Esercizi Matematica 2 per Fisici 2006 - VII settimana

1. Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di A. Trovarne autovalori ed autovettori. Determinarne la forma di Jordan J. Trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH = J$.

2. Si considerino le suguenti matrici A_λ

$$\begin{pmatrix} 1-2\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & 1+\lambda & \lambda \\ 2\lambda & \lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.
(i) Determinare autovalori ed autovettori di A_λ;
(ii) trovare i λ per cui A_λ è diagonalizzabile;
(iii) determinare gli autospazi relativi ad A_λ;
(iv) si determini il polinomio minimo e la forma di Jordan J_λ di A_λ;
(v) trovare una matrice invertibile H_λ tale che $H_\lambda^{-1}A_\lambda H_\lambda = J_\lambda$.

3. Si considerino le seguenti matrici A

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Passando ai numeri complessi se necessario,
(i) calcolare il polinomio caratteristico;
(ii) trovarne autovalori ed autovettori;
(iii) dire se è diagonalizzabile;
(iv) determinarne la forma di Jordan J e il polinomio minimo;
(v) trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH = J$.

4. Dimostrare che due matrici quadrate di ordine ≤ 3 sono simili se e solo se hanno uguali polinomi caratteristico e minimo.

Si considerino le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che A e B hanno uguali polinomi caratteristico e minimo ma non sono simili.

5. Per i seguenti polinomi $P(X)$,

$$P(X) = X^2 - X, \qquad P(X) = X^2 - 1, \qquad P(X) = X^2 + 1, \qquad P(X) = X^3 - X^2,$$

data una matrice quadrata A di ordine n a coefficienti in $\mathbf{R}$ tale che $P(A) = 0$,
(i) determinare i possibili autovalori reali e complessi di A;
(ii) dire se A è necessariamente diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{C}$;

(iii) in caso di risposta negativa a (ii) fornire dei controesempi.

6. Sia A una matrice quadrata di ordine n a coefficienti in $\mathbf{R}$. Sia $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l' endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è A.

(i) Dimostrare che φ è una proiezione se e solo se il polinomio minimo di A divide $X^2 - X$. Dimostrare che in tal caso A è diagonalizzabile e caratterizzare i relativi autospazi in termini della direzione e dello schermo di φ.

(ii) Dimostrare che φ è una simmetria se e solo se il polinomio minimo di A divide $X^2 - 1$. Dimostrare che in tal caso A è diagonalizzabile e caratterizzare i relativi autospazi in termini di asse e direzione di φ.

7. Sia V_n lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ dei polinomi di grado $\leq n$. Sia $d: V_n \to V_n$ la derivazione. Calcolarne autovalori ed autovettori, la forma di Jordan J, il polinomio minimo ed una base di V_n rispetto alla quale la matrice di d è J.

8. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ di dimensione 10. Si determinimo il polinomio caratteristico, il polinomio minimo e la forma di Jordan di tutti gli endomorfismi φ di V soddisfacenti

$$2 = \dim \operatorname{Ker}(\varphi - 5) < \dim \operatorname{Ker}(\varphi - 5)^2 < \dim \operatorname{Ker}(\varphi - 5)^3 = 4$$

$$2 = \dim \operatorname{Ker}(\varphi - 2) < \dim \operatorname{Ker}(\varphi - 2)^4 = 4, \quad \dim \operatorname{Im}(\varphi) = 8.$$

9. Date le seguenti applicazioni $f: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$
(a) $f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2$;
(b) $f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_2 y_1$;
(c) $f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1^2 + y_1^2$;
dire quali sono applicazioni bilineari simmetriche e quali no.

10. Determinare le matrici delle seguenti forme bilineari reali rispetto alla base canonica:
(a) $f: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \mapsto x_1 y_1 - x_1 y_2 - y_1 x_2$;
(b) $f: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) \mapsto x_1 y_1 + x_1 y_2 + y_1 x_2 - 2x_3 y_1 - y_3 x_1 - 3x_2 y_2 + 6x_2 y_3 + 6x_3 y_2$.

11. *(Piano iperbolico)* Sia $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sia $g_A: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l' applicazione bilineare e simmetrica di $\mathbf{R}^2$ la cui matrice rispetto alla base canonica è A.

(i) Calcolare rango e segnatura di g_A. Calcolare una base di $\mathbf{R}^4$ che diagonalizzi g_A. Esibire un sottospazio isotropo di dimensione massimale.

(ii) Dare condizioni necessarie e sufficienti su rango e segnatura di una applicazione bilineare e simmetrica su $\mathbf{R}^2$ affinchè esista una base rispetto alla quale la matrice di g sia A.

12. Sia V un $\mathbf{R}$–spazio vettoriale di dimensione 2. Sia $F: V \times V \to \mathbf{R}$ una applicazione bilineare simmetrica non degenere. Siano e ed f elementi linearmente indipendenti di V tali che e non sia isotropo per F. Dimostrare che esiste un vettore γ della forma $f + \beta e$ tale che $\gamma \in e^{\perp}$ e $F(\gamma, \gamma) \neq 0$. Calcolare la matrice di F rispetto alla base $\{e, \gamma\}$.