Esercizi Matematica 2 per Fisici 2006 - III settimana

1. *Proiezioni.* Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbf{R}$. Sia f un endomorfismo di V, cioè una applicazione lineare $f\colon V \to V$, tale che $f^2 = f$.

(a) Si mostri che $V = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$;

(b) si mostri che esistono una base $(v_1, \ldots, v_n)$ di V ed un intero i, $1 \leq i \leq n+1$, tali che $f(v_j) = v_j$, se $j < i$, e $f(v_j) = 0$, se $j \geq i$;

(c) si verifichi che f è l' unico endomorfismo di V che manda un vettore $x = v+w$ con $v \in \mathrm{Im}(f)$ e $w \in \mathrm{Ker}(f)$ nel vettore v;

Ogni endomorfismo f tale che il quadrato coincide con l' applicazione stessa si dice una proiezione sullo schermo $\mathrm{Im}(f)$ dalla direzione $\mathrm{Ker}(f)$.

(d) Dati sottospazi U e W di V tali che $V = U \oplus W$. Dimostrare che esiste un'unica proiezione f di schermo U e direzione W.

2. Sia $V = \mathbf{R}^3$, W il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u = {}^t(1,0,1)$ e $v = {}^t(0,1,1)$. Sia $w = {}^t(1,1,1)$. Sia $\pi\colon \mathbf{R}^3 \to W$ la proiezione sul piano W nella direzione w.

(a) Verificare che π è un' applicazione lineare. Calcolarne nucleo ed immagine.

(b) Sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la composizione di π e dell' inclusione $W \subset \mathbf{R}^3$. Verificare che f è una proiezione nel senso dell' esercizio precedente.

(c) Calcolare schermo e direzione di f.

(d) Determinare la matrice di f rispetto alla base $\{u, v, w\}$.

(d) Sia ora α il piano di $\mathbf{R}^3$ definito da ${}^t(0,1,0)+W$. Sia $\pi\colon \mathbf{R}^3 \to \alpha$ la proiezione dalla direzione w. Sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la composizione di π e della inclusione $\alpha \subset \mathbf{R}^3$. Verificare che $f^2 = f$. È vero che f è una proiezione?

3. Sia $V = \mathbf{R}^4$, U il sottospazio di V generato dai vettori $u = {}^t(1,1,0,0)$ e $v = {}^t(0,1,1,0)$ e W il sottospazio di V generato dai vettori $w = {}^t(0,0,1,1)$ e $z = {}^t(0,1,0,1)$. Sia $\pi_U\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la proiezione su U dalla direzione W e $\pi_W\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la proiezione su W dalla direzione U.

(a) Dimostrare che $V = U \oplus W$. Dato un vettore $X = {}^t(X_1, \ldots, X_4) \in \mathbf{R}^4$ trovare α_i $i = 1, \ldots, 4$ tale che $X = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w + \alpha_4 z$.

(b) Dimostrare che l'applicazione $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita da ${}^t(X_1, \ldots, X_4) \to {}^t(\alpha_1(X), \ldots, \alpha_4(X))$ è lineare.

4. Sia $\pi\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l' applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$ è

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che $\pi^2 = \pi$ e che quindi π è una proiezione;

(b) determinare $U = \mathrm{Ker}(\pi)$ e $V := \mathrm{Im}(\pi)$ e verificare che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$;

(c) scrivere la matrice della proiezione su U parallelelmente a V;

(d) scrivere la matrice della simmetria di asse U e di direzione V.

5. *Simmetrie.* Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbf{R}$ ed f un endomorfismo di V tale che $f^2 = \mathrm{id}_V$.

(a) Si calcolino $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Ker}(f)$; si deduca che f è necessariamente un isomorfismo.

(b) Siano ora $V_+ = \{v \in V | f(v) = v\}$ e $V_- = \{v \in V | f(v) = -v\}$. Mostrare che $V = V_+ \oplus V_-$.

(c) Mostrare che esistono una base $(v_1, \ldots, v_n)$ di V ed un intero i, $1 \leq i \leq n+1$, tali che $f(v_j) = v_j$, se $j < i$, e $f(v_j) = -v_j$, se $j \geq i$.

(d) Si verifichi che f è l'unica applicazione lineare di V in sè che manda un vettore $x = v + w$ con $v \in V_+$ e $w \in V_-$ nel vettore $v - w$.

Ogni endomorfismo tale che il quadrato coincide con l'applicazione identica si dice una *simmetria* di asse (o specchio) V_+ e di direzione V_-.

(e) Dati sottospazi U e W di V tali che $V = U \oplus W$. Dimostrare che esiste un'unica simmetria f di asse U e direzione W.

Esercizi su sistemi lineari.

6. Sia dato il sistema lineare

$$\Sigma_a := \begin{cases} aX + Y = -1 \\ 2X + (a+1)Y = 2 \\ (2 - a^2)X + Y = a + 2 \end{cases}$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.
(i) Dire per quali a il sitema ha soluzioni in $\mathbf{R}^2$.
(ii) Per gli a per cui il Σ_a ammetta soluzioni dire se esse definiscono un punto od una retta di $\mathbf{R}^2$.

7. Sia dato il sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} X - Y + (k-1)Z = 0 \\ X - Y + 2Z = 0 \\ 2X + kY = 1 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$.
(i) Dire per quali k il sitema ha soluzioni in $\mathbf{R}^3$.
(ii) Per gli k per cui il Σ_k ammetta soluzioni determinare lo spazio delle soluzioni e dire se esse definiscono un punto od una retta od un piano di $\mathbf{R}^3$.
(iii) Dire se l' unione delle soluzioni di Σ_k al variare di $k \in \mathbf{R}$ definisce un sottospazio affine di $\mathbf{R}^3$.

8. Si considerino i due seguenti sistemi lineari

$$\Sigma_k := \begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 = 1 \\ kX_1 - X_2 = 2 \end{cases}, \qquad \mathcal{L}_k := \begin{cases} X_1 - 2X_2 + kX_3 = 1 \\ (k-1)X_1 - 2X_2 + 2X_3 = 1. \end{cases}$$

(i) Descrivere le sottovarietà lineari di $\mathbf{R}^3$ definite dalle soluzioni di Σ_k e $\mathcal{L}_k$ al variare di $k \in \mathbf{R}$;
(ii) Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ l' intersezione $\Sigma_k \cap \mathcal{L}_k$ consiste di un solo punto. Determinarlo.
(iii) Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ l' intersezione $\Sigma_k \cap \mathcal{L}_k$ è vuoto. Dire se per tali k le sottovarietà Σ_k e $\mathcal{L}_k$ sono paralele.
(iv) Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ l' intersezione $\Sigma_k \cap \mathcal{L}_k$ è una retta. Determinare tale retta.

9. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_\lambda := \begin{cases} (\lambda - 1)X_1 + 2X_2 + 3X_4 = 0 \\ \lambda X_2 + (\lambda + 1)X_4 = 1 \\ X_1 + \lambda X_3 + X_4 = 0 \\ (\lambda - 1)X_1 + X_4 = 0. \end{cases}$$

Al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ determinare lo spazio delle soluzioni di Σ_λ.

10. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} kX_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \\ kX_1 + X_2 + (k+3)X_3 + (k+3)X_4 = 1 \\ kX_1 + X_2 + 2X_3 + k^2X_4 = k + 1 \\ (k+1)X_3 + (k+2)X_4 = 1 \end{cases}$$

Al variare di $k \in \mathbf{R}$ determinare lo spazio delle soluzioni di Σ_λ.