Esercizi Matematica 2 per Fisici 2006 - VI settimana

1. Verificare che 0, 1 e -1 sono autovalori della matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli autospazi relativi. La matrice A è simile ad una matrice diagonale?

2. Determinare autovalori, molteplicità, nullità e relativi autospazi delle seguenti matrici:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \text{(ii)} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(iii)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{(iv)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quali sono diagonalizzabili?

3. Studiare per quali valori dei parametri le seguenti matrici sono diagonalizzabili:

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

4. Discutere la diagonalizzabilità su $\mathbf{R}$ e su $\mathbf{C}$ delle matrici reali di ordine 2. In particolare, distinguere i seguenti casi

(a) $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0$;

(b) $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0$;

(c) $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$.

5. Studiare per quali valori del parametro la matrice seguente è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a^2-a & a \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Sia A una matrice quadrata $n \times n$. La matrice A si dice nilpotente se e solo se esiste k tale che $A^k = 0$.

i) Verificare che A è invertibile se e solo se 0 non è un autovalore di A.

ii) Verificare che A è nilpotente se e solo se il polinomio caratteristico di A è X^n.

7. Sia A una matrice quadrata in $M_n(C)$ e α un autovalore di A. Se $f(x)$ è un polinomio in $C[x]$, allora $f(\alpha)$ è un autovalore di $f(A)$.

Se A è invertibile, allora α^{-1} è un autovalore di A^{-1}.

8. Sia A una matrice quadrata tale che $A^2 = A$. Dimostrare che A è diagonalizzabile e che i suoi autovalori sono solo 0 oppure 1. Se B è una matrice quadrata della stessa dimensione di A e se $B^2 = B$, allora A e B sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

9. *La traccia di un endomorfismo* Definiamo la traccia $\mathrm{tr}(A)$ di una matrice quadrata A come la somma degli elementi nella diagonale principale. Mostrare che per ogni matrice invertibile P si ha $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP)$ (suggerimento: pensare al polinomio caratteristico di A e guardare il coefficiente del termine di grado $n-1$).

Dedurre che possiamo definire la traccia per una applicazione lineare come la traccia di una qualunque matrice che la rappresenti scelta una base dello spazio (cioè, la definizione appena data non dipende dalla base).

i) Mostrare che $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ e $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\mathrm{tr}(A)$ per $\alpha \in \underset{\sim}{\mathrm{R}}$.

ii) Dimostrare che $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ e che $\mathrm{tr}(AB) \neq \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$ in generale.

10. *La successione di Fibonacci.* La successione di Fibonacci è definita da $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ e poi ricorsivamente da $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$. Scrivere i primi numeri della successione. Determinare una formula chiusa, cioè non ricorsiva, che dia x_n in funzione di n.

Suggerimento: Osservare che $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ e iterando il procedimento: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$. Si tratta di calcolare la potenza n-sima di una matrice, che risulta diagonalizzabile. Esiste quindi una matrice invertibile H ed una matrice diagonale B tale che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = HBH^{-1}$. Ma $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = HB^nH^{-1}$ (perchè?)....

11. *Principio dei minori orlati ed equazioni di sottospazi.* Mostrare che il sottospazio W di $\mathbf{R}^n$ generato dai vettori linearmente indipendenti $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ha equazioni cartesiane ottenute annullando i minori d'ordine $m + 1$ della matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ \vdots & v_1 & \cdots & v_m \\ X_n & & & \end{pmatrix}.$$

Si mostri inoltre che, detta B la matrice in $M_{n,m}(\mathbf{R})$ le cui colonne siano i vettori dati e scelto un minore non nullo d'ordine m di B, per descrivere W è sufficiente (e necessario) annullare i minori d'ordine $m + 1$ di A che contengono la sottomatrice di B relativa al minore scelto (principio dei minori orlati).

Si deduca che la più piccola sottovarietà lineare L dello spazio affine $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ contenente i punti $P_0, P_1, \ldots, P_m$, supposti in posizione generica, ha equazioni cartesiane ottenute annullando i minori d'ordine $m + 1$ della matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_1 - a_1 & & & \\ \vdots & v_1 & \cdots & v_m \\ X_n - a_n & & & \end{pmatrix},$$

ove $(a_1, \ldots, a_n)$ sono le coordinate di P_0 e v_i è il vettore $\overline{P_0P_i}$. Si mostri inoltre che, scelto un minore non nullo d'ordine m della matrice le cui colonne sono $v_1, \ldots, v_m$, la sottovarietà L è definita annullando i minori d'ordine $m + 1$ di A che contengono la matrice relativa al minore scelto.