1

Scritto di Fisica Matematica - prima parte -
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 3 settembre 2012
sottolineare: [**vecchio ordinamento 509**] [**nuovo ordinamento 270**]

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero $\mathbf{1}$ **messo in evidenza.**

1. Si consideri il sistema di due equazioni differenziali

$$\dot{x} = x + k(x+y) + xy\,, \quad \dot{y} = x + 2y - xy \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

dipendente dal parametro reale k. Determinarne gli equilibri. Linearizzarlo agli equilibri. Tracciare il ritratto in fase della linearizzazione nell'origine al variare del parametro k (si può tralasciare il caso $k = -1$).

2. Rispondere in modo preciso e *molto sintetico* alle seguenti domande:

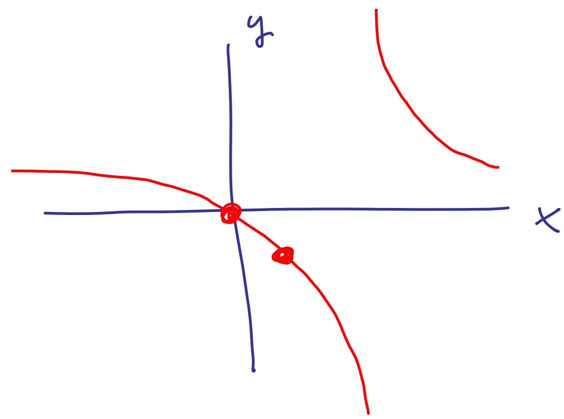
a) Cosa è la derivata di Lie di una funzione? Indicare dei motivi per i quali la si considera in connessione con le equazioni differenziali.

b) Enunciare una stima sulla separazione di soluzioni diverse di un'equazione differenziale.

c) Cosa è il push–forward di un campo vettoriale sotto un diffeomorfismo? Cosa significa che due flussi sono coniugati da un diffeomorfismo? Che relazione c'è fra le due cose?

d) Che proprietà ha il flusso di un campo vettoriale?

Con semplici conti si trova che gli equilibri sono:



$(0,0)$ e $(1,-1)$ $\quad \forall k \in \mathbb{R}$

e, se $k=-2$, tutti i punti della curva

$x+2y-xy=0$

—— • ——

Matrice Jacobiana del c.v., per il valore k del parametro:

$$J_k(x,y) = \begin{pmatrix} 1+k+y & k+x \\ 1-y & 2-x \end{pmatrix}$$

Pertanto, le linearizzazioni agli equilibri sono:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J_k(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad J_k(0,0) = \begin{pmatrix} 1+k & k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J_k(1,-1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}, \qquad J_k(1,-1) = \begin{pmatrix} k & k+1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e, se $k=-2$, nell'equilibrio $(\bar{x},\bar{y})$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J_{-2}(\bar{x},\bar{y})\begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{pmatrix}, \qquad J_{-2}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} \bar{y}-1 & \bar{x}-2 \\ 1-\bar{y} & 2-\bar{x} \end{pmatrix}$$

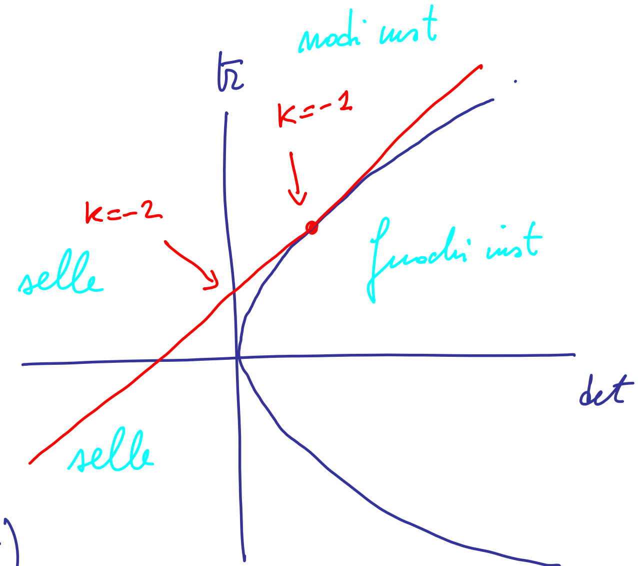
—— • ——

Ritratto in fase della linearizzazione in $(0,0)$. Si può procedere in modi diversi, a seconda dei gusti personali e del livello di precisione che si desidera (autovettori?).

Per una prima risposta, si può limitarsi a "classificare" l'equilibrio $(0,0)$, tracciando la curva

$$k \mapsto \left(\det J_k(0,0),\ \operatorname{tr} J_k(0,0)\right)$$

nel piano $(\det, \operatorname{tr})$. Poiché



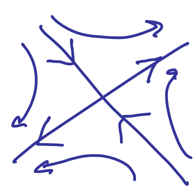
$$\det J_k(0,0) = 2+k$$

$$\operatorname{tr} J_k(0,0) = 3+k$$

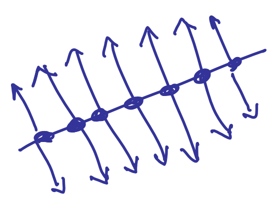
tale curva è una retta, come mostrato affianco. (Essa è tangente alla parabola $\det = \operatorname{tr}^2/4$ in $k=-1$ perché $\left(\operatorname{tr} J_k(0,0)\right)^2 - 4\det J_k(0,0) = (k+1)^2$).

