



Corso di Laurea in Matematica

Fisica Matematica – Parte I (2011-12)

Autovalutazione

Prime due settimane (Lezioni 1-7)

Argomenti trattati

- Dalle dispense: Capitolo 0: lettura. Sezioni 1.1, 1.2 (senza dimostrazioni), 1.3 (solo se non si sanno risolvere le equazioni in dimensione 1), 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2 (3.2.B solo lettura), 3.3, 4.1, 4.2 (fino a 4.2.C escluso).

Domande di teoria

- Definire soluzioni ed orbite di un'equazione differenziale.
- Cosa sono gli equilibri di un'equazione differenziale, e come si caratterizzano?
- Cos'è un campo vettoriale su un aperto di \mathbf{R}^n ? Cosa è un campo vettoriale completo? Si conoscono condizioni sufficienti per la completezza? Il campo vettoriale dell'equazione logistica è completo?
- Come si costruisce il ritratto in fase di $\dot{z} = X(z)$, $z \in \mathbb{R}$ (volendo si faccia l'ipotesi di completezza di X)? Si sa dimostrarlo?
- Cosa è l'equazione logistica? Determinarne il flusso integrandola. Tracciarne il ritratto in fase.
- In cosa consiste l' "effetto Allee" in dinamica delle popolazioni? Si sa fare un modello che ingloba tale effetto nell'equazione logistica?
- È possibile che l'equazione $\dot{z} = X(z)$, $z \in \mathbb{R}$, abbia soluzioni periodiche? Perché?
- Assincerarsi di saper fare tutti i ritratti in fase 'elementari' visti a lezione.
- Quali conseguenze ha il teorema di esistenza ed unicità sulle orbite di un'equazione differenziale?
- Che proprietà ha il flusso di un campo vettoriale? Dimostrarle.
- Cosa è la linearizzazione di un'equazione differenziale ad un equilibrio?
- Cosa si può dire di un punto \bar{z} dello spazio delle fasi se vi è una soluzione dell'equazione differenziale che ha tale punto come limite per $t \rightarrow +\infty$? Dimostrarlo.
- Cosa significa che un'equazione differenziale del secondo ordine (in forma normale) è equivalente ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine? Quali sono i vantaggi di questa procedura?

- Enunciare e dimostrare la stima sulla separazione al più esponenziale delle soluzioni. Tale stima è ottimale?
- Cosa si intende per dipendenza ‘sensibile’ dai dati iniziali?
- Per un’equazione del II ordine, quali sono gli equilibri e quale differenza c’è fra equilibrio e configurazione di equilibrio? Come si linearizza un’equazione del II ordine in un equilibrio?
- Spiegare l’origine delle equazioni dell’oscillatore e del repulsore armonici via linearizzazione ad un equilibrio.
- Dedurre i ritratti in fase dei sistemi lineari nel piano, nel caso di matrice 2×2 diagonalizzabile.
- Ricostruire la trattazione del modello di “pesca con prelievo costante” $\dot{n} = rn(1 - n/\bar{n}) - p$.
- Come dipendono dai parametri le soluzioni di un’equazione differenziale? Dimostrarlo.
- Come è definita e come si calcola la esponenziale di una matrice?

Esercizi

- Tutti gli esercizi pertinenti dalle dispense.
- Tracciare il ritratto in fase dell’equazione differenziale

$$\dot{z} = z^2 + k, \quad z \in \mathbf{R}$$

ove k è un parametro reale, distinguendo i casi in cui $k < 0$, $k = 0$ e $k > 0$. In tutti i casi, confrontare il ritratto in fase vicino a ciascun equilibrio con quello della linearizzazione in quell’equilibrio.

- Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y + xy \\ \dot{y} &= 2x + y - y^2 \end{aligned}$$

e linearizzarlo in uno di essi.

- Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2(x - 1) + y + (x - 1)y \\ \dot{y} &= 1 - x + 2y + (x - 1)y^2 \end{aligned}$$

e linearizzarlo in uno di essi.

- Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Disegnare il ritratto in fase.
- Disegnare i ritratti in fase delle equazioni $\dot{z} = Az$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Nel caso di nodi e selle determinare anche gli autospazi stabile ed instabile, se presenti, e nel caso dei fuochi determinare il verso di avvolgimento.