Esercizi Matematica 2 per Fisici 2006 - I settimana

1. Siano v e w due vettori dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$ munito del prodotto scalare standard.

(a) dimostrare che v è perpendicolare a w se e solo se vale il "teorema di Pitagora" $||v||^2 + ||w||^2 = ||v - w||^2$.

(b) dimostrare che $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ (interpretazione geometrica?);

2. Sia $\mathbf{R}^n$ munito del prodotto scalare standard. Indichiamo con u, v, w elementi di $\mathbf{R}^n$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, fornendo dimostrazioni o controesempi:

(a) $u \neq 0$ e $u \cdot v = u \cdot w$ allora $v = w$;

(b) se $v \cdot w = 0$ per ogni w allora $v = 0$;

(c) se $u \cdot v = u \cdot w$ per ogni u allora $v = w$;

(d) $\|v + w\| = \|v - w\|$ se e solo se $v \cdot w = 0$;

(e) $\|v + tw\| \geq \|v\|$ per ogni $t \in \underset{\sim}{\mathrm{R}}$ se e solo se $v \cdot w = 0$;

3. Sia $\mathbf{R}^n$ munito del prodotto scalare standard. Nei seguenti casi scrivere il vettore v come somma di un vettore parallelo ad u e di uno ortogonale ad u:

(a) $u := {}^t(1, 2)$ e $v := {}^t(-2, 3)$;

(b) $u := {}^t(0, 2, -1)$ e $v := {}^t(-1, 1, 3)$;

(c) $u := {}^t(0, 1, -1)$ e $v := {}^t(-1, 3, 3)$.

4. Si consideri il vettore $v := {}^t(1, 0, 1)$ di $\mathbf{R}^3$. Sia dato un vettore generico $w = {}^t(x, y, z)$ di $\mathbf{R}^3$.

(a) Per $w \neq 0$, calcolare l' angolo fra v e w;

(b) determinare il sottoinsieme dei vettori w tali che w è ortogonale a v, cioè $v \cdot w = 0$. Verificare che è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$;

(c) calcolare la proiezione ortogonale $\pi(w)$ di w su v. Determinare per quali w si ha $\pi(w) = 0$;

(d) calcolare l' area del triangolo definito dai punti $\{\lambda v + \gamma w | 0 \leq \lambda, \gamma \leq 1, \lambda + \gamma \leq 1\}$;

(e) per i vettori w tale che v e w sono linearmente indipendenti, calcolare la proiezione ortogonale del punto ${}^t(1, 1, 1)$ sul piano $\langle v, w \rangle$.

5. Consideriamo $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare standard. Sia $u = {}^t(0, 1, 1)$ e $v := {}^t(1, 1, 0)$.

(a) Determinare un' equazione cartesiana della retta r perpendicolare al piano $\langle u, v \rangle$ e passante per l' origine;

(b) calcolare la proiezione ortogonale di un generico punto ${}^t(x, y, z)$ di $\mathbf{R}^3$ relativamente al piano $\langle u, v \rangle$;

(c) scrivere il vettore $w = {}^t(1, 1, 1)$ come somma di tre vettori $w_1 + w_2 + w_3$ con w_1 perpendicolare al piano $\langle u, v \rangle$, w_2 parallelo a u e w_3 parallelo a v;

(d) calcolare la distanza di ${}^t(1, 1, 1)$ dalla retta passante per ${}^t(0, 1, 1)$ e ${}^t(1, 1, 0)$;

(e) calcolare la distanza di ${}^t(1, 1, 1)$ dal piano $\langle u, v \rangle$.

6. Nello spazio tridimensionale si considerino i tre punti

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Trovare un' equazione cartesiana del piano α, contenente il triangolo ABC, e si calcoli larea di tale triangolo.

(b) Determinare la retta s perpendicolare al piano α, passante per il punto $P = {}^t(0, -3, 0)$.

