Esercizi Matematica 2 per Matematici 5 Ottobre 2006 - Numeri complessi

1) Ricordiamo che se $z = a + ib \in \mathbf{C}$, con a e $b \in \mathbf{R}$, allora il *coniugato complesso* $\overline{z}$ di z è definito da $\overline{z} := a - ib$. Consideriamo l'applicazione $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definita da $z \mapsto \overline{z}$. Dimostrare che

i. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ per ogni z e $w \in \mathbf{C}$;
ii. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ per ogni z e $w \in \mathbf{C}$;
iii. $\overline{0} = 0$ e $\overline{1} = 1$;
iv. $\mathbf{R} = \{z \in \mathbf{C} | \overline{z} = z\}$.

Consideriamo l'applicazione $|\_|\colon \mathbf{C} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ definita da $z \mapsto \sqrt{z\overline{z}}$. Dimostrare che

i. $|\_|$ è ben definita;
ii. $|zw| = |z|\,|w|$ per ogni z e $w \in \mathbf{C}$;
iii. $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$.

Dare condizioni necessarie e sufficienti su z e $w \in \mathbf{C}$ per cui $|z + w| = |z| + |w|$.

2) Dimostrare che per ogni $z \in \mathbf{C}$ esiste $w \in \mathbf{C}$ tale che $w^2 = z$. Tale w è unico? In quali casi?

Dimostrare che ogni equazione di secondo grado della forma $az^2 + bz + c$ con a, b, $c \in \mathbf{C}$ e $a \neq 0$ ammette soluzioni in $\mathbf{C}$. (*Suggerimento*: Usare le prima parte dell' esercizio e l'analogo complesso della ben nota formula per la risoluzione delle equazioni di secondo grado a coefficienti in $\mathbf{R}$.)

Trovare le soluzioni complesse dei seguenti polinomi:

i. $X^2 + 3 + 4i = 0$, $X^2 - 3 + 4i = 0$;
ii. $X^2 + X + 1 = 0$, $X^2 + X - 1 = 0$;
iii. $X^2 + iX + 1 = 0$, $X^2 + 2(1 + i)X + 3 - i = 0$;
iv. $iX^2 + X + 1 + 3i = 0$; $(i - 3)X + iX + 1 = 0$.

3) Discutere la fattorizzazione in $\mathbf{C}[X]$, in $\mathbf{R}[X]$ e $\mathbf{Q}[X]$ dei polinomi $X^n + 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; lo stesso per $X^n - 1$.

4) Data la retta $2X + Y + 3 = 0$ nel piano complesso, scriverne l'equazione utilizzando le coordinate $Z = X + iY$ e $\overline{Z} = X - iY$.

Rispondere alle domanda precedente considerando una generica equazione $aX + bY + c = 0$ con a, b e $c \in \mathbf{R}$.

Trovare condizioni necessarie e sufficienti su α, β e $\gamma \in \mathbf{C}$ per cui il luogo dei punti $\alpha z + \beta\overline{z} = \gamma$ sia una retta nel piano di Gauss.

5) Data la circonferenza di equazione $X^2 + Y^2 + 3X + 7Y - 1 = 0$ nel piano complesso, disegnarla e scriverne l'equazione utilizzando le coordinate Z e $\overline{Z}$.

Rispondere alla domanda precedente considerando una generica equazione $X^2 + Y^2 + aX + bY + c = 0$ con a, b e $c \in \mathbf{R}$.

Dato il luogo dei punti $z \in \mathbf{C}$ tali che $|z - 2 + 3i| = 2$, dimostrare che si tratta di una circonferenza. Determinarne centro e raggio. Determinarne l'equazione utilizzando le coordinate X e Y. È vero che ogni circonferenza nel piano di Gauss è il luogo dei punti $|z - a| = \alpha$ per opportuni $a \in \mathbf{C}$ e $\alpha \in \mathbf{R}_{\geq 0}$?

