Esercizi Matematica 2 per Matematici Ottobre 2005 - IV settimana

1) Calcolare z^{-1}, w^{-1}, zw, zw^{-1}, $z^{-1}w$, z^2, z^3, z^4, le radici quadrate di z e le radici cubiche di z per le seguenti coppie:
(a) $z = 1 + i$, $w = 2 - i$;
(b) $z = 1 - i$, $w = 1 + 2i$;
(c) $z = 2e^{i\pi/3}$, $w = 3e^{i\pi/4}$
(d) $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, $w = i$
(e) $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $w = \pm i$

2) Si studino le proprietà di iniettività, suriettività, eventuali inverse destre e sinistre per le seguenti funzioni $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$:
(1) $f_1(z) = z^2 + i$;
(2) $f_2(z) = (z + i)^2$;
(3) $f_3(z) = z - \overline{z}$;
(4) $f_4(z) = z/|z|$ se $z \neq 0$, $f_4(0) = 0$.
(5) $f_5(z) = z/\overline{z}$ se $z \neq 0$, $f_5(0) = 0$.
Per ogni $w \in \mathbf{C}$, si determini la sua controimmagine per ciascuna delle funzioni date.

3) Si consideri l'insieme $\{z^n | n \in \mathbf{N}\}$ per un fissato $z \in \mathbf{C}$; trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché:
(a) l'insieme sia finito;
(b) l'insieme ammetta una infinità di elementi tra loro allineati;
(c) l'insieme sia tutto contenuto nel cerchio unitario;
(d) l'insieme sia tutto esterno al cerchio unitario.

4) Come l'esercizio precedente per l'insieme delle radici n-esime di z al variare di n.

5) Definiamo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbf{C} | |z| = 1\}$ (circolo unitario o circonferenza unitaria) e $R(1) = \{z \in \mathbf{C} | z^n = 1$ per qualche $n \in \mathbf{N}\}$ (radici dell'unità). Mostrare che $R(1) \subseteq \mathbb{S}^1$ e che l'inclusione è stretta. Come si caratterizzano gli elementi di $R(1)$ in termini dell'argomento? Determinare le cardinalità di $R(1)$ e di $\mathbb{S}^1$.

6) È vero che tra due punti di $\mathbb{S}^1$ si trova sempre qualche punto di $R(1)$ (nel senso della geometria di $\mathbb{S}^1$ nel piano di Gauss)?

7) Scrivere (e disegnare sul piano di Gauss) le radici n-esime di $-i$, $1+i$, $1-i$ per $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

8) Determinare $\cos(5t)$, $\cos(8t)$, $\sin(6t)$, $\sin(9t)$ in termini delle funzioni trigonometriche di argomento t (e loro potenze).

9) Calcolare $\sin^3 t$, $\sin^4 t$, $\cos^5 t$, $\cos^6 t$ in termini delle funzioni trigonometriche di argomento t (e multipli di t).

10) Dimostrare le formule sul parallelogramma per i numeri complessi, e dare un' interpretazione geometrica.

11) Dare l'interpretazione geometrica nel piano di Gauss della inversione dei numeri complessi: se $z = \varrho e^{i\theta}$ allora $z^{-1} = \varrho^{-1}e^{-i\theta}$.

12) Dare l'interpretazione geometrica nel piano di Gauss del passaggio all'opposto dei numeri complessi: se $z = \varrho e^{i\theta}$ allora $-z = \varrho e^{(i\theta+\pi)}$.

13) Dare rappresentazioni grafiche nel piano di Gauss per la differenza e la divisione tra numeri complessi.

14) Rappresentare nel piano di Gauss tutti i logaritmi complessi di e e di ie. Per un qualsiasi $z = \varrho e^{i\theta}$ disegnare nel piano di Gauss la famiglia dei suoi logaritmi.

15) Se $|z| = 1$, è vero che le radici n esime di z si ottengono ruotando opportunamente (e di quanto?) le radici n-esime dell'unità?

16) Calcolare le lunghezze dei lati dei poligoni regolari di n lati inscritti nella circonferenza unitaria.

17) Mostrare che la funzione $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ che manda (ξ, ϱ) nel prodotto $\xi\varrho$ è una biiezione. Scrivere la funzione inversa.

18) Il semipiano di Poincaré è definito da $\mathfrak{P} = \{z \in \mathbf{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (numeri complessi la cui parte immaginaria è positiva). Il disco unità è $\mathfrak{D} = \{z \in \mathbf{C} | |z| < 1\}$ (numeri complessi di modulo strettamente inferiore a 1). Mostrare che la funzione $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ è una biiezione $\mathfrak{P} \to \mathfrak{D}$.
Determinare l'immagine della semicirconferenza di centro origine e raggio 1; e della semiretta verticale passante per l'origine.
Mostrare che i tratti di circonferenze di centro il punto $-i$ sono mandati in tratti di circonferenze di centro il punto 1.

19) Siano a, b, c, d numeri reali tali che $ad-bc = 1$. Consideriamo la funzione (detta trasformazione lineare fratta) $s: \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}$ è il semipiano di Poincaré) data da $s(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.
Mostrare che $\mathrm{Im}(s(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$, cosicché in effetti s è definita da $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{P}$.
Mostrare che s può essere scritta come composizione di funzione dei seguenti tre tipi: traslazione reale ($z \mapsto z + u$ con $u \in \mathbf{R}$), omotetie reali ($z \mapsto vz$ con $v \in \mathbf{R}$, $v > 0$), controinversioni ($z \mapsto -\frac{1}{z}$).
Descrivere le figure formate da $s(z)$ se z descrive le semicirconferenze con centro sull'asse reale, oppure le semirette ortogonali all'asse reale.

20) *Formula di interpolazione di Lagrange.* Dati $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ (tutti distinti) e $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{C}$ dimostrare che $F(X) = \sum_{i=0}^n b_i \frac{\prod_{j \neq i}(X-a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i-a_j)}$ è un polinomio di grado n che in a_i vale b_i per ogni $i = 0, \ldots, n$.

21) Discutere la fattorizzazione in $\mathbf{C}[X]$, in $\mathbf{R}[X]$ e $\mathbf{Q}[X]$ dei polinomi $X^n + 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; lo stesso per $X^n - 1$.