Esercizi Matematica 2 per Matematici Dicembre 2005 - VIII settimana

1. Risolvere il sistema lineare $Ax = b$ di matrice completa $\begin{pmatrix} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 15 & 35 & 26 & 69 & 40 \\ 25 & 57 & 42 & 108 & 65 \\ 30 & 69 & 51 & 133 & 95 \end{pmatrix}$ con $x \in \mathbf{R}^4$ (rispettivamente con $x \in \mathbf{F}_p^4$ per p primo).

2. Al variare di $\ell \in \mathbf{R}$ (rispettivamente in $\mathbf{F}_p$ con p primo) risolvere l'equazione $XA_\ell = 0$, dove $A_\ell = \begin{pmatrix} \ell & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$. Dimostrare che l'insieme delle matrici che commutano con A (cioè l'insieme delle matrici $B \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ tali che $AB = BA$) è un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ e calcolarne la dimensione. Per ogni intero n calcolare A^n. Determinare, per ogni $n \in \mathbf{Z}$, la dimensione dello spazio delle matrici di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ che commutano con A^n.

4. Siano dato i sistema lineare

$$\Sigma_a := \begin{cases} aX + Y = -1 \\ 2X + (a+1)Y = 2 \\ (2-a^2)X + Y = a + 2 \end{cases} \qquad \Theta_a := \begin{cases} (a^2 - a + 1)X - 2Y = 1 \\ X - 2Y + (a^2 - a)Z = a \end{cases}$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

(i) Dire per quali a Σ_a (risp. Θ_a) ha soluzioni in $\mathbf{R}^2$ (risp. in $\mathbf{R}^3$).

(ii) Per gli a per cui Σ_a (risp. Θ_a) ammetta soluzioni determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.

(iii) Rispondere ai quesiti (i) e (ii) se $a \in \mathbf{F}_p$ con p primo.

5. Sia dato il sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} X - Y + (k-1)Z = 0 \\ X - Y + 2Z = 0 \\ 2X + kY = 1 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$.

(i) Dire per quali k il sitema ha soluzioni in $\mathbf{R}^3$.

(ii) Per gli k per cui il Σ_k ammetta soluzioni determinare lo spazio delle soluzioni e dire se esse definiscono un punto od una retta od un piano di $\mathbf{R}^3$.

(iii) Rispondere ai quesiti (i) e (ii) se $a \in \mathbf{F}_p$ con p primo.

(iv) Dire se l' unione delle soluzioni di Σ_k al variare di $k \in \mathbf{R}$ coincide con le soluzioni di un opportuno sistema lineare.

6. Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ la terza colonna delle seguenti matrici è combinazione lineare delle altre tre e in caso affermativo dire se tale combinazione è unica

(i) $\begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ k & 0 & -k & -k \\ -k & 2 & 1 & 3k \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ k+1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Si considerino i due seguenti sistemi lineari

$$\Sigma_k := \begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 = 1 \\ kX_1 - X_2 = 2 \end{cases}, \qquad \mathcal{L}_k := \begin{cases} X_1 - 2X_2 + kX_3 = 1 \\ (k-1)X_1 - 2X_2 + 2X_3 = 1. \end{cases}$$

(i) Descrivere le sottovarietà lineari di $\mathbf{R}^3$ definite dalle soluzioni di Σ_k e $\mathcal{L}_k$ al variare di $k \in \mathbf{R}$;
(ii) Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ l' intersezione $\Sigma_k \cap \mathcal{L}_k$ consiste di un solo punto. Determinarlo.
(iii) Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ l' intersezione $\Sigma_k \cap \mathcal{L}_k$ è vuoto.
(iv) Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ l' intersezione $\Sigma_k \cap \mathcal{L}_k$ è una retta. Determinare tale retta.

8. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_\lambda := \begin{cases} (\lambda - 1)X_1 + 2X_2 + 3X_4 = 0 \\ \lambda X_2 + (\lambda + 1)X_4 = 1 \\ X_1 + \lambda X_3 + X_4 = 0 \\ (\lambda - 1)X_1 + X_4 = 0. \end{cases}$$

(i) Al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ determinare lo spazio delle soluzioni di Σ_λ.
(ii) Al variare di $\lambda \in \mathbf{F}_p$, con p primo, determinare lo spazio delle soluzioni di Σ_λ.

9. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} kX_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \\ kX_1 + X_2 + (k+3)X_3 + (k+3)X_4 = 1 \\ kX_1 + X_2 + 2X_3 + k^2 X_4 = k + 1 \\ (k+1)X_3 + (k+2)X_4 = 1 \end{cases}$$

(i) Al variare di $k \in \mathbf{R}$ determinare lo spazio delle soluzioni di Σ_k.
(ii) Al variare di $k \in \mathbf{F}_p$, con p primo, determinare lo spazio delle soluzioni di Σ_k.