1

Scritto di Fisica Matematica - prima parte -
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 13 ;luglio 2011
sottolineare: [**vecchio ordinamento 509**] [**nuovo ordinamento 270**]

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 1 messo in evidenza.

1. Tracciare il ritratto in fase dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -3x^2 + k\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$; tracciare anche il diagramma di biforcazione degli equilibri.

2. Si consideri la matrice

$$A(k) = \begin{pmatrix} 2k & k \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro reale k. Classificare i ritratti in fase dell'equazione $\dot{z} = Az$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. (Si possono tralasciare i casi di autovalori doppi. "Classificare" = indicare se sella, nodo, etc e, se pertinente, se stabile o instabile). Interpretare poi il risultato tracciando la curva parametrica $k \mapsto (\det A(k), \mathrm{tr}A(k))$ sul diagramma di biforcazione dei sistemi lineari in $\mathbb{R}^2$ nel piano determinante–traccia.

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = -yf(x,y)\,, \qquad \dot{y} = xf(x,y)$$

ove f è una (qualunque) funzione differenziabile. Si osservi che l'origine è un equilibrio per ogni scelta di f.

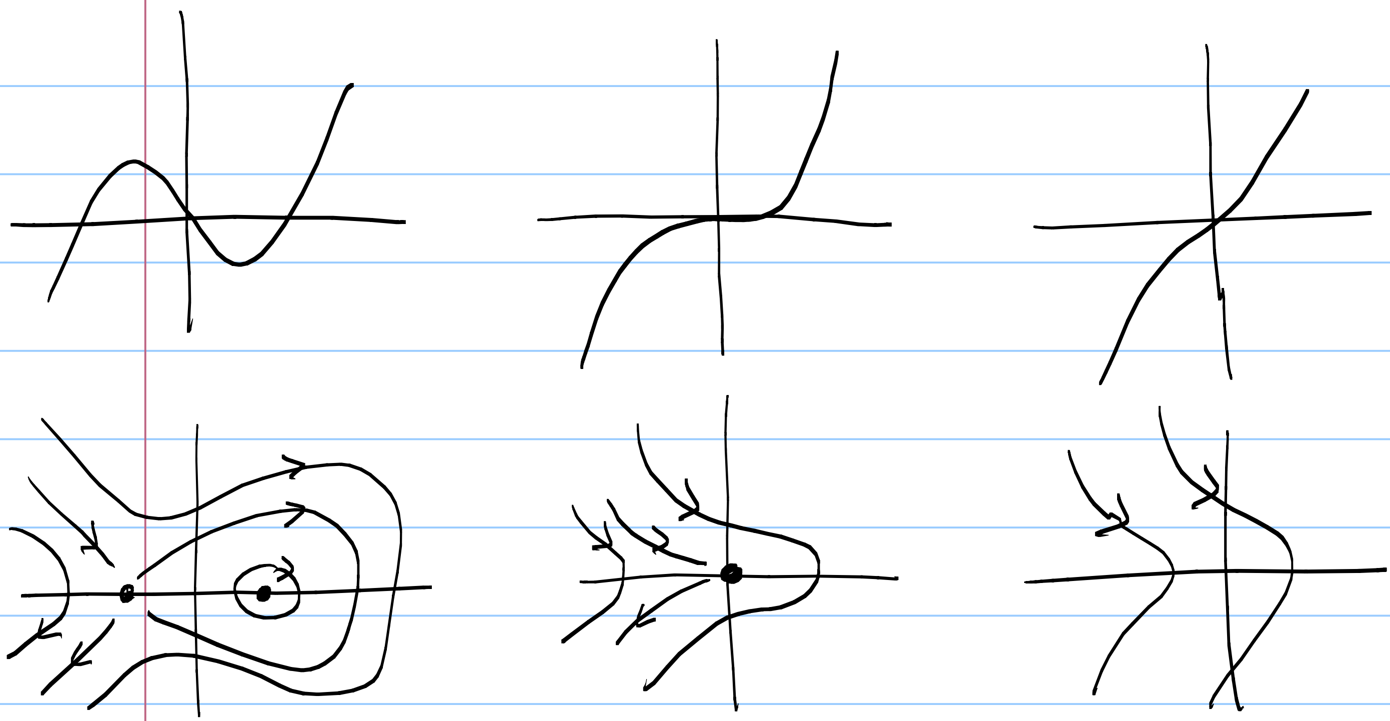
(a) Cosa si può dire delle proprietà di stabilità dell'origine utilizzando la funzione $W(x,y) = x^2 + y^2$ come candidata funzione di Lypaunov?

(b) Vi è una qualche scelta di f per cui l'origine potrebbe essere asintoticamente stabile?

