Lauree in Ingegneria Chimica e dei Materiali. Matematica 1 (2007–2008)

Settimane 5-7, 29 ottobre-21 novembre. Lezioni 15-25

Argomenti svolti a lezione (indicativo):
- Limiti e funzioni continue. Testo: capitolo 4, sezioni 5 e 6
- Calcolo differenziale (derivate, loro calcolo e proprietà, massimi e minimi, monotonia, teorema di de L'Hôpital, convessità, studi di funzione, asintoti obliqui, polinomi di Taylor, cenno sulla serie di Taylor, differenziali). Testo: Cap 5, tutto eccetto sez. 7.4, 7.5 e 8.2 e paragrafo su "derivata logaritmica".
-Integrali di funzioni continue, proprietaà, funzione integrale, primitive, teorema fondamentale del calcolo integrale; integrali elementari. Testo, cap. 6: sezioni 1,2,3,4,5.1 (fino a pg 289), 8.

Esercizi

1. Dal testo: Tutti quelli pertinenti.

2. Derivate

2.1 Scrivere, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$, nei casi seguenti:
   (a) $f(x) = \cos(\log x)$, $x_0 = 1$.
   (b) $f(x) = \log |x|$, $x_0 = -e^2$.
   (c) $f(x) = |x^2 - 1|$, $x_0 = 0$ e poi $x_0 = -1$

2.2 Determinare $x_0 < 1$ in modo che la funzione $f(x) = x^3 - x$ sia invertibile nell'intervallo $(x_0, +\infty)$.

2.3 Verificare che la funzione $f(x) = x^5 - x$ è invertibile in un intorno del punto $x = 1$ e scrivere, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico di tale inversa nel punto $(0, 1)$.

2.4 Il volume della sfera di raggio r è $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ e l'area della sua superficie è $A(r) = 4\pi r^2$. Scrivere il volume in funzione dell'area, l'area in funzione del volume, e calcolare le derivate di entrambe le funzioni sia direttamente tramite la loro espressione che usando la regola a catena.

3. Determinare massimo e minimo assoluti, se esistono, delle seguenti funzioni:
   (a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $x \in [-1/2, 1]$.
   (b) $f(x) = \sin(x^2)$, $x \in (-\sqrt{2/3}, 1]$.

(c) $f(x) = \sin(x^2)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
(d) $f(x) = xe^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$.
(e) $f(x) = xe^{-nx}$, $x \in [0, +\infty)$, al variare del parametro $n \in \mathbf{N}$
(f) $f(x) = \frac{x}{\log x}$, $x \in (1, +\infty)$.
(g) $f(x) = \frac{\log |x|}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$.

4. Studi di funzione.

4.1 Studiare le seguenti funzioni, determinandone in particolare il dominio di definizione, i punti di discontinuità e non derivabilità (e classificandoli), gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi. Lo studio degli eventuali asintoti obliqui all'infinito e della convessità possono essere trascurati, se sembrano difficili. Se la funzione è periodica è sufficiente tracciarne il grafico in un dominio di periodicità:
(a) $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{|x-1|}$
(b) $f(x) = \log \frac{2x}{2x+3}$
(c) $f(x) = \frac{x+1}{|x+3|-1}$
(d) $f(x) = \sqrt{4x^2-1} - 2x$.
(e) $f(x) = \arctan \left| \frac{1-\log x}{1+\log x} \right|$.
(f) $f(x) = \left| \frac{\log(x+1)}{x+1} \right|$.
(g) $f(x) = \frac{|\tan x|}{3+(\tan x)^2}$.
(h) $f(x) = \frac{x}{\log |x|}$.
(i) $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x-1}$.
(l) $f(x) = \log \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right)$.

4.2 Esercizi (svolti e non) sugli studi di funzione (e su quasi tutti gli altri argomenti del corso) possono essere trovati su qualunque eserciziario. In particolare, segnalo
`http://calvino.polito.it/canuto-tabacco/analisi_1/esercizi.html`

5. Esercizi su polinomi di Taylor

5.1 Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine n centrato in x_0 della funzione $f(x)$ nei casi seguenti:
(a) $f(x) = x - \cos(-2x)$, $x_0 = \pi$, $n = 3$.
(b) $f(x) = e^x - 1 - x$, $x_0 = 0$, $n = 1$ e poi $n = 3$.
(c) $f(x) = \log(x) + 1 - x$, $x_0 = 1$, $n = 2$.
(d) $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$, $n = 2$.
(e) $f(x) = xe^x$, $x_0 = 1$, $n = 2$.
(f) $f(x) = \log(\cos(x))$, $x_0 = 0$, $n = 2$.

5.2 Calcolare i seguenti limiti sia con de l'Hôpital che con sviluppi di Taylor:
(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{(x^2)}+2\cos(x)-3}{(\sin(x^2))^2}$.

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3)-\log x-3\sin(\frac{1}{x})}{\cos(\frac{1}{x})-1}$.

6. (Primi) esercizi su integrazione

6.1 Calcolare i seguenti integrali definiti o indefiniti:

(a) $\int e^{2x}dx$.

(b) $\int_2^4 e^{-2x}dx$.

(c) $\int_{-2}^{-1}(x^5 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x})dx$.

(d) $\int_{-\pi/2}^{\pi}(\sin x - 3\cos x)dx$.

(e) $\int \sin(2x)dx$.

6.2 Determinare l'area della regione del piano compresa fra il segmento $[0,3]$ dell'asse x ed il grafico di $x \mapsto x^2 + 2(x-1)$, $x \in [0,3]$.

6.3 Verificare che la funzione $F(x) = x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{3}$ è una primitiva di $2\sqrt{9-x^2}$ in $[-3,3]$.

6.4 È vero che se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ allora qualunque sia $x_0 \in [a,b]$ e qualunque sia $k \in \mathbb{R}$ esiste una primitiva F di f tale che $F(x_0) = k$? È essa unica?

6.5 Determinare tutte le primitive di $x(x+1)$ e poi quella che assume il valore 1 in $x = 0$.

6.6 Determinare tutte le primitive di $\sin x - \cos x$ e poi quella che assume il valore 0 in $x = \pi/2$.