Esercizi Matematica 2 per Matematici 12 Ottobre 2006 - Numeri complessi

1) (*L'esponenziale complesso*) Si consideri l'applicazione $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definita da $z = a+ib \mapsto e^z := e^a(\cos b + i \sin b)$. Dimostrare:

a. l'immagine coincide con $\mathbf{C}^* := \{z \in \mathbf{C} | z \neq 0\}$;

b. $e^0 = 1$, $e^{-z} = \left(e^z\right)^{-1}$ ed $e^z e^w = e^{z+w}$ per ogni z e $w \in \mathbf{C}$;

c. $e^z = e^w$ se e solo e $\frac{z-w}{2\pi i}$ è un numero intero;

d. Mostrare che la funzione $(0, 2\pi] \times \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{C}^*$ che manda (ξ, ϱ) in $e^{\rho+i\xi}\xi\varrho$ è una biiezione. Scrivere la funzione inversa.

2) Si consideri la funzione sul piano complesso definita da

$$f(z) := \frac{z-i}{z+i}.$$

Sia $\mathfrak{I} := \{z \in \mathbf{Z} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (il semipiano superiore di Poincaré) e sia $U := \{z \in \mathbf{C} | z\overline{z} < 1\}$.

a. Determinare il dominio $\mathbb{D}$ e l'immagine di f ed una sua funzione inversa;

b. dimostrare che $f(\mathcal{I}) = U$. Determinare l'immagine inversa tramite f dei luoghi $\{z | z\overline{z} = \rho\}$ al variare di $\rho \in \mathbf{R}$ con $0 \leq \rho < 1$;

c. determinare i punti fissi di f cioè $\{z \in \mathbb{D} | f(z) = z\}$;

d. determinare e disegnare il luogo dei punti L_α definito dai $z \in \mathbb{D}$ tali che $|f(z)| \leq \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$;

e. dati $A \in \mathbf{C}$ ed $r \in \mathbf{R}_{>0}$ sia $C(A, r)$ la circonferenza di centro A e raggio r. Dimostrare che l'immagine di $C(A, r)$ tramite f è o una circonferenza o una retta;

f. determinare condizioni necessarie e sufficienti su A ed r affinchè l'immagine di $C(A, r)$ tramite f sia una retta;

g. determinare l'immagine di L_α tramite f al variare di $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$.

3) Si disegni nel piano di Gauss il sottoinseme determinato dalle condizioni

$$D := \begin{cases} |z\overline{z} + z + \overline{z}| \leq 1; \\ z\overline{z} - z - \overline{z}| \leq 1; \\ |z| \leq 1. \end{cases}$$

Sia f la funzione sul piano complesso dfinita da $f(z) := -\frac{z+1}{z}$.

a. Determinare il dominio D_f di f, l'inversa g di f ed il suo dominio D_g e l'insieme $D_0 := D \cap D_f \cap D_g$;

b. determinare i punti $z \in D_f$ tali che $f(z) = z$;

c. si determini e si disegni nel piano di Gauss l'immagine di D_0 tramite f.

4) Sia data una applicazione $z \mapsto f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ con a, b, c e $d \in \mathbf{C}$ non tutti nulli.

a. Determinare condizioni necessarie e sufficienti affinchè f non abbia punti fissi;

b. determinare condizioni necessarie e sufficienti affinchè f abbia un solo punto fisso. Tali trasformazioni sono dette *paraboliche*.

5) Sia $\mathfrak{I} := \{z \in \mathbf{Z} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (il semipiano superiore di Poincaré). Sia data una trasformazione lineare fratta $z \mapsto f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ con a, b, c e $d \in \mathbf{R}$ non tutti nulli.

a. trovare condizioni necessarie e suffcienti affinchè $f\big(\mathfrak{I}\big) = \mathfrak{I}$;
b. trovare condizioni necessarie e suffcienti affinchè $f(i) = i$;
c. dimostrare che l'insieme delle trasformazioni di cui al punto (b) è in biezione con la circonferenza unitaria $\{z \in \mathbf{C} | z\overline{z} = 1\}$.

6) Siano a, b, c, d numeri reali tali che $ad - bc = 1$. Consideriamo la trasformazione lineare fratta s data da $s(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

a. Mostrare che s può essere scritta come composizione di funzione dei seguenti tre tipi: traslazione reale ($z \mapsto z + u$ con $u \in \mathbf{R}$), omotetie reali ($z \mapsto vz$ con $v \in \mathbf{R}$, $v > 0$), inversioni ($z \mapsto \frac{1}{z}$);
b. dare una interpretazione geometrica delle funzioni di cui al punto (a);
c. descrivere le figure formate da $s(z)$ se z descrive le semicirconferenze con centro sull'asse reale, oppure le semirette ortogonali all'asse reale.

7) Sia data la retta r di equazione $\alpha z + \overline{\alpha z} + \gamma = 0$ con $\alpha \in \mathbf{C}$ non nullo e $\gamma \in \mathbf{R}$. Determinare una funzione $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, definita $z \mapsto sz + it$ con $s \in \mathbf{C}$ e $t \in \mathbf{R}$ che mandi r nella retta di equazione $Y = 0$. Determinare l'inversa g di f. Usando f e g scrivere la funzione $h\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definita come la simmetria rispetto alla retta r.

Stessa domanda nel caso in cui r abbia equazione $aX + bY + c = 0$ con a, b e $c \in \mathbf{R}$;

Trovare h nel caso in cui la retta r abbia equazione $2X + Y + 3 = 0$.

8) Sia data la circonferenza C di equazione $|z-a| = \rho$ con $a \in \mathbf{C}$ e $\rho \in \mathbf{R}_{>0}$. Determinare una funzione $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, definita $z \mapsto sz + t$ con $s \in \mathbf{R}$ e $t \in \mathbf{C}$ che mandi C nella circonferenza di equazione $|z| = 1$. Determinare l'inversa g di f. Usando f e g scrivere la funzione $h\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definita come l' inversione rispetto alla circonferenza C.

Stessa domanda nel caso in cui C abbia equazione $X^2 + Y^2 + aX + bY + c = 0$ con a, b e $c \in \mathbf{R}$;

Trovare h nel caso in cui la circonferenza C abbia equazione $X^2+Y^2+3X+7Y-1 = 0$.