Esercizio per casa - Matematica 2 per Fisici 2006 - VIII settimana

Siano n_5 ed n_6 le ultime due cifre del numero di matricola. Sino $n, m \in \{2, 3, 4, 5\}$ tali che $n_6 - n$ ed $n_5 - m$ siano multipli interi di 4. Si consideri la seguente matrice simmetrica reale A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & m-1 \\ n-1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & -m-1 \end{pmatrix}.$$

Sia g_A la applicazione bilineare simmetrica su $\mathbf{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è A

(i) dire se g_A è degenere o meno. Eventualmente calcolarne il nucleo;

(ii) calcolarne il rango e la segnatura;

(iii) calcolare una base $\{v_1, \ldots, v_4\}$rispetto alla quale g_A sia in forma canonica e tale che $\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ per $i = 1, \ldots, 4$. Trovare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale Δ tali che $P^t A P = \Delta$;

(iv) calcolare la massima dimensione di un sottospazio isotropo di $\mathbf{R}^4$ ed esibire un sottospazio isotropo massimale;

(v) dire se la forma quadratica associata q_A ammette soluzioni reali non banali. È vero o falso che l'equazione di secondo grado ${}^t X A X = k$ ammette soluzione per ogni $k \in \mathbf{R}$?

(vi) dire se $\mathbf{R}^4$ contiene piani iperbolici (relativamente a g_A);

(vii) dire se $\mathbf{R}^4$ contiene due piani iperbolici fra loro ortogonali (relativamente a g_A);