Esercizi Matematica 2 per Fisici 2006 - VIII settimana

1. Siano date le seguenti forme quadratiche Q a coefficienti in $\mathbf{R}$

$$2X_1^2+6X_1X_2+2X_2^2=0; \qquad 2X_1^2+X_2^2+X_0X_1+X_0X_2+2X_1X_2+2X_2X_3=0$$

$$2X_2^2+X_3^2-4X_1X_3=0; \qquad X_1^2+6X_1X_2-4X_1X_3+4X_2^2-18X_2X_3+6X_3^2=0.$$

(a) Calcolare il rango e la segnatura;
(b) calcolarne una forma canonica ed il corrispondente cambio di riferimento;
(c) Dire se q ammette soluzioni non banali. Dire se $q=t$ con $t\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$ ammette soluzioni.

2. Siano date le seguenti matrici simmetriche reali A:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 & 0 \\ 9 & 9 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ciascuna di esse sia g_A la applicazione bilineare simmetrica su $\mathbf{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è A
(i) dire se g_A è degenere o meno;
(ii) calcolarne il rango e la segnatura;
(iii) calcolare una base rispetto alla quale g_A sia in forma canonica;
(iv) calcolare la massima dimensione di un sottospazio isotropo di $\mathbf{R}^4$ ed esibire un sottospazio isotropo massimale;
(v) dire se $\mathbf{R}^4$ contiene piani iperbolici (relativamente a g_A);
(vi) dire se la forma quadratica associata q_A ammette solouzioni reali non banali.

3. Sia data la matrice simmetrica reale

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Dimostrare che la forma quadratica q_A associata ad A è il prodotto $q_A=2m_1m_2$ ove m_1 ed m_2 sono forme lineari linearmente indipendenti. Determinare m_1 ed m_2.
2) Calcolare rango e segnatura di A.
3) Dare un criterio necessario e sufficiente sul rango e la segnatura di una matrice reale simmetrica $B\in\mathbf{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ affinchè la forma quadratica associata q_B sia prodotto di forme lineari m_1 ad m_2 (anche coincidenti).

4. Si consideri la seguente famiglia di matrici reali simmetriche

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ -1 & -2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

con $\lambda\in\mathbf{R}$. Sia q_λ la forma quadratica di $\mathbf{R}^4$ associata e sia g_λ l' applicazione bilineare simmetrica su $\mathbf{R}^4$ di matrice A rispetto alla base canonica.
(i) determinare pre quali λ l' applicazione g_λ è degenere;
(ii) al variare di λ calcolare il rango e la segnatura di g_λ;

(iii) calcolare una base tale che la matrice associata di g_λ sia in forma canonica;
(iv) al variare di λ calcolare la massima dimensione di un sottospazio isotropo di $\mathbf{R}^4$ ed esibire un sottospazio isotropo massimale;
(vi) dire per quali λ la forma q_λ ammette solouzioni reali non banali.

5. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^2$ munito del solito prodotto scalare. Sia $\mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ il gruppo delle matrici delle isometrie di $\mathbf{R}^2$ rispetto alla base canonica.

(i) Si mostri che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti relazioni

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \ . \end{cases}$$

Se ne deduca che esiste un unico $\theta \in \mathbf{R}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, tale che $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm cos\theta \end{pmatrix}$.

(ii) Si mostri che il sottoinsieme $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbf{R} \right\}$ è il sottogruppo delle matrici di $\mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ di determinante 1 (detto *Gruppo speciale ortogonale* oppure *Gruppo delle rotazioni del piano*).

(iii) Ad ogni numero complesso $z = a + b\sqrt{-1}$, di modulo 1, con $a, b \in \mathbf{R}$, si faccia corrispondere la matrice $A_z := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dimostrare che tale applicazione definisce un isomorfismo dal gruppo moltiplicativo U_1 dei numeri complessi di modulo 1 al gruppo $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$.

6. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$ munito del solito prodotto scalare e si indichi con $\mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ il gruppo delle matrici delle isometrie di $\mathbf{R}^3$, con riferimento alla base canonica.

(i) Si mostri che $A \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ se e solo se le sue colonne (risp. righe) sono una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$; oppure se e solo se $A^tA = I_3$. Se ne deduca che, se $A \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ allora $\det A = \pm 1$.

(ii) Si mostri che il sottoinsieme $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ di $\mathrm{O}_3(\mathbf{R})$, costituito dalle matrici di determinante 1 è un sottogruppo di $\mathrm{O}_3(\mathbf{R})$.

Sia $A \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$.

(iii) Mostrare che A ha un autovalore uguale ad 1 oppure -1 (sugg.: confrontare gli autovalori di A e di $A^t = A^{-1}$).

(iv) Dedurre che esiste una base ortonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbf{R}^3$ rispetto alla quale A assume la forma

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ (Vedere Esercizio 10 del foglio precedente).

Sia $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$.

(v) Dimostrare che esiste una base ortonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbf{R}^3$ rispetto alla quale A assume la forma

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

con $0 \leq \theta < 2\pi$ (Vedere Esercizio 10 del foglio precedente).

(vi) Dimostrare che $2\cos\theta = \mathrm{tr}A - 1$ (ove $\mathrm{tr}A$ è la *traccia* di A, cioè la somma degli elementi sulla diagonale di A).

La direzione di v_1 è detta *l'asse* di A, mentre θ è detto *l'anglo di rotazione* di A.