Esercizi Matematica 2 per Matematici Novembre 2005 - VI settimana

1. Si consideri l'applicazione f di $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^4$ definita da $f(s,t) = (2s+t, s-t, s+t, s+2t)$.
(a) Si mostri che f è lineare;
(b) si determini $\mathrm{Ker}(f)$;
(c) si trovi una base di $\mathrm{Im}(f)$;
(d) stesse domande con $\mathbf{F}_p$, p primo, al posto di $\mathbf{R}$.

2. Si consideri l'omomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ definito da $f(r,s,t) = (r+s+t, 2r-s)$.
(a) Si mostri che f è suriettivo;
(b) si determini $\mathrm{Ker}(f)$;
(c) trovare $v \in \mathbf{R}^3$ tale che $f^{-1}((1,2)) = v + \ker(f)$;
(d) mostrare che per ogni $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, esiste $v \in \mathbf{R}^3$, tale che $f^{-1}((a,b)) = v + \ker(f)$;
(e) stesse domande con $\mathbf{F}_p$, p primo, al posto di $\mathbf{R}$.

3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ di dimensione 3 e base v_1, v_2, v_3. Sia ϕ_λ l'applicazione lineare definita da

$$\phi_\lambda(v_1) = (\lambda-1)v_1 + 2v_2 - (\lambda+1)v_3, \qquad \phi_\lambda(v_2) = 2v_1 - \lambda v_3, \qquad \phi_\lambda(v_3) = -\lambda v_1 - v_2 + (\lambda+2)v_3$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$
(a) determinare immagine e nucleo di ϕ_λ al variare di λ;
(b) per quali valori di λ l'immagine dell'applicazione ϕ_λ contiene il vettore $v_1 + 2v_2 + 2v_3$?
(c) l'unione dei nuclei di ϕ_λ al variare di λ genera V?

4. Per ognuna delle seguenti condizioni, definire se possibile un' applicazione lineare $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ (non nulli e) che la verifichi:
(a) nucleo e immagine coincidano;
(b) il nucleo contenga l'immagine;
(c) il nucleo sia non nullo e contenuto nell'immagine;
(d) nucleo e immagine siano complementari;
(e) il nucleo sia diverso dall'immagine e la somma dei due non sia diretta.
Stesso problema nel caso di endomorfismi di $\mathbf{R}^4$.

5. Sia $V = \mathbf{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ dei polinomi di grado ≤ 4. Sia $d\colon V \to V$ la derivazione. Sia $\phi\colon \mathbf{R}[X]_{\leq 4} \to \mathbf{R}[X]_{\leq 4}$ la funzione definita da $\phi(P) = P + d(P)$.
(a) Determinare la dimensione di V ed esibire una base;
(b) dimostrare che d e ϕ sono applicazioni lineari. Determinarne nucleo ed immagine;
(c) dire se V è somma diretta di $\mathrm{Ker}(d)$ e $\mathrm{Im}(d)$ (risp. di $\mathrm{Ker}(\phi)$ e $\mathrm{Im}(\phi)$).
(d) Rispondere alle domande precedenti considerando i polinomi di grado ≤ 4 sul campo $\mathbf{F}_p$, con p numero primo.

6. *Proiezioni.* Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbf{R}$. Sia f un endomorfismo di V, cioè una applicazione lineare $f\colon V \to V$, tale che $f^2 = f$.
(a) Si mostri che $V = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$;
(b) si mostri che esistono una base $(v_1, \ldots, v_n)$ di V ed un intero i, $1 \leq i \leq n+1$, tali che $f(v_j) = v_j$, se $j < i$, e $f(v_j) = 0$, se $j \geq i$;
(c) si verifichi che f è l' unico endomorfismo di V che manda un vettore $x = v + w$ con $v \in \mathrm{Im}(f)$ e $w \in \mathrm{Ker}(f)$ nel vettore v.
Ogni endomorfismo f tale che il quadrato coincide con l' applicazione stessa si dice una proiezione sullo schermo $\mathrm{Im}(f)$ dalla direzione $\mathrm{Ker}(f)$.

7. Sia $V = \mathbf{R}^3$, W il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u = {}^t(1,0,1)$ e $v = {}^t(0,1,1)$. Sia $w = {}^t(1,1,1)$.
(a) Dimostrare che $\mathbf{R}^3 = W \oplus \langle w \rangle$.
Sia $\pi\colon \mathbf{R}^3 \to W$ la proiezione sul piano W nella direzione w.
(b) Verificare che π è un' applicazione lineare. Calcolarne nucleo ed immagine.
(c) Sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la composizione di π e dell' inclusione $W \subset \mathbf{R}^3$. Verificare che f è una proiezione nel senso dell' esercizio precedente.

