Lauree in Ingegneria Chimica e dei Materiali. Matematica 1 (2007–2008)

Settimane 2 e 3, 8-17 ottobre. Lezioni 5-10

Argomenti svolti a lezione (indicativo):
- Composizione di funzioni. Determinazione del dominio di funzioni reali. Grafici di funzioni traslate etc. Disequazioni irrazionali e con valori assoluti.
- Successioni. Limiti e loro proprieta‘. Teorema confronto e 2 carabinieri. Limiti di funzioni monotone. Operazioni sui limiti. Forme di indecisione. Infinitesimi, infiniti, successioni asintotiche e loro uso nel calcolo dei limiti. Alcuni limiti notevoli.
- Disuguaglianza triangolare, disuguaglianza di Bernoulli. Principio di induzione. Fattoriale. Formula di Stirling ($n^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n! e^n}{\sqrt{n}}$).

Testo: Cap 1, sezioni 2.2. e 4. Cap. 3, sez. 1.

Esercizi

1. Dal testo: Tutti quelli del Cap. 3, sezione 1. Dal volume di esercizi associato al testo (o da qualunque altro eserciziario): un certo numero di quelli sulle successioni (attenzione: non abbiamo ancora fatto la regola di de l'Hôpital).
2. Disegnare (qualitativamente) il grafico delle seguenti funzioni: (a) $f(x) = |2x-3|+|x+1|$. (b) $f(x) = |x^2-3x+2|+1$. (c) $f(x) = |x^2-3x+2| - x^2 \operatorname{sgn}(x^2-3x+2)$. (d) $f(x) = |x^2-1|-x^2$. (e) $f(x) = \big||x^2-1|-x^2\big|$. (f) $f(x) = 1 + \tan x$. (g) $f(x) = \frac{1}{x-2}$. (h) $f(x) = \arctan(2x+4)$. (i) $f(x) = \log(3x-2)$. (j) $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{2})$.
3. Risolvere le seguenti disequazioni: (a) $\sqrt{x^2-1} < x$. (b) $\sqrt{x^2-2} \geq x$. (c) $|\arctan(x-1)| > \frac{\pi}{4}$. (d) $\ln(\sqrt{x^2+e^2} - |x|) > 1$. (e) $|\arctan(3x)| < -1$. (f) $\frac{3x-1}{2x-1} > 0$. (g) $\sqrt{2x-1} < \sqrt{1-x^2}$. (h) $|\sqrt{x} - x| \leq 1$. (i) $\left|\frac{2x-1}{1-x}\right| \geq 2$. (j) $\log_{1/2} \frac{x^2-2}{1+|x|} > 1$. (l) $\frac{x^2(x-1)}{x^2-3x+2} \geq 0$.
4. Sia f una funzione periodica di periodo $T > 0$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non periodica. La funzione $f \circ g$ è periodica? E $g \circ f$? Se sì, di quale periodo?
5. Nei seguenti casi, scrivere $f \circ g$ e $g \circ f$ (se esistono) e determinarne il dominio: (a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. (b) $f(x) = \ln x$, $g(x) = 3 + x$. (c) $f(x) = x^{1/3}$ (definita su tutto $\mathbb{R}$), $g(x) = x^2 - 1$.

6. Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive, suriettive, invertibili. Se non sono invertibili, restringere opportunamente dominio e/o codominio in modo da ottenere una funzione invertibile. Scrivere poi l'inversa. (a) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. (b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{|x+1|}$. (c) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sqrt{x^2})$.
7. Calcolare il limite per $n \to +\infty$ di ciascuna delle seguneti successioni, se esiste:
   (a) $\frac{4+(\cos n)^2}{n}$.
   (b) $\frac{(\ln n)^2+3^n \sin \frac{1}{n}}{3^n+7^n}$.
   (c) $\frac{\ln(n^2)}{\ln(2n^2+3)}$.
   (d) $\frac{n^3 \sin(n^{-2})+(\ln(2n+1))^2}{n+|\sin n|}$.
   (e) $\big((n+1)^2 - \cos n\big)^{1/n}$.
   (f) $\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 + \ln(n) - \sin(1/n)}$.
   (g) $n^p(\ln(n + n^2) - n!)$, al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$.
   (h) $n^p(\ln(n + n^2) - n^2)$, al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$.
   (i) $n^{pn}e^{-n}$, al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$.