Data l' ellisse di equazione $aX^2 + bY^2 + cX + dY + e = 0$, con a e $b \in \mathbf{R}_{>0}$ e c, d, $e \in \mathbf{R}$, scriverne l'equazione utilizzando le coordinate Z e $\overline{Z}$.

6) Determinare e disegnare nel piano di Gauss il luogo dei punti soddisfacenti le sequenti disequazioni:

i. $|z+\overline{z}| \leq 1$, $|z-\overline{z}| \geq 1$;
ii. $|z+2\overline{z}| \leq 1$; $|2z+\overline{z}| \geq 1$;
iii. $\big(z+\overline{z}-iz+i\overline{z}\big)\big(z+\overline{z}+iz-i\overline{z}\big) \leq 4$.

7) Determinare e disegnare nel piano di Gauss il luogo dei punti soddisfacenti le sequenti disequazioni:
i. $i(z-\overline{z}) < 0$, $i\left(\frac{z-1}{3-z} - \overline{\frac{z-1}{3-z}}\right) < 0$;
ii. $|z^{-1}+\overline{z}^{-1}| \geq 2$;
iii. $\left|\frac{z}{z+1} + \frac{\overline{z}}{\overline{z}+1}\right| < 1$;

8) Calcolare z^{-1}, w^{-1}, zw, zw^{-1}, $z^{-1}w$, z^2, z^3, z^4, le radici quadrate di z e le radici cubiche di z per le seguenti coppie:
(a) $z = 1+i$, $w = 2-i$;
(b) $z = 1-i$, $w = 1+2i$;
(c) $z = 2e^{i\pi/3}$, $w = 3e^{i\pi/4}$;
(d) $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, $w = i$
(e) $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $w = \pm i$.

9) Scrivere (e disegnare sul piano di Gauss) le radici n-esime di $-i$, $1+i$, $1-i$ per $n = 2,3,4,5,6$.

10) Si consideri l'insieme $\{z^n | n \in \mathbf{N}\}$ per un fissato $z \in \mathbf{C}$; trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché:
(a) l'insieme sia finito;
(b) l'insieme ammetta una infinità di elementi tra loro allineati;
(c) l'insieme sia tutto contenuto nel cerchio unitario;
(d) l'insieme sia tutto esterno al cerchio unitario.

11) Come l'esercizio precedente per l'insieme delle radici n-esime di z al variare di n.

12) Definiamo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbf{C} | |z| = 1\}$ (circolo unitario o circonferenza unitaria) e $R(1) = \{z \in \mathbf{C} | z^n = 1 \text{ per qualche } n \in \mathbf{N}\}$ (radici dell'unità). Mostrare che $R(1) \subseteq \mathbb{S}^1$ e che l'inclusione è stretta. Come si caratterizzano gli elementi di $R(1)$ in termini dell'argomento?
È vero che tra due punti di $\mathbb{S}^1$ si trova sempre qualche punto di $R(1)$ (nel senso della geometria di $\mathbb{S}^1$ nel piano di Gauss)?

13) Determinare $\cos(5t)$, $\cos(8t)$, $\sin(6t)$, $\sin(9t)$ in termini delle funzioni trigonometriche di argomento t (e loro potenze).
Calcolare $\sin^3 t$, $\sin^4 t$, $\cos^5 t$, $\cos^6 t$ in termini delle funzioni trigonometriche di argomento t (e multipli di t).

14) Dare l'interpretazione geometrica nel piano di Gauss della inversione dei numeri complessi: se $z = \varrho e^{i\theta}$ allora $z^{-1} = \varrho^{-1}e^{-i\theta}$.
Dare l'interpretazione geometrica nel piano di Gauss del passaggio all'opposto dei numeri complessi: se $z = \varrho e^{i\theta}$ allora $-z = \varrho e^{(i\theta+\pi)}$.
Dare l'interpretazione geometrica nel piano di Gauss della somma di due numeri complessi.