LAUREA IN MATEMATICA
CORSO DI FISICA MATEMATICA
I COMPITINO 2010 — 1 aprile 2010
(II prova)

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\dot{x} = 2(x-1) - ky + (x-1)y\,, \qquad \dot{y} = 1 - x + 2y + (x-1)y^2 \qquad (\star)$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbf{R}$.

(a) Linearizzare il sistema attorno all'equilibrio $(1, 0)$.

(b) Tracciare il ritratto in fase del sistema linearizzato del punto precedente, al variare di $k \in \mathbf{R}$. (Si possono tralasciare i valori di k per i quali la matrice ha un autovalore doppio oppure un autovalore nullo).

(c) Stabilire per quali valori di k l'equilibrio $(1, 0)$ è iperbolico. Stabilire per quali valori di k il sottospazio instabile del sistema linearizzato ha dimensione 2 e per quali ha dimensione 1.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -(2 + 3x)x\,, \qquad x \in \mathbf{R}$$

(a) Tracciarne il ritratto in fase.

(b) Stabilire per quali valori del parametro $v \in \mathbf{R}$ la soluzione con dato iniziale $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v$ è periodica. (Suggerimento: scrivere una condizione su v che coinvolga l'energia).

Domanda 3.

(a) Si consideri l'equazione $\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Sia $\bar{x}$ una configurazione di equilibrio. Scrivere la linearizzazione dell'equazione nell'equilibrio corrispondente a $\bar{x}$ e stabilire sotto quali condizioni su $V''(\bar{x})$ tale equilibrio è iperbolico. Giustificare la risposta.

(b) Dare la definizione di equilibrio stabile, instabile, asintoticamente stabile ed enunciare il teorema spettrale di Liapunov.

Domanda 4. Enunciare un teorema sulla dipendenza differenziabile delle soluzioni di un'equazione differenziale dai parametri, e dimostrarlo.

- *Consegnare solo la bella*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
- *Leggere con attenzione il testo. Negli esercizi, giustificare tutte le risposte e riportare abbastanza dettagli dei conti, sufficienti a ricostruire il risultato. Nelle domande di teoria, rispondere con pertinenza alle domande fatte; non verranno valutate risposte non pertinenti e/o a domande non fatte.*
- *Non si può consultare alcun tipo di materiale.*

Esercizio 1

(a) Matrice Jacobiana del c.v.:

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 2+y & (x-1)-k \\ y^2-1 & 2+2y(x-1) \end{pmatrix}$$

$$A(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dunque la linearizzazione in $(1,0)$ è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(1,0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2-ky \\ -x+1+2y \end{pmatrix}$$

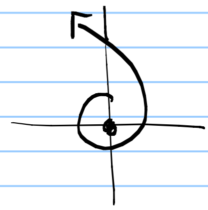
(b) Autovalori di $A(1,0)$:

$$\det\left[A(1,0) - \lambda \mathbb{1}\right] = (2-\lambda)^2 - k \stackrel{!}{=} 0$$

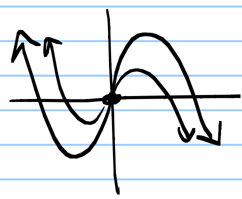
$$2-\lambda = \pm\sqrt{k}$$

$$\lambda_\pm = 2 \pm \sqrt{k}$$

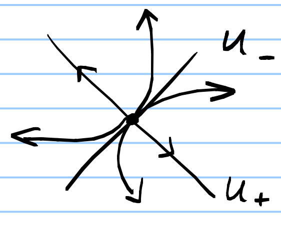
- $k<0$: $\lambda_\pm = 2 \pm i\sqrt{|k|}$ $\Rightarrow$ Fuoco instabile



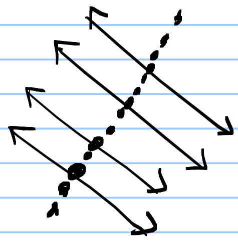
- $k=0$: $\lambda_\pm = 2$ è un "nodo improprio" ma non siete tenuti a saperlo ($A(1,0)$ ha un unico autovettore, $\binom{0}{1}$)



