1

Scritto di Fisica Matematica - prima parte -
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 13 luglio 2012
sottolineare: [**vecchio ordinamento 509**] [**nuovo ordinamento 270**]

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 1 messo in evidenza.

1. Dimostrare che gli equilibri iperbolici di un'equazione differenziale sono isolati.

2. Rispondere in modo preciso e *molto sintetico* alle seguenti domande:

a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione e X un campo vettoriale completo su $\mathbb{R}^n$. Sotto opportune condizioni su f (quali?), è vero che i campi vettoriali X ed fX hanno le stesse soluzioni e/o le stesse orbite?

b) Scrivere l'equazione logistica e spiegarne *molto brevemente* il significato.

c) In cosa consiste l' "abbassamento dell'ordine" di un'equazione differenziale per mezzo di uno (o più) integrali primi? (Enunciare un risultato preciso)

3. Tracciare il ritratto in fase dell'equazione

$$\ddot{x} = 2kx(k^2 - 2x^2)\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

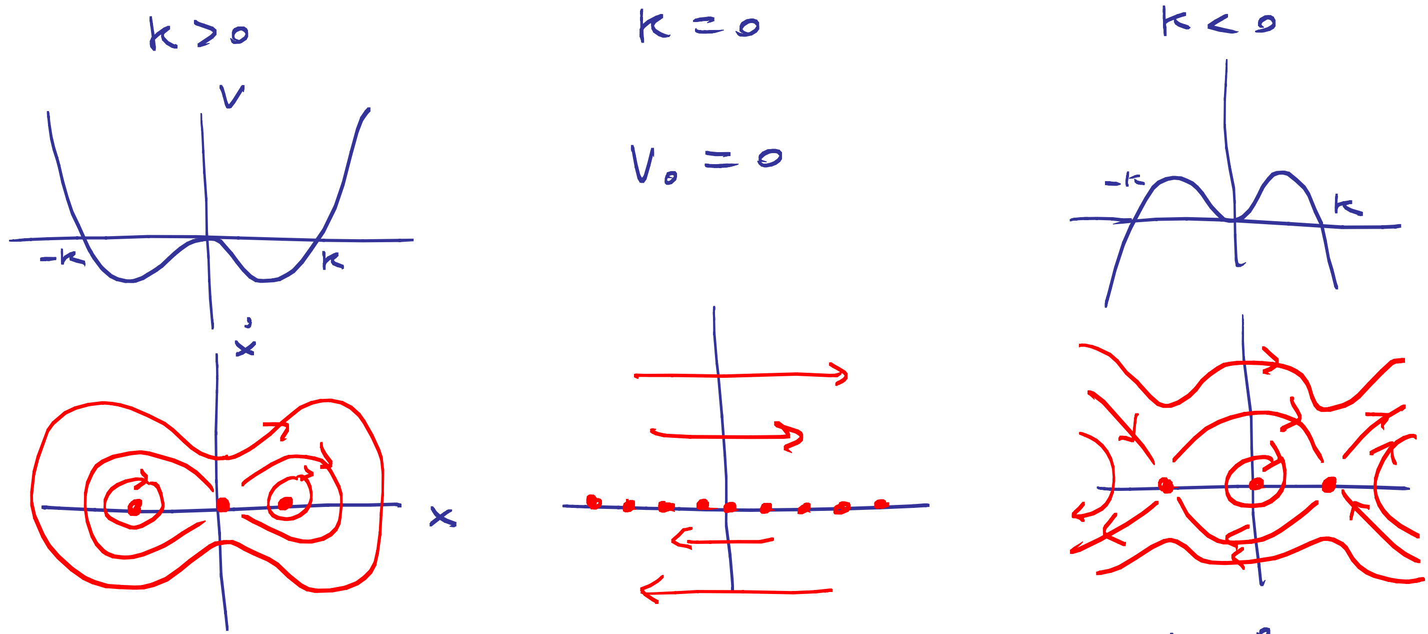
al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Tracciare anche il diagramma di biforcazione degli equilibri, specificandone la (in)stabilità. Determinare infine le condizioni iniziali che, per $k = -1$, conducono a moti periodici.

