LAUREA IN MATEMATICA
CORSO DI FISICA MATEMATICA
I COMPITINO 2010 — 12 febbraio 2010
Versione A

Esercizio 1. Tracciare schematicamente il ritratto in fase dell'equazione $\dot{z} = (z^2 - 1)z^2 + \mu$, $z \in \mathbf{R}$, al variare del parametro $\mu \in \mathbf{R}$. Tracciare poi schematicamente il diagramma di biforcazione degli equilibri, specificando la stabilità degli equilibri.

Esercizio 2. Si consideri il sistema differenziale

$$\dot{x} = -x - y + x^2 \,, \qquad \dot{y} = x - y - xy \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,.$$

(a) Cosa si può dire della stabilità dell'origine utilizzando il metodo spettrale?
(b) Si può utilizzare la funzione $W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ come funzione di Lyapunov per studiare le proprietà di stabilità dell'origine? Se sì, cosa permette di concludere?

Domanda 3. Rispondere in modo *preciso ma sintetico* alle seguenti domande:
(a) Definire i sottospazi stabile, instabile e centrale per l'equazione lineare $\dot{z} = Az$, $z \in \mathbf{R}^n$. Quali proprietà ha la restrizione del flusso a ciascuno di essi (si assuma A diagonalizzabile)?
(b) Cos'è un insieme invariante di un'equazione differenziale? Ed un integrale primo? Che relazione c'è fra di essi?
(c) Sia $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenziabile e si consideri l'equazione $\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Quale integrale primo si usa per disegnarne il ritratto in fase? Mostrare che gli insiemi di livello di tale integrale primo sono varietà unidimensionali eccetto dove .... (Fare anche il calcolo necessario a mostrarlo, ma mantenere la risposta sintetica).
(d) Cosa significa che due flussi sono coniugati da un diffeomorfismo? Sotto quale condizione sui rispettivi campi vettoriali essi lo sono?

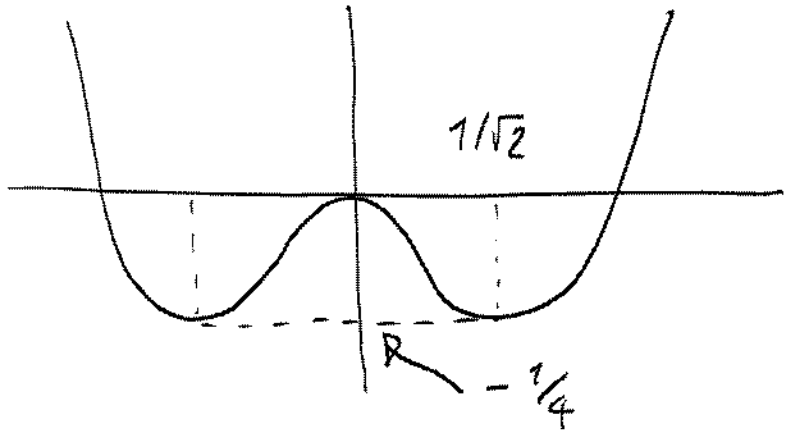
Domanda 4. Enunciare e dimostrare, a scelta, *un solo* risultato relativo ad uno dei seguenti argomenti:
(a) Teorema di rettificazione locale.
(b) Gli equilibri iperbolici di un'equazione differenziale sono isolati.
(c) Abbassamento dell'ordine per mezzo di un integrale primo.

- *Riconsegnare tutti i fogli (anche quelli non usati) ed il testo.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti. Viene valutato solo ciò che è scritto sui fogli di bella. Scrivere nome e cognome sui fogli di bella.*
- *Leggere con attenzione il testo. Negli esercizi, giustificare tutte le risposte. Nelle domande di teoria, rispondere con pertinenza alle domande fatte (e senza divagare).*
- *Non si può consultare alcun tipo di materiale.*

Esercizio 1

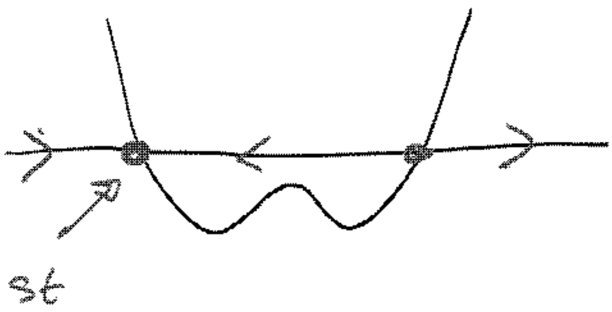
$\dot{z} = f(z,\mu)$ con $f(z,\mu) = P(z) + \mu$

Grafico di P:

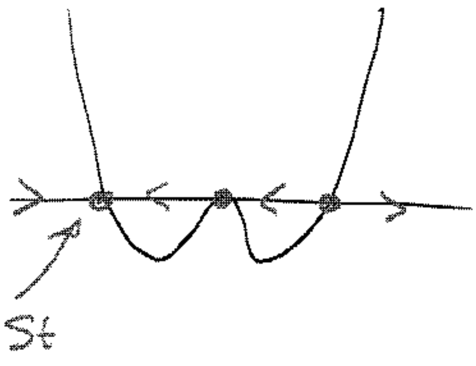


Il grafico di $f(z,\mu)$ si ottiene traslando quello di P. Dunque, i ritratti in fase sono:

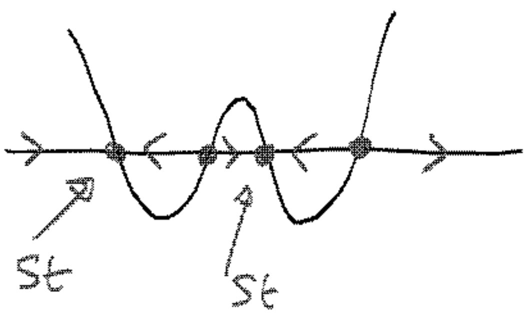
$\mu < 0$



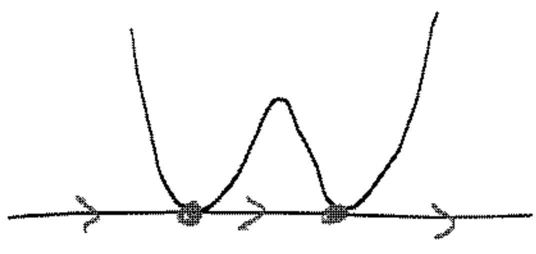
$\mu = 0$



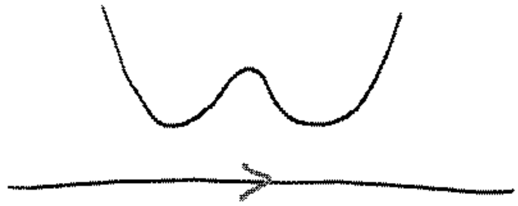
$0 < \mu < 1/4$



$\mu = 1/4$



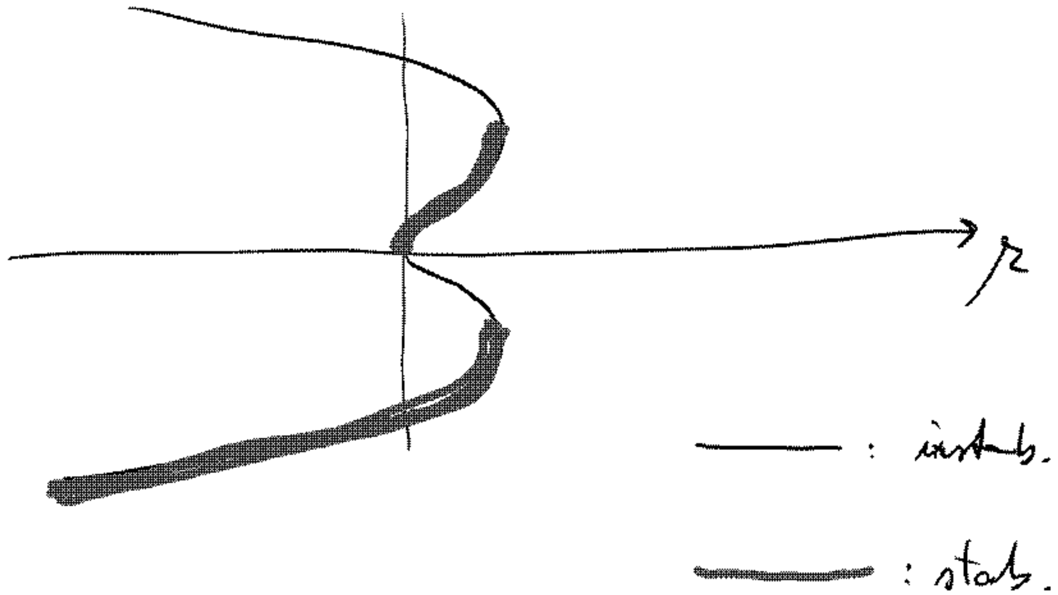
$r > 1/4$



Il diagramma di biforcazione è il luogo nel piano (r, z) ove $f(z, r) = 0$, ovvero

$$r = -P(z)$$

Nel piano (z, r) esso è dunque il grafico di $-P$. Riflettendo attorno alla diagonale, ed aggiungendo le informazioni sulla stabilità, si ottiene



(Si verificano 3 biforcazioni tangenti)

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$

$$\begin{cases} \mathring{x} = -x - y + x^2 \\ \mathring{y} = x - y - xy \end{cases}$$

(a)

(0,0) è chiaramente un equilibrio.
Siccome il campo vettoriale è polinomiale la linearizzazione in (0,0) è data dai termini lineari e ha matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. I suoi autovalori sono $-1 \pm i$. Poiché hanno tutti $\mathrm{Re} < 0$, il metodo spettrale assicura che (0,0) è asintoticamente stabile.

(b)

W ha chiaramente un minimo stretto in (0,0) [ed in esso vale zero]. La sua derivata di Lie è

$$\begin{aligned} \mathring{W} &= x\mathring{x} + y\mathring{y} \\ &= x(-x-y+x^2) + y(x-y-xy) \\ &= -(x^2+y^2) + x^3 - xy^2 \end{aligned}$$

ed è < 0 in intorno bucato di

$(0,0)$ (perché è ivi asintotica a $-x^2-y^2$, oppure perché $\text{grad}\, W|_{(0,0)} = 0$ e $\text{Hess}\, W|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ è def neg, cosicché W ha un massimo stretto in $(0,0)$). Dunque il (II) teorema di Lyapunov implica che $(0,0)$ è asintoticamente stabile.