



# Corso di Laurea in Matematica

## Fisica Matematica – Parte I (2012)

### Autovalutazione

Quarta settimana (Lezioni 12-15)

#### Argomenti trattati

- Dalle dispense: Sezioni 5.3.B (fine), 5.3.C (escluso punto “2. studio curve di livello”), 5.4.A,B, 5.5.B, 5.6 (eccetto esempio sul periodo del pendolo), 5.7 (a lezione è stato fatto anche il modello SIS

$$\dot{S} = -\alpha IS + \beta I, \quad \dot{I} = \alpha IS - \beta I;$$

ricostruirne lo studio), 7.2, 8.1. Guardare anche 7.3, che contiene raccolti vari casi di biforcazioni incontrate via via negli esempi fatti durante il corso.

#### Domande di teoria

- Dimostrare che se una sottovarietà dello spazio delle fasi è invariante allora il campo vettoriale è ad essa tangente in ogni suo punto.
- Cosa significa ‘abbassare’ l’ordine di un’equazione differenziale per mezzo di un integrale primo? Fare anche un enunciato preciso e dimostrarlo. Assincerarsi di aver capito gli esempi elementari.
- Nel caso dell’equazione di Newton unidimensionale  $m\ddot{x} = -V'(x)$ , come si disegnano gli insiemi di livello dell’energia? Dove essi sono varietà regolari? Cosa si può dire dell’angolo con il quale essi intersecano l’asse delle  $x$ ?
- Conoscere (a menadito!) e aver compreso in tutti i dettagli il ritratto in fase del pendolo.
- Si consideri l’equazione  $\ddot{x} = -V'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Sia  $\bar{x}$  una configurazione di equilibrio. Scrivere la linearizzazione dell’equazione nell’equilibrio corrispondente a  $\bar{x}$  e stabilire sotto quali condizioni su  $V''(\bar{x})$  tale equilibrio è iperbolico.
- Si consideri ora l’equazione  $\ddot{x} = -V'(x) - 2\mu\dot{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , con  $\mu > 0$ . Quali sono i possibili ritratti in fase della linearizzazione agli equilibri?
- Sapere scrivere il sistema di Lotka-Volterra, adimensionalizzarlo, determinarne gli equilibri, la linearizzazione in essi, l’integrale primo ed il ritratto in fase per mezzo dell’integrale primo.
- Può un sistema che ha un integrale primo non costante avere equilibri attrattivi? Dimostrarlo.
- Saper formulare, e sapere come si studia, un modello di competizione interspecifica di Lotka-Volterra.

- Saper formulare, e sapere studiare, i modelli SIS e SIR. Mettere in evidenza l'abbassamento dell'ordine per mezzo dell'integrale primo.
- Dimostrare che gli equilibri iperbolici di un'equazione differenziale sono isolati.
- Cosa significa che un equilibrio iperbolico di un'equazione differenziale dipendente (differenziabilmente) da dei parametri è 'continuabile'? Fare un enunciato preciso e dimostrarlo.
- Fare un esempio di 'continuazione' di un equilibrio iperbolico. Fare un esempio di un equilibrio non iperbolico che non può essere continuato. (Basta anche in dimensione 1).
- Saper riconoscere negli esempi (del tipo di quelli fatti a lezione) biforcazioni di equilibri e tracciare fare esempi delle biforcazioni esaminate a lezione (tangente; transcritica; pitchfork, sia in dimensione uno che per equazioni del secondo ordine).
- Data una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  come si costruiscono i ritratti in fase di  $\dot{z} = f(z)$ ,  $z \in \mathbf{R}$  e di  $\ddot{x} = f(x)$   $x \in \mathbf{R}$ ?

### Esercizi

- Tutti gli esercizi pertinenti nel testo.
- Gli esercizi d'esame degli scorsi a.a. che si trovano sulla pagina web del corso (per la parte pertinente al programma finora svolto).
- Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  nulla in  $(1, 1)$  e positiva in tutti gli altri punti. Determinare il ritratto in fase di

$$\dot{x} = xf(x, y), \quad \dot{y} = 2yf(x, y).$$

Guardando solo il ritratto in fase, senza fare alcun conto, stabilire se l'equilibrio  $(1, 1)$  è attrattivo e se è iperbolico.