Esercizi Matematica 2 per Fisici 2006 - V settimana

1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 10 & 23 & 17 & 44 \\ 15 & 35 & 26 & 69 \\ 25 & 57 & 42 & 108 \\ 30 & 69 & 51 & 133 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare per quali $k \in \mathbf{R}$ le seguenti matrici hanno determinante nullo. Dire per quali k la terza colonna è combinazione lineare delle altre tre e in caso affermativo dire se tale combinazione è unica

(i) $$\begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ k & 0 & -k & -k \\ -k & 2 & 1 & 3k \end{pmatrix};$$

(ii) $$\begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ k+1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & k+1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. *Determinanti ed equazioni di iperpiani.* Mostrare che il sottospazio W di $\mathbf{R}^n$ generato dai vettori linearmente indipendenti $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ ha equazione cartesiana ottenuta annullando il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ \vdots & v_1 & \cdots & v_{n-1} \\ X_n & & & \end{pmatrix}.$$

Si deduca che la più piccola sottovarietà lineare L dello spazio affine $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ contenente i punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$, supposti in posizione generica, ha equazioni cartesiane ottenute annullando il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_1 - a_1 & & & \\ \vdots & v_2 & \cdots & v_n \\ X_n - a_n & & & \end{pmatrix},$$

ove $(a_1, \ldots, a_n)$ sono le coordinate di P_1 e v_i è il vettore $\overline{P_1 P_i}$.

4. Siano dati i seguenti punti di $\mathbf{R}^4$:

$$Q := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad R := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la lunghezza del segmento TQ.
(ii) Determinare l' area del triangolo QRT.
(iii) Determinare il volume del simplesso $OQRT$ con $O = {}^t(0,0,0,0)$.
(iii) Usando l'esercizio (3) determinare l'equazione cartesiana dell' iperpiano $Q \vee R \vee T$.

5. Si considerino le sottovarietà lineari nello spazio affine di dimensione 4 su $\mathbf{R}$:

$$\alpha_k : \begin{cases} kX_1 + X_2 + X_3 + X_4 = k \\ k^2X_1 + 2kX_2 + (k+1)X_3 + (k+1)X_4 = k^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\beta_k : \begin{cases} 2k^2X_1 + 3kX_2 + (k+2)X_3 + (2k+1)X_4 = 2k^2 + \frac{1}{2} \\ kX_1 - (k-1)X_2 - (k+2)X_4 = 2k - \frac{3}{2} \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$.

(a) Dimostrare che α_k e β_k sono piani per ogni $k \in \mathbf{R}$;

(b) Al variare di $k \in \mathbf{R}$ determinare la posizione reciproca di α_k e β_k;

(c) trovare per quali k l'intersezione $\alpha_k \cap \beta_k$ è un punto. In tale caso trovare esplicitamente il punto d' intersezione;

(d) trovare i valori di k per cui $\alpha_k \cap \beta_k$ è una retta.

6. Si considerino le sottovarietà lineari nello spazio affine di dimensione 4 su $\mathbf{R}$:

$$\alpha_k : \begin{cases} kX_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \\ kX_1 + X_2 + (k+3)X_3 + (k+3)X_4 = 1 \\ (k+1)X_3 + (k+2)X_4 = 1 \end{cases}$$

$$\beta_k : kX_1 + X_2 + 2X_3 + k^2X_4 = k + 1$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$.

(a) Calcolare le dimensioni di α_k e β_k;

(b) determinare la posizione reciproca di α_k e β_k;

(c) determinare dimensione ed equazioni parametriche di $\alpha_k \cap \beta_k$.

7. Si considerino le sottovarietà lineari nello spazio affine di dimensione 5 su $\mathbf{R}$:

$$\alpha_k : \begin{cases} (k-1)X_1 + 2X_2 + 3X_4 = 1 \\ kX_2 + 2kX_4 - k^2X_5 = 1 \end{cases}$$

$$\beta_k : \begin{cases} X_1 + kX_3 + X_4 = 0 \\ (k-1)X_1 + (2k-1)X_4 + 2kX_5 = 0 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$.

(a) Calcolare le dimensioni di α_k e β_k;

(b) determinare la posizione reciproca di α_k e β_k;

(c) determinare dimensione ed equazioni parametriche di $\alpha_k \cap \beta_k$

8. Siano α e β sottovarietà lineari di dimensione m ed n rispettivamente, con $m \leq n$, nello spazio affine di dimensione 5 su $\mathbf{R}$ definite come le soluzioni dei sistemi lineari

$$\alpha : \; AX = b, \qquad \beta : \; CX = d.$$

Determinare condizioni necessarie e sufficienti su m ed n e sulla matrice $\begin{pmatrix} A & b \\ C & d \end{pmatrix}$ affinchè

(a) $\alpha \subseteq \beta$;

(b) α non è contenuto in β ed α e β sono parallele;

(c) α e β sono sghembe;

(d) $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ma α e β non sono nè sghembe nè parallele.