**Esercizi Matematica 2 per Matematici Ottobre 2005 - I settimana**

**1)** Sviluppare le espressioni $(A\cup B)\cap(C\cup D)$ e $(A\cap B)\cup(C\cap D)$. Cosa succede se in particolare $B = D$?

**2)** Mostrare che l'insieme $\mathcal{C}(A\times B)$ (si intenda: coppie non appartenenti ad $A\times B$) è unione disgiunta dei tre insiemi $(\mathcal{C}A)\times B$, $(\mathcal{C}A)\times(\mathcal{C}B)$ e $A\times(\mathcal{C}B)$.

**3)** Mostrare che l'insieme $(A\times A)\backslash(B\times C)$ è unione dei due insiemi $(A\backslash B)\times A$, $A\times(A\backslash C)$, ed è unione disgiunta dei tre insiemi $(A\backslash B)\times(A\cap C)$, $(A\cap B)\times(A\backslash C)$ e $(A\backslash B)\times(A\backslash C)$. Trovare una descrizione simile per l'insieme $(A\times B)\backslash(C\times D)$.

**4)** Scrivere esplicitamente gli elementi dei seguenti insiemi: $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

**5)** Mostrare che $A\subseteq B$ se e solo se $\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$.

**6)** Determinare le relazioni tra gli insiemi seguenti:
$(a)$ $\mathcal{P}(A\cup B)$ e $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$; $(b)$ $\mathcal{P}(A\cap B)$ e $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$; $(c)$ $\mathcal{P}(\mathcal{C}A)$ e $\mathcal{C}\mathcal{P}(A)$.

**7)** Determinare le relazioni tra i seguenti insiemi (di funzioni):
$(a)$ $(A\cup B)^C$ e $A^C\cup B^C$; $(b)$ $A^{(B\cup C)}$ e $A^B\times A^C$;
$(c)$ $(A\cap B)^C$ e $A^C\cap B^C$; $(d)$ $A^{(B\cap C)}$ e $A^B\cup A^C$;
$(e)$ $(A\times B)^C$ e $A^C\times B^C$; $(f)$ $A^{(B\times C)}$, $(A^C)^B$ e $(A^B)^C$.

**8)** Si determini se le funzioni $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ definite da $f_1(n) = n+3$ e $f_2(n) = n^2+1$ sono iniettive o suriettive ed eventualmente se ne trovino delle inverse destre o sinistre. Stesso problema considerandole come funzioni $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$.

**9)** Per le seguenti funzioni $f_i\colon\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, si calcolino le due composizioni possibili e si verifichi se esse commutano tra loro oppure no; si studino inoltre le loro proprietà (iniettività, suriettività, ecc.): $f_1(n) = n+1$, $f_2(n) = 2n$, $f_3(n) = n+3$, $f_4(n) = n^2$, $f_5(n) = n^2+n$.
Stesso problema, ma considerando le funzioni $f_i\colon\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$. Che cosa cambia?

**10)** Per le funzioni dell'esercizio precedente, descrivere le funzioni immagine inversa e diretta.

**11)** Determinare proprietà e composizioni della funzione $f\colon\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ che manda $n$ in $n/2$ se $n$ è pari, e in 0 altrimenti, e della funzione $g\colon\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ che manda $n$ in $2n$.

**12)** Dare un esempio di funzione $f\colon A\to B$ tale che esistano due insiemi $X, X'\subseteq A$ con $X\cap X' = \emptyset$ ma $f(X)\cap f(X')\neq\emptyset$.

**13)** Per una funzione $f\colon A\to B$, dimostrare che $f$ è iniettiva (risp. suriettiva, biiettiva) se e solo se $f_*$ lo è. Dimostrare inoltre che se $f$ è iniettiva (risp. suriettiva, biiettiva) allora $f^*$ è suriettiva (risp. iniettiva, biiettiva). Valgono i viceversa?

**14)** In generale, per una funzione $f\colon A\to B$ e per ogni $X\subseteq A$ si è visto che $f^*f_*(X)\supseteq X$; mostrare che $f$ è iniettiva se e solo se vale l'uguaglianza per ogni $X\subseteq A$ (basta per qualche $Y$?).
Analogamente per ogni $Y\subseteq B$ si è visto che $f_*f^*(Y)\subseteq Y$; mostrare che $f$ è suriettiva se e solo se vale l'uguaglianza per ogni $Y\subseteq B$ (basta per qualche $X$?).

**15)** Dare esempi per illustrare che in generale per una funzione $f\colon A\to B$ e per $X\subseteq A$ non vi sono rapporti tra $f(A\backslash X)$ e $B\backslash f(X)$.

**16)** Sia $f\colon A\to B$ una funzione. Descrivere $f(X\backslash X')$ e $f(X\triangle X')$ per $X, X'\subseteq A$, e $f^*(Y\backslash Y')$ e $f^*(Y\triangle Y')$ per $Y, Y'\subseteq B$.
In particolare mostrare che $f$ è iniettiva se e solo se $f(A\backslash X) = f(A)\backslash f(X)$ per ogni $X$, o anche se e solo se e $f(A\triangle X) = f(A)\triangle f(X)$ per ogni $X$.

**17)** Per una funzione qualsiasi $f: A \to B$, caratterizzare gli insiemi $X \subseteq A$ tali che $f^* f_*(X) = X$ e gli insiemi $Y \subseteq B$ tali che $f_* f^*(Y) = Y$. È vero che $f^*$ e $f_*$ sono una inversa dell'altra se ristrette a questi sottinsiemi di $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$?