Dunque:

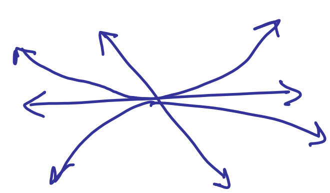
$k<-2$: sella



$k=-2$: 1 autoval $=0$, $1>0$:



$k>-2$, $k \neq -1$: nodo instabile

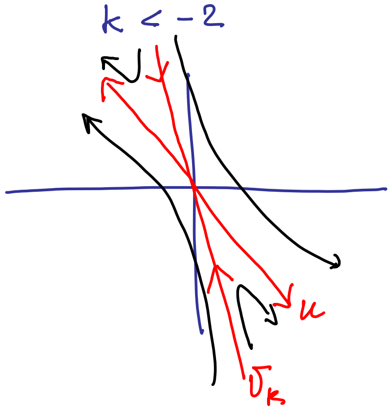


Se si vuole essere più precisi bisogna determinare gli autovettori. Si trova:

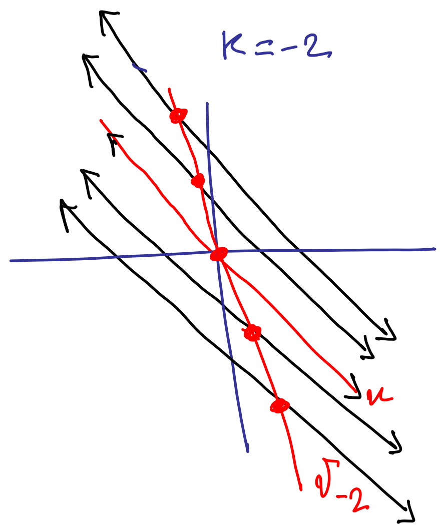
autovalore	autovettore
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =: u$
$2+k$	$\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} =: v_k$

Dunque (anche se è difficile tracciare il ritratto in fase quando u e v_k sono vicini)

$k < -2$

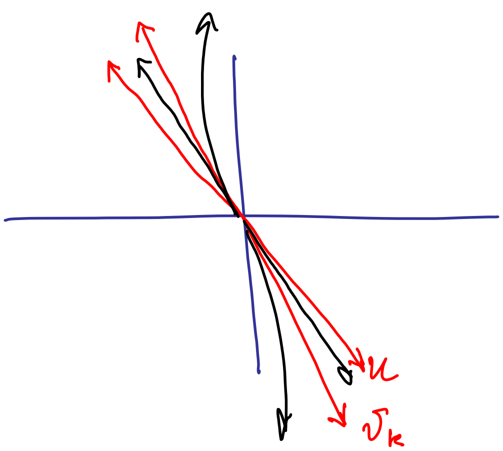


$k = -2$



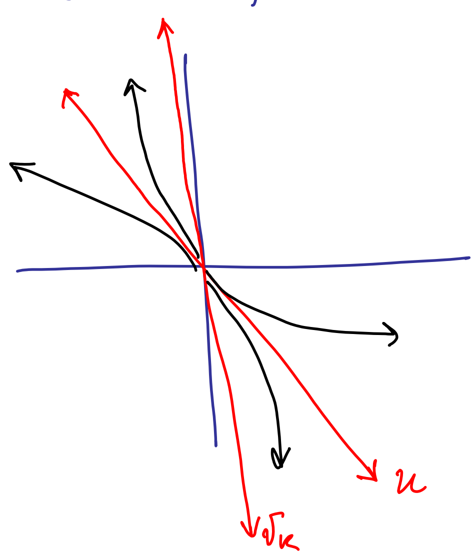
$k > -2$, $k < -1$

$(|k+2| < 1)$



$k > -1$

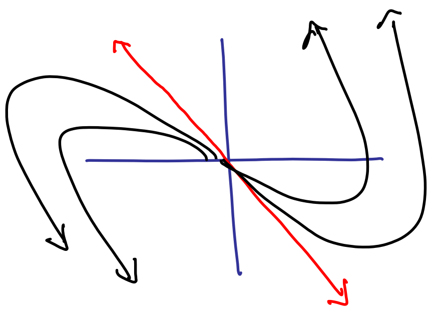
$(|k+2| > 1)$



[<u>Nota</u>: Se $k = -1$, c'è l'autovalore doppio 1 e non è garantito che la matrice $J_{-1}(0,0)$ sia diagonalizzabile. Se lo è, $(0,0)$ è un nodo a stella. Ma

$$J_{-1}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha l'unico autospazio $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ e non è dunque diagonalizzabile. Il ritratto di fase NON è una stella, ma del tipo



Poiché questa situazione non è stata studiata a lezione, il testo non richiedeva di studiarla.]