Esercizi Matematica 2 per Matematici Ottobre 2005 - II settimana

1) Dati tre cardinali α, β e γ, mostrare che
(a) $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$;
(b) $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma = (\alpha^\gamma)^\beta$;
(c) se $\alpha \leq \beta$ allora $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$, $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$, $\gamma^\alpha \leq \gamma^\beta$.

2) Per ogni due insiemi finiti A e B, mostrare che $|A \backslash B| + |A \cap B| = |A|$, e che se $B \subseteq A$ allora $|A \backslash B| = |A| - |B|$. E per insiemi infiniti?

3) Siano A e B due insiemi. È vero o falso che $|A| + |B| = |A|$ implica $|B| = 0$? È vero o falso che $|A| \cdot |B| = |A|$ implica $|B| = 1$? Dare esempi e controesempi.

4) Mostrare le seguenti relazioni:
(a) $|\mathbf{Z}| = |\mathbf{N}|$;
(b) $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{N}|$;
(c) $|\mathbf{R}| = |[0,1]| = |(0,1)|$ (con le notazioni usuali: $[0,1]$ e $(0,1)$ sono gli intervalli dei numeri reali compresi tra 0 e 1, inclusi gli estremi o esclusi gli estremi);
(d) $|\mathbf{R}| > |\mathbf{N}|$;

5) Si confrontino le cardinalità dei seguenti insiemi:
(a) $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, insieme delle funzioni di $\mathbf{N}$ in sé;
(a') l'insieme delle funzioni di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N} \backslash \{0\}$;
(b) insieme delle funzioni (strettamente) crescenti di $\mathbf{N}$ in sé
(c) insieme delle funzioni decrescenti di $\mathbf{N}$ in sé
(d) insieme delle funzioni di $\mathbf{N}$ in sé che siano "quasi sempre nulle", cioè che hanno valori diversi da zero solo per un numero finito di elementi;
(e) insieme delle funzioni di $\mathbf{N}$ in sé che siano addittive (cioè le funzioni f tali che $f(n+n') = f(n) + f(n')$ per ogni $n, n' \in \mathbf{N}$);
(f) insieme delle funzioni di $\mathbf{N}$ in sé che siano moltiplicative (cioè le funzioni f tali che $f(nn') = f(n)f(n')$ per ogni $n, n' \in \mathbf{N}$).

6) Verificare la formula di inclusione-esclusione per 3, 4, n insiemi (induzione).

7) Dimostrare le formule seguenti riguardo ai coefficienti binomiali:
(a) $\binom{n}{k} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i}{k-1}$
(b) $\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{k-i+1}$
(c) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$
(d) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$
(e) $\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i} = 2^n \binom{n}{p}$
Se possibile, se ne dìa una interpretazione combinatorica.

8) Studiare la funzione ricorsivamente definita da $s(1) = 1$ e $s(n+1) = s(n) + (-1)^n n$.

9) Studiare la funzione ricorsivamente definita da $f(n,k) = f(n-1,k)f(n-1,k-1)$ e $f(n,0) = s$, $f(n,n) = s$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

10) Studiare gli sviluppi del trinomio $(x+y+z)^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, analogamente a quanto fatto per il binomio; in particolare definire dei coefficienti trinomiali e discutere le loro relazioni ricorsive.

11) Calcolare la somma dei primi n numeri naturali dispari e la somma dei primi n numeri naturali pari per ogni n. Dare una dimostrazione per induzione del proprio risultato.

12) Determinare, e dimostrare per induzione la correttezza del proprio risultato, le somme
(a) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i$ per ogni n naturale.
(b) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^2$ per ogni n naturale.

(c) $\sum_{i=1}^{n} 2^i$ per ogni n naturale.
(d) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i 2^i$ per ogni n naturale.

13) *Disuguaglianze di Bernoulli.*
(a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{N}$ e ogni $x \in \mathbf{R}$ con $x > -1$ si ha $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (e vale l'uguaglianza se e solo se $x = 0$ oppure $n \in \{0, 1\}$;
(b) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{N}$ e ogni $x \in \mathbf{R}$ con $\frac{1}{n} > x > -1$ si ha $\frac{1}{1-nx} \geq (1+x)^n$.

14) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{N}$ abbiamo

$$(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + \cdots + a_n$$

se $a_i \in \mathbf{R}$ hanno tutti lo stesso segno e sono tutti maggiori di -1.

15) *Confronto delle Medie Aritmetica e Geometrica.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ positivo e ogni famiglia $a_1, \dots a_n$ di reali positivi, la media aritmetica è $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$, mentre la media geometrica è $g = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}$. Mostrare che $m \geq g$ (e vale l'uguaglianza se e solo se tutti gli a_i sono uguali). Conviene dimostrare che

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right)^n$$

procedendo per induzione, e ragionando nel passo induttivo nel modo seguente: se uno degli a_i, diciamo l'ultimo, coincide con la media aritmetica, allora ci si riconduce subito all'ipotesi induttiva; altrimenti vi saranno un a_i, diciamo l'ultimo, che è superiore alla media aritmetica (sia $a_{n+1} = M + c$ con c positivo), e un altro a_i, diciamo il penultimo, che è inferiore alla media aritmetica (sia $a_n = M - d$ con d positivo): si sostituisca a_{n+1} con M, e a_n con $M + c - d$...

16) Per un poligono piano, si dicono diagonali i segmenti che uniscono due vertici non adiacenti; quante diagonali ha un poligono con n vertici?

17) Dati n punti nel piano, a tre a tre non allineati, quanti triangoli distinti è possibile formare? E se fossero punti nello spazio?

18) Quante parole con meno di 5 caratteri si possono formare con alfabeti di due lettere, di tre lettere, di quattro lettere, di cinque lettere, e in generale di n lettere?
Quante di queste parole non hanno lettere consecutive uguali?

19) In quanti modi si possono distribuire 18 palline uguali in 5 cassetti diversi? E facendo in modo che nessun cassetto rimanga vuoto? E facendo in modo che due siano vuoti? E facendo in modo che due fissati siano vuoti?

20) In quanti modi si possono distribuire 5 palline uguali in 18 cassetti diversi? E facendo in modo che ogni cassetto abbia al più una pallina?

21) Nove persone cenano seduti ad un tavolo circolare; in quanti modi diversi si possono disporre? E se fossero su una panchina? Se ci fossero 3 coppie di gemelli identici, quante disposizioni potrebbe distinguere un osservatore?

22) Quanti sono i numeri di n cifre (nella notazione decimale) divisibili per cinque?

23) Quanti sono i numeri di n cifre (nella notazione decimale), ognuna non nulla, tale che ogni cifra sia non minore della seguente?

24) Quanti sono i numeri di 9 cifre (nella notazione decimale) contenenti tre volte la cifra 1, due volte ciascuna le cifre 3, 5, 7?

25) Quanti sono i numeri dispari di tre cifre distinte (nella notazione decimale)? E di quattro? E di n?