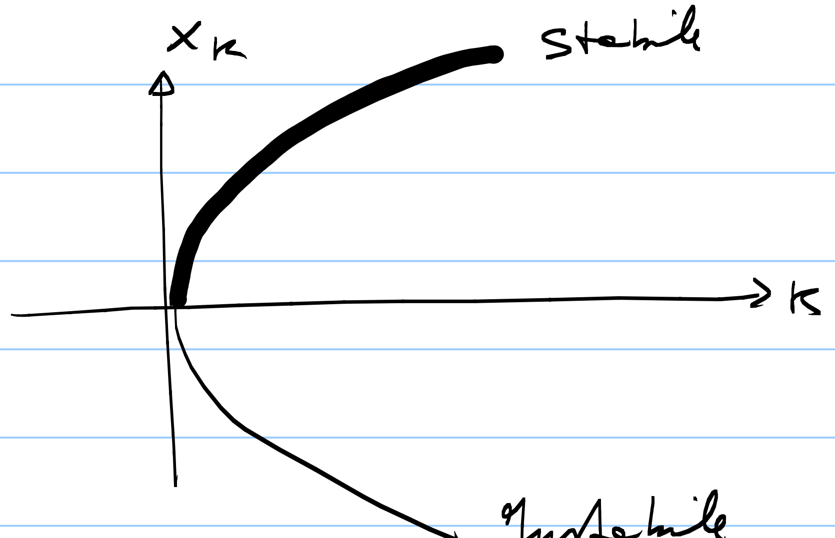
Esercizio 1

$$\ddot{x} = -V'(x), \quad V(x) = x^3 - kx = x(x^2 - k)$$

$k > 0$ $\qquad$ $k = 0$ $\qquad$ $k < 0$



Equilibri: $(x_k, 0)$ con $x_k = \pm\sqrt{\frac{k}{3}}$ se $k \geq 0$



Esercizio 2

a) $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2k-\lambda & k \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2k) + k$

$= \lambda^2 - 2k\lambda + k$

$\lambda_\pm = k \pm \sqrt{\underbrace{k^2 - k}_{k(k-1)}}$

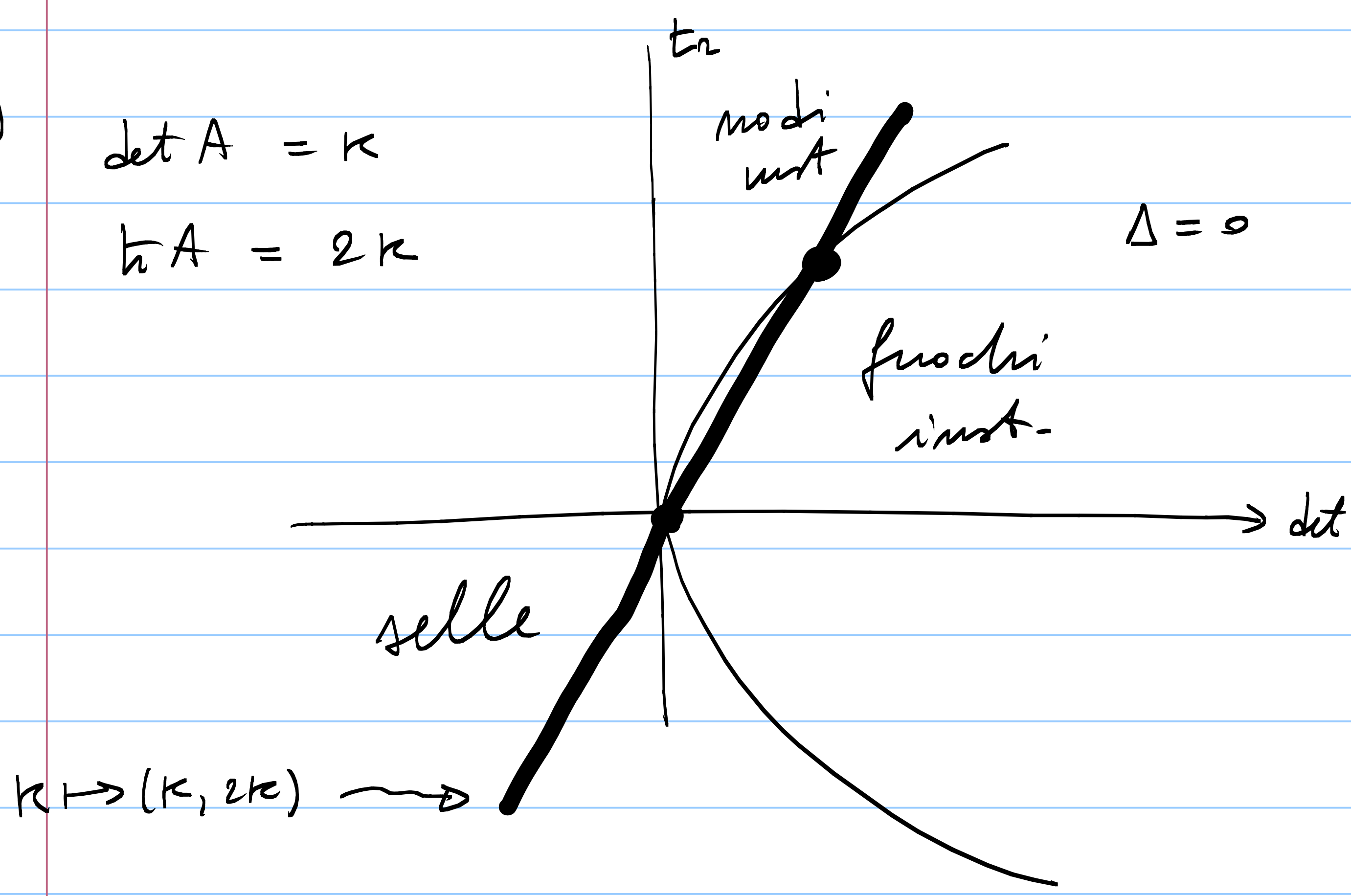
$k > 1$ 2 avl positivi : nodo instabile

$0 < k < 1$ 2 avl $\in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re} > 0$: fuoco "

$k < 0$ 1 avl > 0, 1 avl < 0 : sella

b) $\det A = k$

$\mathrm{tr}\, A = 2k$



3) a) $W(x, y) = x^2 + y^2$ ha (ovviamente) minimo stretto in $(0,0)$.
Derivata di Lie:

$$\dot{W} = 2x(-y f) + 2y(x f)$$
$$= 0$$

L'uso di W permette di stabilire che $(0,0)$ è stabile per tutti i tempi.

b) W è un integrale primo non costante $\Rightarrow$ è impossibile la stab asintotica qualunque sia f.