Esercizi Matematica 2 per Matematici 19 Ottobre 2006 - Spazi vettoriali

1. Nel piano $\mathbf{R}^2$ consideriamo i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(a) dimostrare che $\{u, v\}$ è una base di $\mathbf{R}^2$;

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha v + \beta w$ ove α e β sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:
  i. $\alpha, \beta \in [0, \infty)$
  ii. $\alpha + \beta = 1$
  iii. $\alpha + \beta = 1$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$
  iv. $\alpha, \beta \in [0, 1]$
  v. $\alpha + \beta \leq 1$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$
  vi. $\alpha + \beta \leq 1$;

(c) si considerino ora v e w come vettori di $\mathbf{C}^2$ (risp. $\mathbf{Q}^2$). È ancora vero che $\{u, v\}$ è una base?

2. Si considerino gli eleemnti $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{C}^2$;

(a) dimostrare che $\{u, v\}$ sono linearmente indipendenti considerando $\mathbf{C}^2$ come $\mathbf{R}$–spazio vettoriale;

(b) completare $\{u, v\}$ ad una base di $\mathbf{C}^2$ come $\mathbf{R}$–spazio vettoriale;

(a) Cosa succede se si considera $\mathbf{C}^2$ come $\mathbf{C}$–spazio vettoriale?

3. Nello spazio $\mathbf{R}^3$ consideriamo i vettori: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) verificare che sono linearmente indipendenti e risolvere in α, β, γ la relazione $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$ per un vettore $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ generico;

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha u + \beta v + \gamma w$ ove α, β e γ sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:
  i. $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \infty)$
  ii. $\alpha + \beta + \gamma = 1$
  iii. $\alpha + \beta + \gamma = 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
  iv. $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
  v. $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
  vi. $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$;

(c) dire quali fra essi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$.

4. Si determini se i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ formati dai vettori $x = {}^t(x, y, z)$ soddisfacenti alle condizioni seguenti siano o meno sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;
(c) $|x| = |y|$ ($|\_|$ è il valore assoluto);
(d) $x + y = z$;
(e) $x + y = z + 1$;
(f) $x - y^2 = 0$ e $x = 0$;
(g) $x - yz = 0$ e $x = 0$.

5. Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Si verifichi che esistono infiniti α, β e γ tali che $\alpha u + \beta v + \gamma w = {}^t(0, 0, 0)$.
(b) Si determinino tutti i possibili valori di α, β e γ tali che $\alpha u + \beta v + \gamma w = {}^t(2, 2, 1)$.
(c) Si dimostri che non esistono α, β e γ tali che $\alpha u + \beta v + \gamma w = {}^t(1, 1, 1)$.

6. Descrivere *in forma cartesiana*, cioè tramite equazioni lineari, il sottospazio di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dire se tali vettori sono linearmente indipendenti e completare l' insieme $\{u, v, w\}$ ad una base di $\mathbf{C}^4$.

7. Verificare che i sottinsiemi di $\mathbf{C}^4$ formati dai vettori $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ soddisfacenti alle condizioni $x_1 - x_4 = 0 = x_1 + ix_2$ $(= U)$ e $x_3 - x_4 = 0 = -x_2 + ix_3$ $(= V)$ sono sottospazi vettoriali e trovarne la dimensione evidenziando delle basi. Calcolare l' intersezione $U \cap V$ e trovarne una base. Trovare le equazioni del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}^4$ contenente sia U che V.

8. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$:

$$Z_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s+t \\ s-t \\ s+t \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbf{R} \right\}, \qquad Z_2 = \left\{ \begin{pmatrix} s+2t \\ 2s-t \\ s-t \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

(a) Si mostri che Z_1 e Z_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$;
(b) si trovino equazioni cartesiane per Z_1 e Z_2;
(c) si determini $Z_1 \cap Z_2$ e si dimostri che è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$;
(d) si mostri che $Z_1 + Z_2 = \mathbf{R}^3$.

9. Sia $V = \mathbf{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ dei polinomi di grado ≤ 4. Sia $d\colon V \to V$ la derivazione.
(a) Determinare la dimensione di V ed esibire una base;
(b) Dati i seguento sottoinsiemi di V dire se sono una base o generatori o lineramente indipendenti
  (i) $\{X^2 - 1, X - 1, X^3 - 1, X^3, X^4\}$;
  (ii) $\{\alpha, , X - \alpha, (X - \alpha)^2, (X - \alpha)^3, (X - \alpha)^4\}$ per $\alpha \in \mathbf{R}$;
  (iii) $\{X - 1, X^2, X^3, X^4, 2X - 2, 3X^3 - X^2\}$;
  (iv) $\{X - 1, X + 1, X^2 - 1, X^2 + 1, X^3, X^4\}$;
  (v) $\{f, df, d^2f, d^3f, d^4f\}$ per $f \in V$ di grado 4.

10. Sia $V = \mathbf{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ dei polinomi di grado ≤ 4.
(i) Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali ed esibirne una base:
  (a) $U_p := \{f \in \mathbf{R}[X] | f(-X) = f(X)\}$;
  (b) $U_d := \{f \in \mathbf{R}[X] | f(-X) = -f(X)\}$;
  (c) $W = \{f \in \mathbf{R}[X] | f(1 - X) = f(X)\}$;
  (d) $Z = \{f \in \mathbf{R}[X] | f(1 - X) = -f(X)\}$.
(ii) È vero che $\mathbf{R}[X]_{\leq 4} = U_p \oplus U_d$?
(iii) È vero che $\mathbf{R}[X]_{\leq 4} = W \oplus Z$?
(iv) Generalizzare i punti (i) e (iii) sostituendo 4 con un generico n.

11. Su $\mathbf{R}^2$ poniamo $\binom{x_1}{x_2} + \binom{y_1}{y_2} = \binom{x_1+y_1}{x_2+y_2}$, $\lambda\binom{x_1}{x_2} = \binom{\lambda x_1}{0}$ per ogni $x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda \in \mathbf{R}$. Con queste operazioni, $\mathbf{R}^2$ diventa spazio vettoriale su $\mathbf{R}$?

12. Si consideri l'insieme $\mathbf{R}_{>0}$ dei numeri reali strettamente positivi, dotato delle seguenti operazioni: la "somma" di due numeri sia il loro prodotto, il prodotto scalare del reale $\alpha \in \mathbf{R}$ per l'elemento $r \in \mathbf{R}_{>0}$ sia r^α. Dimostrare che $\mathbf{R}_{>0}$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale reale il cui vettore nullo è 1.

13. Consideriamo lo spazio vettoriale reale delle applicazioni continue di $\mathbf{R}$ in sè.
(a) È vero che l'insieme formato dalle tre funzioni 1 (funzione costante), $\sin^2$ e $\cos^2$ è linearmente dipendente? Per le funzioni 1, sin e cos?
(b) si consideri l'insieme $\{\sin(nx) | n \in \mathbf{N}, n \neq 0\} \cup \{\cos(nx) | n \in \mathbf{N}\}$ e si dimostri che è un insieme linearmente indipendente;
(c) cosa dire dell'insieme $\{\sin(\alpha + nx) | n \in \mathbf{N}, n \neq 0, \alpha \in \mathbf{R}\}$?