Esercizi Matematica 2 per Fisici 2006 - II settimana

1. Si consideri l'applicazione f di $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^4$ definita da $f(s,t) = (2s+t, s-t, s+t, s+2t)$.
(a) Si mostri che f è lineare;
(b) si determini $\mathrm{Ker}(f)$;
(c) si trovi una base di $\mathrm{Im}(f)$.

2. Si consideri l'omomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ definito da $f(r,s,t) = (r+s+t, 2r-s)$.
(a) Si mostri che f è suriettivo;
(b) si determini $\mathrm{Ker}(f)$;
(c) trovare $v \in \mathbf{R}^3$ tale che $f^{-1}((1,2)) = v + \ker(f)$;
(d) mostrare che per ogni $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, esiste $v \in \mathbf{R}^3$, tale che $f^{-1}((a,b)) = v + \ker(f)$.

3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ di dimensione 3 e base v_1, v_2, v_3. Sia ϕ_λ l'applicazione lineare definita da

$$\phi_\lambda(v_1) = (\lambda-1)v_1 + 2v_2 - (\lambda+1)v_3, \qquad \phi_\lambda(v_2) = 2v_1 - \lambda v_3, \qquad \phi_\lambda(v_3) = -\lambda v_1 - v_2 + (\lambda+2)v_3$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$
(a) determinare immagine e nucleo di ϕ_λ al variare di λ;
(b) per quali valori di λ l'immagine dell'applicazione ϕ_λ contiene il vettore $v_1 + 2v_2 + 2v_3$?
(c) l'unione dei nuclei di ϕ_λ al variare di λ genera V?

4. Per ognuna delle seguenti condizioni, definire se possibile un' applicazione lineare $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ (non nulla e) che la verifichi:
(a) nucleo e immagine coincidano;
(b) il nucleo contenga l'immagine;
(c) il nucleo sia non nullo e contenuto nell'immagine;
(d) nucleo e immagine siano complementari;
(e) il nucleo sia diverso dall'immagine e la somma dei due non sia diretta.
Stesso problema nel caso di endomorfismi di $\mathbf{R}^4$.

5. Sia $V = \mathbf{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ dei polinomi di grado ≤ 4. Sia $d\colon V \to V$ la derivazione.
(a) Determinare la dimensione di V ed esibire una base;
(b) dimostrare che d è una applicazione lineare. Determinare nucleo ed immagine di d;
(c) dire se V è somma diretta di $\mathrm{Ker}(d)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
(d) Dati i seguento sottoinsiemi di V dire se sono una base o generatori o lineramente indipendenti
(i) $\{X^2-1, X-1, X^3-1, X^3, X^4\}$;
(ii) $\{\alpha,, X-\alpha, (X-\alpha)^2, (X-\alpha)^3, (X-\alpha)^4\}$ per $\alpha \in \mathbf{R}$;
(iii) $\{X-1, X^2, X^3, X^4, 2X-2, 3X^3-X^2\}$;
(iv) $\{X-1, X+1, X^2-1, X^2+1, X^3, X^4\}$;
(v) $\{f, df, d^2f, d^3f, d^4f\}$ per $f \in V$ di grado 4.

6. Sia $V = \mathbf{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ dei polinomi di grado ≤ 4.
(i) Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali ed esibirne una base:
(a) $U_p := \{f \in \mathbf{R}[X] | f(-X) = f(X)\}$;
(b) $U_d := \{f \in \mathbf{R}[X] | f(-X) = -f(X)\}$;
(c) $W = \{f \in \mathbf{R}[X] | f(1-X) = f(X)\}$;
(d) $Z = \{f \in \mathbf{R}[X] | f(1-X) = -f(X)\}$.
(ii) È vero che $\mathbf{R}[X]_{\leq 4} = U_p \oplus U_d$?
(iii) È vero che $\mathbf{R}[X]_{\leq 4} = W \oplus Z$?
(iii) Calcolare l' immagine tramite l' operatore di derivazione d degli spazi di cui al punto (i). Esibirne una base e calcolarne la dimensione.
(iv) Generalizzare i punti (i) e (iii) sostituendo 4 con un generico n.

7. Su $\mathbf{R}^2$ poniamo $\binom{x_1}{x_2} + \binom{y_1}{y_2} = \binom{x_1+y_1}{x_2+y_2}$, $\quad \lambda\binom{x_1}{x_2} = \binom{\lambda x_1}{0}$ per ogni $x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda \in \mathbf{R}$. Con queste operazioni, $\mathbf{R}^2$ diventa spazio vettoriale su $\mathbf{R}$?

8 Si consideri l'insieme $\mathbf{R}_{>0}$ dei numeri reali strettamente positivi, dotato delle seguenti operazioni: la "somma" di due numeri sia il loro prodotto, il prodotto scalare del reale $\alpha \in \mathbf{R}$ per l'elemento $r \in \mathbf{R}_{>0}$ sia r^α. Dimostrare che $\mathbf{R}_{>0}$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale reale il cui vettore nullo è 1.

9. Sia $Q(X) = c(X-\alpha_1)^{m_1} \cdots (X-\alpha_r)^{m_r}$ un polinomio di grado $n = \sum_{i=1}^r m_i$ in $V = \mathbf{R}[X]$. Supponiamo $\alpha_i \neq \alpha_j$ per $i \neq j$. Consideriamo l'insieme

$$V_Q = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} : P(X) \in V \text{ con } \deg P(X) < n \right\}$$

(a) mostrare che V_Q è spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ di dimensione n;
(b) mostrare che l'insieme $\{\frac{1}{(X-\alpha_i)^{j_i}} : j_i = 1, \ldots, m_i \text{ e } i = 1, \ldots, r\}$ è una base di V_Q su $\mathbf{R}$.

10. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
(a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $\phi\colon V \to V$ che soddisfa

$$\phi(e_1+e_2) = -e_1, \quad \phi(e_1-e_2) = 2e_2, \quad \phi(e_1+e_3) = e_1+e_4, \quad \phi(e_1-e_4) = e_2+e_4.$$

(b) Studiare nucleo e immagine di ϕ, e si determini l'antimmagine tramite ϕ del vettore $e_1+e_2+e_3+e_4$.
(c) Dimostrare che il sottoinsieme $A = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V,V) | \phi \circ \psi = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V,V)$. Se ne calcoli la dimensione. Determinare una base di A.
(e) Dimostrare che il sottoinsieme $B = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V,V) | \psi \circ \phi = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V,V)$. Se ne calcoli la dimensione e si esibisca una base.

11. Consideriamo lo spazio vettoriale reale delle applicazioni continue di $\mathbf{R}$ in sè.
(a) È vero che l'insieme formato dalle tre funzioni 1 (funzione costante), $\sin^2$ e $\cos^2$ è linearmente dipendente? Per le funzioni 1, sin e cos?
(b) si consideri l'insieme $\{\sin(nx) | n \in \mathbf{N}, n \neq 0\} \cup \{\cos(nx) | n \in \mathbf{N}\}$ e si dimostri che è un insieme linearmente indipendente;
(c) cosa dire dell'insieme $\{\sin(\alpha + nx) | n \in \mathbf{N}, n \neq 0, \alpha \in \mathbf{R}\}$?