Esercizi Matematica 2 per Matematici Novembre 2005 - VII settimana

1. Sia $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$.

(a) Scriverne la matrice in base canonica;
(b) scriverne la matrice nella base v_1, v_2, v_3 ove v_j è il vettore di coordinate tutte uguali a 1 tranne la j-esima uguale a 0;
(c) scrivere la matrice di cambiamento di base e verificare la relazione tra le due matrici di f;
(d) discutere iniettività e suriettività di f.

2. Sia $L: \mathbb{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbf{R})$ l'applicazione definita da $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(a) Verificare che si tratta di una applicazione lineare e scriverne la matrice nella base canonica;
(b) trovare una base del nucleo di L;
(c) L è suriettiva? Trovare la dimensione e una base dell'immagine di L.

3. Sia $V = \mathbf{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ dei polinomi di grado ≤ 4. Sia $d: V \to V$ la derivazione. Sia $\phi: \mathbf{R}[X]_{\leq 4} \to \mathbf{R}[X]_{\leq 4}$ la funzione definita da $\phi(P) = P + d(P)$.

(a) Dimostrare che d e ϕ sono applicazioni lineari. Determinarne nucleo ed immagine;
(b) dire se V è somma diretta di $\mathrm{Ker}(d)$ e $\mathrm{Im}(d)$ (risp. di $\mathrm{Ker}(\phi)$ e $\mathrm{Im}(\phi)$);
(c) calcolare le matrici di d e ϕ rispetto alla base $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.
(d) scrivere le matrici associate a d e ϕ nella base $X^4, d(X^4), d^2(X^4), d^3(X^4), d^4(X^4)$;
(e) scrivere la matrice di cambiamento di base tra le due basi precedenti, e verificare la relazione di cambiamento di base per le due matrici associate a d e ϕ;
(f) dire se $A = \{\psi \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[X]_{\leq 4}) | \phi \circ \psi = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[X]_{\leq 4})$. In caso affermativo se ne calcoli la dimensione e si esibisca una base.
(g) Rispondere alle domande (a) e (b) considerando i polinomi di grado ≤ 4 sul campo $\mathbf{F}_p$, con p numero primo.

4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbf{R}$. Sia f un endomorfismo di V, cioè una applicazione lineare $f: V \to V$, tale che $f^2 = f$. Si mostri che esistono una base $(v_1, \ldots, v_n)$ di V ed un intero i, $1 \leq i \leq n$, tali che $f(v_j) = v_j$, se $j < i$, e $f(v_j) = 0$, se $j \geq i$. Calcolare la matrice di f rispetto a tale base.

5. Consideriamo la proiezione p su V nella direzione di W e la proiezione q su W nella direzione di V ove $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sono sottospazi di $\mathbf{R}^4$.

(a) verificare che $\mathbf{R}^4 = V \oplus W$ e scrivere le matrici di p e q nella base di $\mathbf{R}^4$ formata giustapponendo le basi di V e di W;
(b) si scrivano le matrici A e B di p e q nella base canonica di $\mathbf{R}^4$;
(c) esplicitare le matrici di cambiamento di base e verificare le relazioni tra le matrici precedentemente trovate;
(d) è vero che $AB = BA = 0$?

6. Sia $\pi: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l' applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$ è

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che $\pi^2 = \pi$ e che quindi π è una proiezione;
(b) determinare $U = \mathrm{Ker}(\pi)$ e $V := \mathrm{Im}(\pi)$ e dimostrare che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$;
(c) scrivere la matrice della proiezione su U parallelelmente a W;

(d) scrivere la matrice della simmetria di asse U e di direzione W.

7. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

(a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $\phi: V \to V$ che soddisfa

$$\phi(e_1 + e_2) = -e_1, \quad \phi(e_1 - e_2) = 2e_2, \quad \phi(e_1 + e_3) = e_1 + e_4, \quad \phi(e_1 - e_4) = e_2 + e_4.$$

(b) Studiare nucleo e immagine di ϕ, e si determini l'antimmagine tramite ϕ del vettore $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

(c) Si dica se ϕ è una proiezione, una simmetria o nessuna delle due.

(d) Dimostrare che il sottoinsieme $A = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, V) | \phi \circ \psi = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, V)$. Se ne calcoli la dimensione. Determinare una base di A.

(e) Dimostrare che il sottoinsieme $B = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, V) | \psi \circ \phi = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, V)$. Se ne calcoli la dimensione e si esibisca una base.

8. Sia A una matrice quadrata d'ordine n nilpotente, cioè esista un intero positivo m tale che $A^m = 0$. Mostrare che $\underline{\mathrm{I}}_n + A$ è una matrice invertibile. Cosa significa la nilpotenza in termini di una applicazione lineare rappresentata da quella matrice?

9. Si diano degli esempi di matrici quadrate dello stesso ordine, non nulle, A e B tali che $AB = 0$. È vero che allora necessariamente si ha $BA = 0$ (giustificare o dare controesempi)? Interpretare gli esempi in termini di applicazioni lineari rappresentate da quelle matrici.

10. Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine. Dire che rapporti vi sono tra il fatto che A e B siano invertibili e il fatto che $A + B$ sia invertibile. Spiegare con degli esempi.

È vero che ogni matrice reale quadrata non (necessariamente) invertibile si può scrivere come somma di due matrici invertibili?

11. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

(a) determinare, se esistono, le matrici $B \in M_{3\times 2}(\underline{\mathrm{Q}})$ tali che $AB = \underline{\mathrm{I}}_2$;

(b) determinare, se esistono, le matrici $C \in M_{3\times 2}(\underline{\mathbf{Q}})$ tali che $CA = \underline{\mathrm{I}}_3$;

(c) discutere i punti precedenti in termini di applicazioni lineari, se già non si è fatto;

(d) descrivere l'insieme di cui al punto (a) in termini dello spazio vettoriale $M_{3\times 2}(\mathbf{Q})$.

12. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -8 \\ 3 & 6 & -12 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e sia $U = \{B \in M_3(\underline{\mathrm{R}}) : ABC = 0\}$;

(a) mostrare che U è un sottospazio di $M_3(\underline{\mathrm{R}})$;

(b) calcolare la dimensione di U su $\underline{\mathrm{R}}$;

(c) trovare una base di U

13. Siano $A \in M_2(\mathbf{Q})$ e $B \in M_3(\mathbf{Q})$; si consideri l'applicazione $\tau: M_{2\times 3}(\mathbf{Q}) \to M_{2\times 3}(\mathbf{Q})$ definita da $\tau(X) = AXB$.

(a) Si mostri che τ è lineare;

(b) si mostri che τ è invertibile se e solo se A e B sono invertibili;

(c) si scriva una base di τ nella base canonica con l'ordine lessicografico;

(d) stimare le dimensioni di nucleo e immagine di τ in funzione dei ranghi di A e B.

14. *(Traccia di una matrice quadrata)* Sia $V = M_{n\times n}(\mathbf{R})$ con la solita struttura di spazio vettoriale su $\mathbf{R}$. Si consideri l'applicazione $\mathrm{Tr}: V \to \mathbf{R}$ definita da $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, per ogni $A = (a_{ij}) \in V$.

(a) Si mostri che Tr è un'applicazione $\mathbf{R}$-lineare, se ne scriva la matrice nelle basi canoniche, e si calcoli la dimensione del suo nucleo;

(b) Si mostri che per ogni $A, B \in V$ risulta $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$;