**18)** Si considerino le tre applicazioni seguenti: $p_1: A \times A \to A$ che manda $(a_1, a_2)$ in $a_1$ (prima proiezione), $p_2: A \times A \to A$ che manda $(a_1, a_2)$ in $a_2$ (seconda proiezione), $d: A \to A \times A$ che manda $a$ in $(a, a)$ (diagonale). Si verifichino le eventuali proprietà di iniettività e suriettività; si calcolino tutte le possibili combinazioni e si dica quali proprietà è possibile dedurre da esse.

**19)** Dati due insiemi $A$ e $B$, definiamo unione disgiunta e indichiamo con $A \sqcup B$ l'insieme $(A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$. Si verifichi che c'è una biiezione canonica tra $A \sqcup B$ e $B \sqcup A$.
Le due funzioni $i_A: A \to A \sqcup B$ e $i_B: B \to A \sqcup B$ che mandano $a$ in $(a, 1)$ e $b$ in $(b, 2)$ rispettivamente, godono della seguente proprietà: per ogni insieme $C$ e per ogni coppia di funzioni $\alpha: A \to C$ e $\beta: B \to C$ esiste una unica funzione $f: A \sqcup B \to C$ tale che $f \circ i_A = \alpha$ e $f \circ i_B = \beta$. Questo stabilisce una biiezione canonica tra $C^A \times C^B$ e $C^{A \sqcup B}$.
Si mostri che esiste una funzione canonica $A \sqcup B \to A \cup B$, che è sempre suriettiva ed è iniettiva se e solo se $A \cap B = \emptyset$.

**20)** Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione tra $A$ e $B$; mostrare che essa è grafico di una funzione di $A$ in $B$ se e solo se la funzione $p_A: R \to A$ che manda $(a, b)$ in $a$ è biiettiva. Quando $R$ è grafico di una funzione di $B$ in $A$?

**21)** Studiare la stabilità delle proprietà di una relazione (essere grafico, essere simmetrica, riflessiva, transitiva, antisimmetrica, ecc.) passando alla relazione trasposta.

**22)** Dato un insieme $X$ definiamo su $\mathcal{P}(X)$ la relazione $R$ imponendo che $A\,R\,B$ se e solo se $A \subseteq B$. Dimostrare che $R$ è una relazione d'ordine. L'insieme $\mathcal{P}(X)$ con la relazione $R$ è induttivo?
Supponiamo che $X$ abbia cardinalità finita. Si consideri la funzione $\mathcal{P}(X) \to \mathbf{N}$ che ad un sottoinsieme $A \subseteq X$ associa la cardinalità $|A|$ di $A$. Dimostrare che $|\ \ |$ è crescente considerando su $\mathcal{P}(X)$ la relazione $R$ e su $\mathbf{N}$ l'ordine $\leq$ usuale.

**23)** Nel piano della geometria euclidea elementare, si consideri sull'insieme delle rette la relazione di parallelismo. Mostrare che si tratta di una relazione di equivalenza (se ogni retta viene considerata parallela a se stessa!) e se ne descrivano le classi di equivalenza.

**24)** Nello spazio della geometria euclidea elementare, si consideri sull'insieme delle rette (risp. dei piani) la relazione di incidenza (due rette, risp. piani, sono in relazione se e solo se si intersecano). Di che proprietà gode questa relazione? Si studi la relazione di equivalenza generata e se ne descrivano le classi di equivalenza.

**25)** Nell'insieme $\mathbf{Z}$ definiamo che $a \sim b$ se e solo se $a - b$ è un numero pari (divisibile per 2). Si tratta di una relazione di equivalenza? Eventualmente quali sono le classi di equivalenza?

**26)** Nell'insieme $\mathbf{Z}$ definiamo che $a \sim b$ se e solo se $a - b$ è un numero dispari (non divisibile per 2). Si tratta di una relazione di equivalenza? Eventualmente qual'è la relazione di equivalenza generata, e quali sono le sue classi di equivalenza?

**27)** Nell'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali definiamo la relazione $n|m$ (letto "$n$ divide $m$") se $m$ è un multiplo di $n$, ovvero se $m = pn$ per qualche $p \in \mathbf{N}$. Si tratta di una relazione d'ordine? È totale? Vi sono elementi primo e ultimo? Come sono fatti i sottinsiemi totalmente ordinati per la divisibilità?

**28)** Nell'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi definiamo la relazione $n|m$ (letto "$n$ divide $m$") se $m$ è un multiplo di $n$, ovvero se $m = pn$ per qualche $p \in \mathbf{Z}$. Mostrare che si tratta di una relazione riflessiva e transitiva. Si tratta di una relazione d'ordine? Considerare l'equivalenza $n \sim m$ se e solo se $n|m$ e $m|n$; descrivere l'insieme $\mathbf{Z}/\sim$ e l'ordine indotto dalla divisibilità.

**29)** Dire quali delle seguenti funzioni $f_i: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ sono ordinate, sia per l'ordine $\leq$, sia per l'ordine di divisibilità $|$: $f_1(n) = n + 1$, $f_2(n) = 2n$, $f_3(n) = n + 3$, $f_4(n) = n^2$, $f_5(n) = n^2 + n$.