LAUREA IN MATEMATICA
CORSO DI FISICA MATEMATICA
I COMPITINO 2011 — 30 marzo 2011

Domanda 1. Rispondere in modo sintetico ma preciso (senza fare le dimostrazioni o riportare i calcoli) alle seguenti domande:

(a) Si consideri l'equazione $\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Sia $\bar{x}$ una configurazione di equilibrio. Scrivere la linearizzazione dell'equazione nell'equilibrio corrispondente a $\bar{x}$ e stabilire sotto quali condizioni su $V''(\bar{x})$ tale equilibrio è iperbolico.

(b) Cos'è una soluzione e cosa è un'orbita di un'equazione differenziale?

(c) Cosa significa che i flussi di due campi vettoriali X ed Y sono coniugati da un diffeomorfismo? E quale è allora la relazione fra X ed Y?

(d) Dare la definizione di equilibrio iperbolico ed enunciare qualche proprietà degli equilibri iperbolici.

(e) Quale è la differenza fra attrattività e stabilità asintotica di un equilibrio?

(f) Cosa è un insieme invariante? E invariante per tempi positivi? Fare qualche esempio (enunciando dei criteri, o delle proprietà, che implicano l'uno o l'altro tipo di invarianza).

Domanda 2. Trattare in dettaglio (con dimostrazioni) uno (*ed uno solo*: nel caso di risposte multiple verrà valutata solo la prima) a scelta fra i seguenti argomenti:

(a) Dedurre i possibili ritratti in fase del sistema lineare $\dot{z} = Az$, $z \in \mathbf{R}^2$, nell'ipotesi che la matrice reale A abbia autovalori complessi (con parte immaginaria non nulla).

(b) Abbassamento dell'ordine di un'equazione differenziale per mezzo di un integrale primo.

(c) Teorema spettrale di Lyapunov.

(d) Continuabilità degli equilibri iperbolici.

(e) Stima sulla velocità di allontanamento delle soluzioni di un'equazione differenziale.

Esercizio 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\dot{x} = x(y-k)\,, \qquad \dot{y} = x(e^y - 1) - y \tag{$\star$}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbf{R}$.

(a) Determinarne gli equilibri.

(b) Linearizzarlo attorno all'equilibrio $(0,0)$ e dire cosa si può concludere in questo modo sulle proprietà di stabilità di $(0,0)$.

(c) Si può dire qualcosa sulle proprietà di stabilità/instabilità/stabilità asintotica di $(0,0)$ se $k = 0$?

Continua sul retro

(d) Tracciare il ritratto in fase del sistema linearizzato del punto precedente, al variare di $k \in \mathbf{R}$. (Si possono tralasciare i valori di k per i quali la matrice ha un autovalore doppio oppure un autovalore nullo).

(e) Qual è la dimensione dell'autospazio stabile della linearizzazione in $(0,0)$, al variare di $k \in \mathbf{R}$?

(f) Si assuma $k > 0$. Studiare le proprietà di stabilità di $(0,0)$ utilizzando la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big(x^2 + y^2\big)$$

come candidata funzione di Lyapunov.

Esercizio 4. Tracciare il ritratto in fase di

$$\ddot{x} = -\frac{d}{dx}\big[-x^2(x-1)(x-2)\big]\,, \qquad x \in \mathbf{R}$$

- *Consegnate sia la bella che la brutta. Scrivete nome e cognome su ogni foglio.*
- *Verrà valutata solo la bella. Sulla bella rispondete agli esercizi/domande in ordine ed indicate con chiarezza quelli non svolti.*
- *Marcate i fogli di brutta in modo che siano riconoscibili (per esempio: fate una grande croce su ogni pagina di brutta).*
- *Negli esercizi giustificate tutte le risposte e riportate abbastanza dettagli dei conti, sufficienti a ricostruire il risultato. Nelle domande di teoria, rispondere con pertinenza alle domande fatte; non verranno valutate risposte non pertinenti e/o a domande non fatte.*
- *Non si può consultare alcun tipo di materiale.*

Soluzione es 3

$$\dot{x} = x(y-k)$$
$$\dot{y} = x(e^y-1)-y$$

a) Equilibri

I eq :	$x=0$	$y=k$
II eq :	$y=0$	Se $k=0$, ogni $x\in\mathbb{R}$ Se $k\neq0$: $x=\frac{k}{e^k-1}$

Dunque gli equilibri sono:

