Esercizi Matematica 2 per Fisici 2006 - I settimana

1. Nel piano $\mathbf{R}^2$ consideriamo i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) mostrare che $\{u, v\}$ è una base di $\mathbf{R}^2$;

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha v + \beta w$ ove α e β sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:

i. $\alpha, \beta \in [0, \infty)$
ii. $\alpha + \beta = 1$
iii. $\alpha + \beta = 1$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$
iv. $\alpha, \beta \in [0, 1]$
v. $\alpha + \beta \leq 1$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$
vi. $\alpha + \beta \leq 1$;

(c) specificare le relazioni di inclusione tra gli insiemi precedenti;

(d) dire quali fra essi sono sottospazi vettoriali o sottospazi lineari di $\mathbf{R}^2$.

2. Nello spazio $\mathbf{R}^3$ consideriamo i vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) verificare che sono linearmente indipendenti e risolvere in α, β, γ la relazione $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$ per un vettore $x = {}^t\big(x_1, x_2, x_3\big)$ generico;

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha u + \beta v + \gamma w$ ove α, β e γ sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:

i. $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \infty)$
ii. $\alpha + \beta + \gamma = 1$
iii. $\alpha + \beta + \gamma = 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
iv. $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
v. $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
vi. $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$;

(c) specificare le relazioni di inclusione tra gli insiemi precedenti;

(d) dire quali fra essi sono sottospazi vettoriali o sottospazi lineari di $\mathbf{R}^3$.

3. Si determini se i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ formati dai vettori $x = {}^t\big(x, y, z\big)$ soddisfacenti alle condizioni seguenti siano o meno sottospazi (vettoriali o lineari) di $\mathbf{R}^3$:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;
(c) $|x| = |y|$ ($|\_|$ è il valore assoluto);
(d) $x + y = z$;
(e) $x + y = z + 1$;
(f) $x - y^2 = 0$ e $x = 0$;
(g) $x - yz = 0$ e $x = 0$.

In ciascuno dei casi, cercare di disegnare l'insieme in questione.

4. Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che esistono infiniti α, β e γ tali che $\alpha u + \beta v + \gamma w = {}^t\big(0, 0, 0\big)$.

(b) Si determinino tutti i possibili valori di α, β e γ tali che $\alpha u + \beta v + \gamma w = {}^t\big(2, 2, 1\big)$.

(c) Si dimostri che non esistono α, β e γ tali che $\alpha u + \beta v + \gamma w = {}^t\big(1, 1, 1\big)$.

5. Dati i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$, scrivere equazione cartesiana e parametrica della retta r per P e per Q.

6. Descrivere *in forma cartesiana*, cioè tramite equazioni, il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se tali vettori sono linearmente indipendenti e completare l' insieme $\{u, v, w\}$ ad una base di $\mathbf{R}^4$.

7. Verificare che i sottinsiemi di $\mathbf{R}^4$ formati dai vettori $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ soddisfacenti alle condizioni $x_1 - x_4 = 0 = x_1 + x_2$ $(= U)$ e $x_3 - x_4 = 0 = x_2 + x_3$ $(= V)$ sono sottospazi vettoriali e trovarne la dimensione evidenziando delle basi. Calcolare l' intersezione $U \cap V$ e trovarne una base. Trovare le equazioni del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ contenente sia U che V.

8. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x + y + z = 1 \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x - 2y + z = 0 \right\}.$$

(a) Dire se W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali o lineari di $\mathbf{R}^3$;
(b) determinare equazioni parametriche di W_1 e W_2;
(c) determinare $W_1 \cap W_2$. È un sottospazio vettoriale o lineare di $\mathbf{R}^3$?

9. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$:

$$Z_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s + t \\ s - t \\ s + t \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbf{R} \right\}, \qquad Z_2 = \left\{ \begin{pmatrix} s + 2t \\ 2s - t \\ s - t \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

(a) Si mostri che Z_1 e Z_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$;
(b) si trovino equazioni cartesiane per Z_1 e Z_2;
(c) si determini $Z_1 \cap Z_2$ e si dimostri che è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$;
(d) si mostri che $Z_1 + Z_2 = \mathbf{R}^3$.

10. Sia α il piano di $\mathbf{R}^3$ di equazione cartesiana $x + 2y + z = 0$. Sia P il punto di $\mathbf{R}^3$ di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Sia $\pi \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l' applicazione definita associando ad un punto Q l' intersezione di α e della retta r_Q passante per Q e parallele al vettore $\overline{OP}$. Determinare le coordinate di $\pi(Q)$ in funzione delle coordinate di Q.
(b) Sia ρ l' applicazione che associa ad un punto Q di $\mathbf{R}^3$ l' intersezione fra α e la retta passante per P e Q. Determinare il luogo di definizione D di ρ. Per $Q \in D$ determinare le coordinate di $\rho(Q)$ in funzione delle coordinate di Q.

11. Siano dati i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$. Nei seguenti casi dire se i sottospzi lineari di $\mathbf{R}^3$ definiti da $\mathbb{L} = P + U$ e $\mathbb{M} := Q + W$ siano sghembi o incidenti o paralleli. Determinare $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$.

(a) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(b) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.