1

Scritto di Fisica Matematica - prima parte -
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 13 settembre 2011
sottolineare: [**vecchio ordinamento 509**] [**nuovo ordinamento 270**]

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 1 messo in evidenza.

1. Si consideri l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$

$$\dot{x} = 2x(1 + y) - \sin(x + y)\,, \qquad \dot{y} = xy - y\,. \tag{1}$$

(a) Determinarne gli equilibri. (Si tenga conto che l'equazione $2t = \sin t$ ha una sola soluzione).

(b) Linearizzarla agli equilibri.

(c) Tracciare il ritratto in fase dei sistemi linearizzati in tutti gli equilibri (determinando anche gli autovettori nel caso di selle e nodi, se presenti).

(d) Cosa si può dire delle proprietà di stabilità degli equilibri di (1)? Dare l'enunciato (preciso) dei teoremi che eventualmente si invochino nella risposta.

(e) Enunciare la definizione di equilibri iperbolici ed ellittici, stabilire quali degli equilibri di (1) siano iperbolici od ellittici e, per quelli iperbolici, indicare la dimensione delle varietà stabile ed instabile.

(f) Si consideri adesso il sistema

$$\dot{x} = 2x(1 + y) - \sin(x + y) + \mu f(x, y)\,, \qquad \dot{x} = xy - y + \mu g(x, y) \tag{2}$$

ove $\mu \in \mathbb{R}$ ed f e g sono due funzioni differenziabili. Si può dire qualcosa su certi equilibri e relativa stabilità di questo nuovo sistema per valori piccoli di $|\mu|$? Perchè? (Se si invoca qualche teorema, enunciarlo in modo preciso)

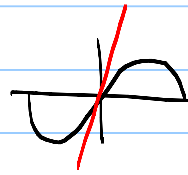
2. Tracciare il ritratto in fase dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} = x^3 + x^2\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

1. Soluzione esercizio 1

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x(1+y) - \sin(x+y) & \leftarrow \mathrm{I} \\ \dot{y} = (x-1)\,y & \leftarrow \mathrm{II} \end{cases}$$

a) L'unica soluzione di $\sin t = 2t$ è $t=0$. Dunque



II	$x=1$	$y=0$
I	$2(1+y)=\sin(1+y)$ $1+y=0$ $y=-1$	$2x = \sin x$ $x=0$

Equilibri: $(1,-1)$, $(0,0)$

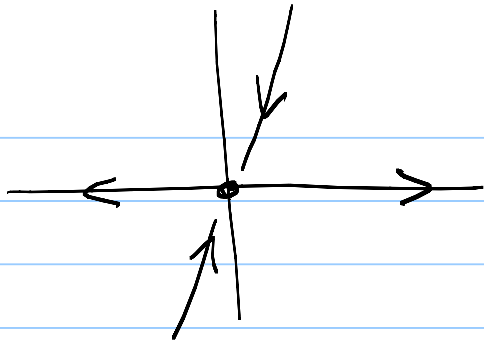
b)

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1+y) - \cos(x+y) & 2x - \cos(x+y) \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

$$J(1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -(x-1) - (y+1) \\ \dot{y} = -(x-1) \end{cases}$$

c) $(0,0)$: avl $\begin{cases} 1 & \text{con avt } \binom{1}{0} \\ -1 & \text{con avt } \binom{1}{2} \end{cases}$



sella

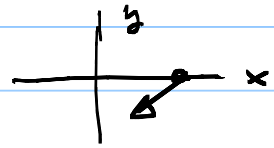
$$(1,-1) : \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+1)+1$$

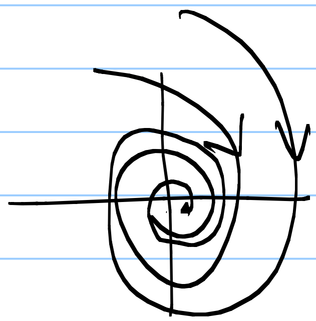
$$= \lambda^2 + \lambda + 1 \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

È un fuoco stabile.

Verso di avvolgimento: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ orario





d) Teo spettrale (l'enunciato lo trovate sui testi):

$(0,0)$ è instabile (un avl > 0)

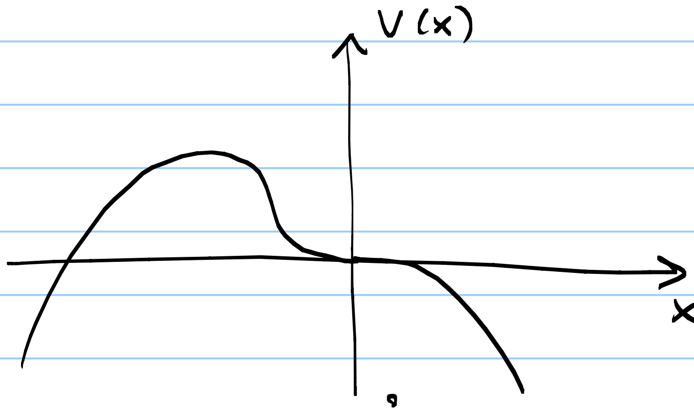
$(1,-1)$ è asintoticamente stabile (tutti gli avl hanno $Re = -\frac{1}{2} < 0$)

e) $(0,0)$ è iperbolico. Varietà stab 1 dim, varietà instab. 1 dim

$(1,-1)$ è iperbolico. Varietà stab 2-dim.

f) Gli eq. iperbolici sono continuabili. Dunque per $|\mu|$ piccolo vi è un eq. che è un punto di sella vicino a $(0,0)$ e un eq. che è un fuoco stabile vicino a $(1,-1)$.

2) Soluzione esercizio 2



$$\ddot{x} = x^3 + x^2 =$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$= -\frac{d}{dx}\left[-\frac{x^3}{4}\left(x + \frac{4}{3}\right)\right]$$