- $(0,0)$ $\forall k\in\mathbb{R}$
- Se $k=0$: $(x,0)$ con $x\in\mathbb{R}$
- Se $k\neq0$: $\left(\frac{k}{e^k-1}, k\right)$

b) Lin + stab a $(0,0)$

Matrice Jacobiana : $A(x,y)=\begin{pmatrix} y-k & x \\ e^y-1 & xe^y-1 \end{pmatrix}$

In $(0,0)$: $A(0,0)=\begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sistema linearizzato: $\begin{cases} \dot{x} = -kx \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

Teo spettrale :

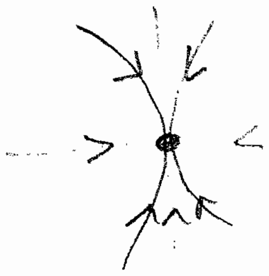
- $K > 0$: $(0,0)$ as. stab (2 avl < 0)
- $K = 0$: ? (1 avl $= 0$, 1 avl < 0)
- $K < 0$: $(0,0)$ instabile (1 avl > 0)

c) Propr stab di $(0,0)$ per $K=0$:
Se $K=0$ l'eq $(0,0)$ non è isolato (c'è la retta $y=0$ tutta di equilibri) $\Rightarrow$ $(0,0)$ non è as. stabile

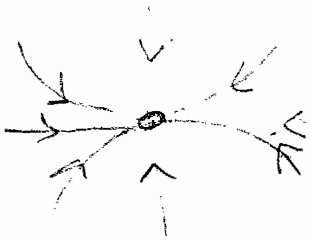
Altro non si può dire

d) Ritratto in fase di $\dot{x} = -Kx$, $\dot{y} = -y$

- $K > 0$, $K \neq 1$. 2 avl < 0 e distinti
$\Rightarrow$ nodo stabile

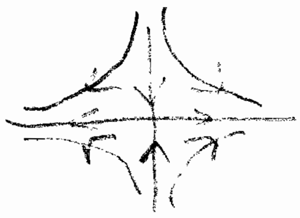


$K > 1$

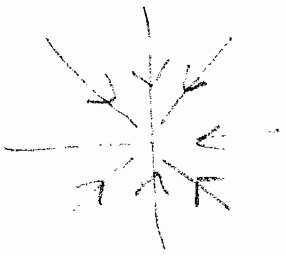


$0 < K < 1$

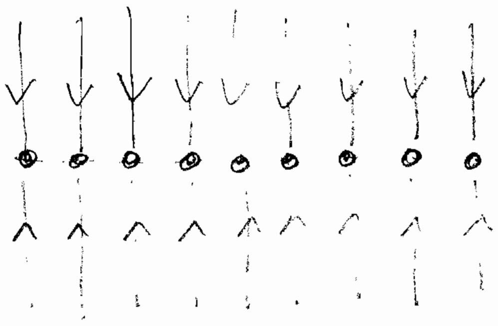
- $K < 0$: sella
Autosp. stab $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$
" instab $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



- (Facoltativo) $K = 1$: c'è avl doppio, ma $A(0,0)$ ha 2 avt $\Rightarrow$ nodo a stella stab.



- (Facoltativo) $K = 0$. Ci sono 2 avt $\Rightarrow$



e) Dimensione autosp. stabile in $(0,0)$

2 se $K > 0$

1 se $K \leq 0$

f) Funzione Lyapunov ?

- f ha minimo stretto in $(0,0)$
- Segno derivata di Lie :

$$\dot f = x\,[x(y-k)] + y\,[x(e^y-1)-y]$$

$$= x^2 y - x^2 k + xy(e^y-1) - y^2$$

$$= -\underbrace{(kx^2+y^2)}_{O(2)} + \underbrace{[xy(e^y-1)+x^2y]}_{O(3)}$$

Se $k>0$: $\dot f$ termini $O(2)$ hanno massimo stretto non degenere in $(0,0)$ $\Rightarrow$ $\dot f$ ha massimo stretto in $(0,0)$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ è as. stab. $\forall k>0$.

Oss: si poteva anche calcolare

$$\nabla(\dot f) = \begin{pmatrix} -2kx + y(e^y-1) + 2xy \\ -2y + x(e^y-1) + xye^y + x^2 \end{pmatrix}$$

che ovviamente (perché?) si annulla in $(0,0)$ e

$$\mathrm{Hess}(\dot f) = \begin{pmatrix} -2k+2y & 2x+(e^y-1)+ye^y \\ \cdots & -2+xe^y+xe^y+2x \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Hess}(\dot f)\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ è def <0 se $k>0$

$\boxed{\text{Soluzione es. 4}}$

$$V(x) = -x^2(x-1)(x-2)$$