Soluzione Esercizio 3

L'equazione è del tipo $\ddot{x} = -V_k'(x)$ con

$$V_k(x) = kx^2(x^2 - k^2)$$

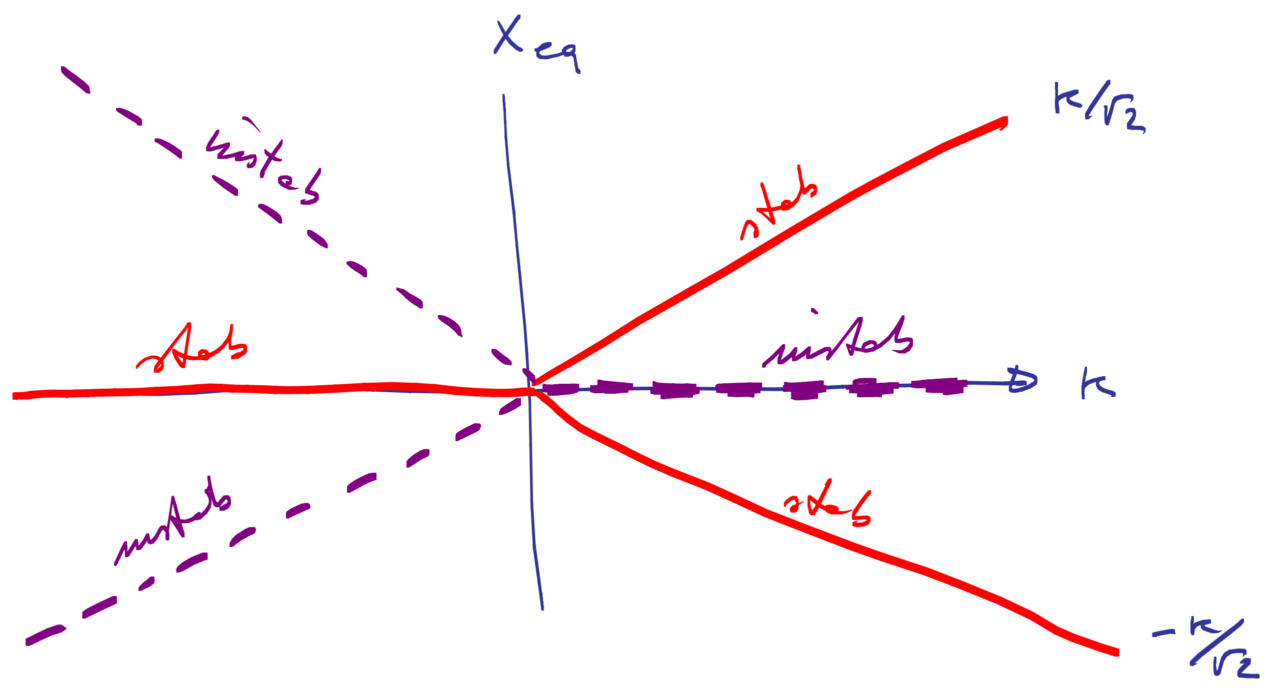
Ritratti in fase:



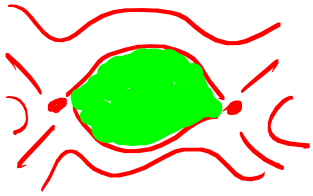
[NB: per tracciare il grafico di V_k, che è un polinomio (di 4° grado), non serve fare uno studio di funzione raffinato. Sia $k > 0$. Basta osservare che $V_k(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$ e che i 4 zeri di V_k sono 0 (doppio, cioè si annulla anche V_k') e $\pm \frac{k}{\sqrt{2}}$. V_k', essendo polinomio di grado 3, ha al + 3 zeri e, per quanto appena visto, essi devono essere uno in 0, uno in $\left(-\frac{k}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e uno in $\left(\frac{k}{\sqrt{2}}, 0\right)$; necessariamente essi sono, rispettivamente, un massimo e due minimi. Per $k<0$ basta ribaltare il grafico. Se $k=0$, $V=0$.

Diagramma biforcazione equilibri. Le configurazioni di equilibrio sono (indicare le stabilità non è indispensabile, ma non guasta)

- Se $k>0$: 0 (instabile) e $\pm\frac{k}{\sqrt{2}}$ (stabili)
- Se $k<0$: le stesse (con stabilità scambiata)
- Se $k=0$: tutti i punti $x\in\mathbb{R}$ (instabili)



Per $k=-1$, condizioni iniziali che producono moti periodici. Dal ritratto in fase si vede che sono quelle interne alle separatrici (varietà stab/instab di $\pm k/\sqrt{2}$):



Sono i punti $(x_0, \dot{x}_0)$ tali che

$$x_0 \in \left(-\frac{k}{\sqrt{2}}, \frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}_0^2 + V_{-1}(x_0) \leq V_{-1}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

Volendo, la seconda condizione si può esplicitare, trovando

$$\frac{1}{2}\dot{x}_0^2 - x_0^2(x_0^2-1) \leq \frac{1}{4} .$$