$$a_n=\left[\left(e^{\frac{1}{1+n}}-1\right)\frac{4\alpha n-\sqrt{n^2+1}}{(n+2)^{3\alpha}}\right],$$
per $n\to+\infty$ risulta
$$a_n\stackrel{\cdot}{\sim}\begin{cases}\frac{1}{n^{3\alpha}} & \alpha\neq 1/4,\\ \frac{1}{n^{11/4}} & \alpha=1/4.\end{cases}$$
Quindi la serie è di segno definitivamente costante e converge se e solo se $3\alpha>1$ o $\alpha=1/4$, ossia per $\alpha\in(1/3,+\infty)\cup\{1/4\}$.

(3A) (a) La funzione è continua fuori dall'asse, mentre per $(x,y)\to(x_\circ,0)$ risulta $|f(x,y)|\leq(x_\circ^2+\log^2|y|+1)y\to 0$. Quindi è continua in tutto il piano.
(b) La funzione è differenziabile fuori dall'asse, ma $\partial_y f(x,y)$ non esite lungo l'asse (il rapporto incrementale diverge). Quindi è differenziabile in $y\neq 0$.
(c) La funzione cambia segno lungo l'asse, quindi lì non vi sono estremi. I punti stazionari si hanno risolvendo il sistema $x^2+\log^2|y|+2\log|y|=0=2xy$, e sono quindi $(0,\pm 1)$ e $(0,\pm e^{-2})$. L'Hessiano vale
$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2y & 0\\ 0 & (\log|y|+1)/y\end{pmatrix}$$
Ne segue che $(0,\pm e^{-2})$ sono punti di sella, mentre si ha un massimo relativo in $(0,1)$ ed un minimo relativo in $(0,-1)$.
(d) Avendosi grad $f(1,0)=(0,0)$, l'equazione è $z=0$

(3M) Posto $t=e^x$, il denominatore si fattorizza in $t^3-3t-2=(t+1)^2(t-2)$, che si annulla solo per $x=\log 2$. Quindi la funzione integranda è continua nell'intervallo di integrazione.
L'integrale indefinito si riduce a
$$\int\frac{3t^2+4t-2}{t^3-3t-2}dt,$$
ed il metodo dei fratti semplici porge
$$\frac{2t^2-3}{t^3-3t+2}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-1}+2\frac{1}{x-2}.$$
Quindi
$$\int\frac{e^x(3e^{2x}+4e^x-2)}{e^{3x}-3e^x-2}dx=-\frac{1}{e^x+1}+\log|(e^x-2)^2(e^x+1)|+C$$
e
$$\int_{-\infty}^0\frac{e^x(3e^{2x}+4e^x-2)}{e^{3x}-3e^x-2}dx=-\frac{1}{2}+\log 2+1-\log 8=\frac{1}{2}-2\log 2.$$