1

Scritto di Fisica Matematica - prima parte -
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 20 luglio 2010
sottolineare: [**vecchio ordinamento 509**] [**nuovo ordinamento 270**]

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 1 messo in evidenza.

1. Dare la definizione di equilibrio iperbolico di un'equazione differenziale e dimostrare che gli equilibrii iperbolici sono isolati.

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -x^2 + 1 - 2h\dot{x}$$

ove h è un parametro positivo.

a. Determinarne gli equilibri.
b. Usare una funzione di Liapunov (suggerimento: l'energia dell'equazione per $h = 0$) per studiare la stabilità dell'equilibrio $(1, 0)$, al variare del parametro $h > 0$.
c. Linearizzare il sistema attorno all'equilibrio $(1, 0)$ ed usare il metodo spettrale di Liapunov per studiarne la stabilità, al variare di $h > 0$.
d. Tracciare (molto qualitativamente) il ritratto in fase in un intorno dell'equilibrio $(1, 0)$ nel caso $h = 1$.

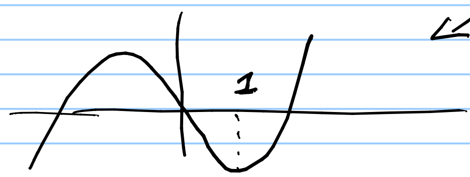
Soluzione Parte 1 (Fis. Mat. 20/7/2010)

Esercizio 2

a. Equilibri di $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ sono $(\bar{x}, 0)$ con $f(\bar{x}, 0) = 0$.

Dunque: $(1,0)$, $(-1,0)$

b. $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ con $V(x) = \frac{x^3}{3} - x$



È funzione di Lyapunov:

$$E'(x,\dot{x}) = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ \dot{x} \end{pmatrix} \Rightarrow E'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E''(x,\dot{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E''(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ è def pos.}$$

Dunque E ha min stretto in $(1,0)$

Derivata di Lie:

$$\dot{E}(x,\dot{x}) = \dot{x}\ddot{x} + (x^2-1)\dot{x} = \dot{x}\left(\ddot{x} + x^2 - 1\right) = -2h\dot{x}^2$$

$$\leq 0$$

$\Rightarrow$ si conclude che c'è stabilità semplice.

c. Matrice della lin di $X(x,\dot{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -x^2 + 1 - 2h\dot{x} \end{pmatrix}$ è

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x & -2h \end{pmatrix}$. In $(1,0)$ vale $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2h \end{pmatrix}$ e ha autovalori $-h \pm \sqrt{h^2-2}$. Così:

$0 < h < \sqrt{2}$: 2 autovalori complessi con Re < 0 $\Rightarrow$ stab. as

$h = \sqrt{2}$: autovalore doppio $-\sqrt{2} < 0$ $\Rightarrow$ stab. as.

$h > 2$: 2 autovalori reali negativi $\Rightarrow$ stab. as.

d. E' un fuoco stabile: