



LAUREA IN MATEMATICA
CORSO DI FISICA MATEMATICA
I COMPITINO 2011-2012 — 12 aprile 2012

ISTRUZIONI: LEGGERE CON ATTENZIONE

1. Modalità di consegna

- *Consegnate sia la bella che la brutta che il testo. Scrivete nome e cognome su ogni foglio di bella e di brutta.*
- *Verrà valutata solo la bella. Marcate i fogli di brutta in modo che siano riconoscibili (per esempio: fate una grande croce su ogni pagina di brutta).*
- *Sulla bella rispondete alle domande nello stesso ordine in cui sono riportate su questo foglio ed indicate con chiarezza anche quelle non svolte.*
- *Se non desiderate che il vostro elaborato sia valutato, potete ritirarvi in qualunque momento restituendo tutti i fogli che avete ricevuto (testo del compito incluso) con il più esterno marcato con una grande "R".*

2. Svolgimento

- *Negli esercizi giustificate tutte le risposte e riportate abbastanza dettagli dei conti, sufficienti a ricostruire il risultato. Nelle domande di teoria, rispondete con pertinenza alle domande fatte; non verranno valutate risposte non pertinenti e/o a domande non fatte.*
- *Se avete bisogno di altri fogli chiedeteli al sorvegliante oppure andati a prenderli sulla cattedra.*

3. Regole di comportamento

- *Non si può consultare alcun tipo di materiale. Non si può comunicare in alcun modo con gli altri studenti.*
- *Potete fare domande al sorvegliante solo nel caso di dubbi sul testo (domande non chiare, sospetto di errori di stampa etc). Non per chiedere qualcosa che non sapete e neppure se avete dubbi su come rispondere: nelle domande aperte scegliete voi cosa dare per noto e cosa dire (considerate che il modo in cui si risponde ad una domanda fa parte della risposta a quella domanda).*

4. Attenzione

- *Il testo del compito potrebbe continuare anche sul retro di questo foglio.*
-

Domanda 1. Rispondere *in modo sintetico* ma preciso (senza fare le dimostrazioni o riportare i calcoli) alle seguenti domande:

- Definire il flusso di un campo vettoriale completo. Quali proprietà ha? Come si scrive l'orbita di un punto dello spazio delle fasi per mezzo del flusso?
- Cosa significa che i flussi di due campi vettoriali X ed Y sono coniugati da un diffeomorfismo? E quale è allora la relazione fra X ed Y ?
- Quali informazioni dà l'esistenza di $n - 1$ integrali primi funzionalmente indipendenti per un'equazione differenziale $\dot{z} = X(z)$, $z \in \mathbf{R}^n$? (Dare un enunciato preciso). E se vi sono n integrali primi funzionalmente indipendenti?
- Cos'è un equilibrio attrattivo? Dare una condizione necessaria e sufficiente per l'attrattività di un equilibrio di $\dot{z} = f(z)$, $z \in \mathbf{R}$.

Domanda 2. Trattare in dettaglio, con enunciati precisi e dimostrazioni, due (e solo due) argomenti fra i seguenti:

- (a) Ricavare il ‘diagramma di biforcazione’ dei sistemi lineari nel piano. (Si può dare per nota la relazione fra autovalori e ritratto in fase).
- (b) Abbassamento dell’ordine di un’equazione differenziale per mezzo di un integrale primo.
- (c) Continuabilità degli equilibri iperbolici.
- (d) Dipendenza dai parametri delle soluzioni di un’equazione differenziale.

Domanda 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\dot{x} = y - xy - x, \quad \dot{y} = xy^2 - xy.$$

Determinarne gli equilibri, linearizzarlo in ciascuno di essi, tracciare i ritratti in fase delle linearizzazioni e, in ciascun caso, indicare i sottospazi stabile, instabile e centrale (se non vuoti) della linearizzazione.

Domanda 4. Tracciare il ritratto in fase di

$$\ddot{x} = x(x - 1)(x - 3), \quad x \in \mathbf{R}$$

e determinare l’insieme delle condizioni iniziali che producono moti limitati (sia nel passato che nel futuro).