(d) Calcolare schermo e direzione di f.
(e) Determinare l'immagine tramite f della base $\{u, v, w\}$.

8. Sia $V = \mathbf{R}^4$, U il sottospazio di V generato dai vettori $u = {}^t(1,1,0,0)$ e $v = {}^t(0,1,1,0)$ e W il sottospazio di V definito dalle equazioni $X_1 = 0$ e $X_2 + X_3 - X_4 = 0$.
(a) Dimostrare che $\mathbf{R}^4 = U \oplus W$.
Sia $\pi_U \colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la proiezione su U dalla direzione W e $\pi_W \colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la proiezione su W dalla direzione U.
(b) Descrivere π_U e π_W e calcoalre l'immagine della base canonica di $\mathbf{R}^4$.
(c) Dimostrare che $V = U \oplus W$. Dato un vettore $X = {}^t(X_1, \dots, X_4) \in \mathbf{R}^4$ trovare α_i $i = 1, \dots, 4$ tale che $X = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w + \alpha_4 z$.
(d) Dimostrare che l'applicazione $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita da ${}^t(X_1, \dots, X_4) \to {}^t(\alpha_1(X), \dots, \alpha_4(X))$ è lineare.

9. *Simmetrie.* Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbf{R}$ ed f un endomorfismo di V tale che $f^2 = \mathrm{id}_V$.
(a) Si calcolino $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Ker}(f)$; si deduca che f è necessariamente un isomorfismo.
(b) Siano ora $V_+ = \{v \in V | f(v) = v\}$ e $V_- = \{v \in V | f(v) = -v\}$. Mostrare che $V = V_+ \oplus V_-$.
(c) Mostrare che esistono una base $(v_1, \dots, v_n)$ di V ed un intero i, $1 \le i \le n+1$, tali che $f(v_j) = v_j$, se $j < i$, e $f(v_j) = -v_j$, se $j \ge i$.
(d) Si verifichi che f è l'unica applicazione lineare di V in sè che manda un vettore $x = v + w$ con $v \in V_+$ e $w \in V_-$ nel vettore $v - w$.
Ogni endomorfismo tale che il quadrato coincide con l'applicazione identica si dice una *simmetria* di asse (o specchio) V_+ e di direzione V_-.

10. (a) Con la notazione dell' Esercizio 3, sia $\sigma \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la simmetria di asse W e direzione w. Determinare l'immagine tramite σ della base canonica di $\mathbf{R}^3$.
(b) Con la notazione dell' Esercizio 4, sia $\sigma \colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la simmetria di asse U e direzione W. Determinare l'immagine tramite σ della base canonica di $\mathbf{R}^4$.

11. *Grafici.* Sia V uno spazio vettoriale. Siano M e N sottospazi vettoriali di V tali che $V = M \oplus N$. Denoto con $\pi_M \colon V \to V$ e con $\pi_N \colon V \to V$ le proiezioni di V su M e N rispettivamente.
(i) Sia $f \colon M \to N$ un' applicazione lineare. Sia $(1, f) \colon M \to M \oplus N$ l' applicazione definita da $a \mapsto \big(a, f(a)\big)$. Dimostrare che $(1, f)$ è una applicazione lineare iniettiva. L' immagine è detta il grafico di f.
(ii) Sia W un sottospazio vettoriale di V tale che $N \cap W = \{0\}$ e $\dim M = \dim W$.
  (a) Dimostrare che tale condizione su W è equivalente a richiedere che la restrizione di π_M a W definisca un isomorfismo da W ad M.
  (b) Dimostrare che esiste un' unica applicazione lineare $\phi \colon M \to N$ tale che il grafico di ϕ sia W.
  (c) È vero che ϕ è iniettiva? È vero che ϕ è suriettiva? Dare controesempi in caso di risposta negativa.

12. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
(a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $\phi \colon V \to V$ che soddisfa

$$\phi(e_1 + e_2) = -e_1, \quad \phi(e_1 - e_2) = 2e_2, \quad \phi(e_1 + e_3) = e_1 + e_4, \quad \phi(e_1 - e_4) = e_2 + e_4.$$

(b) Studiare nucleo e immagine di ϕ, e si determini l'antimmagine tramite ϕ del vettore $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.
(c) Si dica se ϕ è una proiezione, una simmetria o nessuna delle due.
(d) Dimostrare che il sottoinsieme $A = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, V) | \phi \circ \psi = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, V)$. Se ne calcoli la dimensione. Determinare una base di A.
(e) Dimostrare che il sottoinsieme $B = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, V) | \psi \circ \phi = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, V)$. Se ne calcoli la dimensione e si esibisca una base.