(c) Calcolare la distanza tra la retta s e la retta r passante per A e B.

(d) Determinare la proiezione ortogonale della retta per O e per P sul piano α.

(e) Calcolare l' angolo fra il piano α e il piano xy.

7. Siano dati i punti $P_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$.

(a) Calcolare i volumi del parallelepipedo

$$\mathbf{P} := P_0 + \left\{ \lambda_1 \overline{P_0 P_1} + \lambda_2 \overline{P_0 P_2} + \lambda_3 \overline{P_0 P_3} | 0 \leq \lambda_i \leq 1 \forall i \right\}$$

e del simplesso

$$\Delta := P_0 + \left\{\lambda_1\overline{P_0P_1} + \lambda_2\overline{P_0P_2} + \lambda_3\overline{P_0P_3} | 0 \le \lambda_i \le 1 \forall i, \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \le 1\right\};$$

(b) calcolare l' angolo fra la retta passante per P_0 e P_1 e la retta passante per P_0 e P_3;
(c) sia α il piano passante per P_1, P_2 e P_3. Calcolare la distanza di P_0 da α;
(d) calcolare la distanza di P_2 dalla retta passante per P_1 e P_3;
(e) sia π la proiezione ortogonale rispetto ad α. Descrivere $\pi(\Delta)$ e calcolarne l' area.

8. Trovare le equazioni delle rette di $\mathbf{R}^3$ incidenti le rette

$$r := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \Big| \lambda \in \mathbf{R} \right\} \qquad s := \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ -\mu-1 \end{pmatrix} \Big| \mu \in \mathbf{R} \right\}$$

e formanti angoli uguali con i piani xy, xz e yz.

9. Si considerino le rette r ed s di $\mathbf{R}^n$ di equazioni rispettive

$$r : \begin{cases} x-y=0 \\ z=2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x-y+z=5 \\ 2x-y=4 \end{cases}.$$

(a) Trovare la retta n normale ad r ed s ed incidente sia r che s;
(ii) trovare la distanza tra r ed s;
(iii) sia P_t il punto di r la cui prima coordinata è t. Calcolare la distanza di P_t da s, in funzione di t;
(iv) scrivere le equazioni delle proiezioni ortogonali di r, s ed n sul piano passsante per l'origine, parallelo ad r e s.

10. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il piano α e la retta r, di equazioni

$$\alpha : \quad x-y=0, \qquad r : \quad \begin{cases} x+y=2, \\ y+z=2 \end{cases}.$$

(a) Si calcoli l'angolo fra α ed r.
(b) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta s, proiezione ortogonale della retta r sul piano α.
(c) Si determini la retta t, perpendicolare ad s, contenuta nel piano α, e passante per $P = r \cap s$.
(d) Si fissi su ciascuna delle rette r, s e t un punto a distanza 1 da P. Detti R, S e T tali punti, si determini il volume del parallelepipedo di lati $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ e $\overline{PT}$.

11. Sia π il piano ed r la retta di $\mathbf{R}^3$ di equazioni:

$$\pi : 2X - Y + Z = 2, \qquad r : \begin{cases} X+Y=2 \\ Y+Z=2 \end{cases}.$$

(a) Trovare l'equazione cartesiana della retta s, proiezione ortogonale di r su π;
(c) determinare le equazioni del luogo Q dei punti di $\mathbf{R}^3$ equidistanti da r e da s;
(c) descrivere l'intersezione di Q con il piano σ contenente r ed s.

12. Sia ρ un numero reale non negativo. Sia P un punto di $\mathbf{R}^3$, r una retta passante per P ed α un piano contentente r. Descrivere e disegnare i seguento luoghi dello spazio euclideo tridimensionale
(a) il luogo S dei punti di diatanza ρ da P;
(b) il luogo C dei punti di diatanza ρ da r;
(c) l' intersezione $S \cap C$;
(d) il luogo S dei punti di diatanza ρ da α.