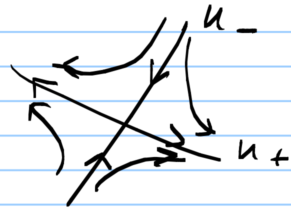
- $0<k<4$: $\lambda_+ > \lambda_- > 0$ nodo instabile
  Gli autovettori sono $u_\pm = \begin{pmatrix} \sqrt{k} \\ \mp 1 \end{pmatrix}$



• $k=4$: $\lambda_-=0$, $\lambda_+=4$



• $k>4$: $\lambda_+>0>\lambda_-$ sella



(c) Gli autovalori hanno parte reale $= 2 \pm \mathrm{Re}(\sqrt{k})$, entrambe $\neq 0$ sse $k \neq 4$. Dunque l'eq. $(1,0)$ è iperbolico $\forall k \in \mathbb{R}$, $k \neq 4$.

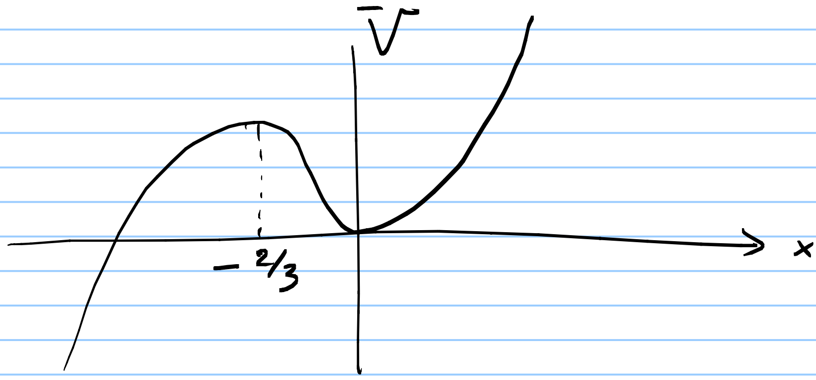
Il sottospazio instabile è 2-dim se $k<4$, 1-dim se $k \geq 4$.

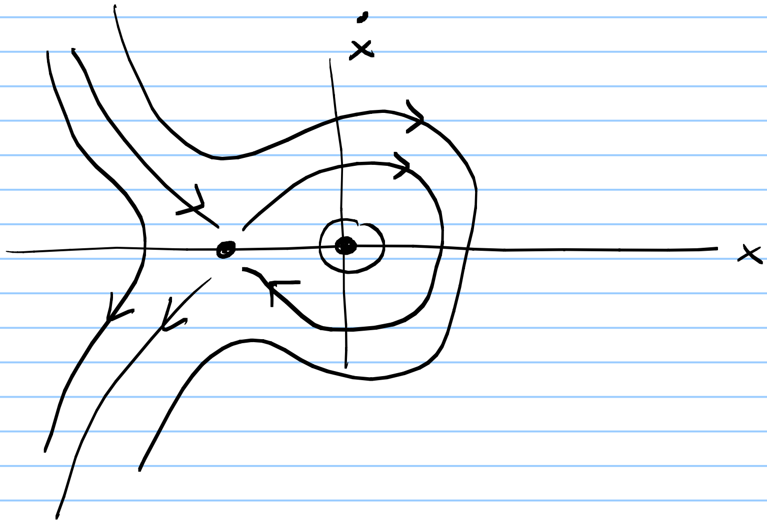
Esercizio 2

(a) Ritratto in fase di

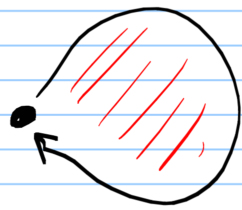
$$\ddot{x} = -(2+3x)\,x = -\frac{dV}{dx}(x)$$

con $V(x) = x^2 + x^3$.





(b) Sul ritratto in fase si vede che le orbite periodiche sono tutte e sole le orbite dentro il "laccio" delle separatrici



Un pto $(0, v)$ è ivi contenuto se la sua energia è < dell'energia del massimo

ovvero $E(0, v) < V(-2/3)$

$$E(0,v) = \frac{v^2}{2}, \qquad V(-2/3) = 4/27$$

Dunque, la condizione è $\frac{v^2}{2} < \frac{4}{27}$ o $|v| < \sqrt{\frac{8}{27}}$.