



# Corso di Laurea in Matematica

## Fisica Matematica – Parte I (2012)

### Autovalutazione

Terza settimana (Lezioni 8-11)

#### Argomenti trattati

- Dalle dispense: Sezioni 3.4.A,B,E (nella dimostrazione della Prop. 3.27 si può tralasciare la parte finale, che prova che  $J = I^{fX}$ ), 3.5 (senza equivalenza orbitale), 4.2.C, 4.3, 4.4, 5.1, 5.2, 5.3.A, 5.3.B (inizio).

#### Domande di teoria

- Cosa è il push-forward di un campo vettoriale sotto un diffeomorfismo? Cosa significa che due flussi sono coniugati da un diffeomorfismo? Che relazione c'è fra le due cose?
- Quale è la relazione fra riscalamenti (= moltiplicazione per funzione) di campi vettoriali e riparametrizzazioni temporali? Fare un enunciato preciso e dimostrarlo.
- Può un sistema che ha un integrale primo non costante avere equilibri attrattivi? Dimostrarlo.
- Classificare i sistemi lineari in  $\mathbf{R}^2$ , nell'ipotesi di diagonalizzabilità della matrice. Tracciare il relativo diagramma di biforcazione.
- Descrivere il flusso di  $\dot{z} = Az$  con  $A$  matrice  $n \times n$  diagonalizzabile.
- Definire i sottospazi stabile, instabile e centrale per l'equazione lineare  $\dot{z} = Az$ ,  $z \in \mathbf{R}^n$ . Quali proprietà ha la restrizione ad essi del flusso? (Si assuma  $A$  diagonalizzabile).
- Cosa sono le varietà stabile ed instabile di un equilibrio iperbolico? Che relazione c'è fra esse ed i sottospazi stabile ed instabile della linearizzazione?
- Cosa sono un equilibrio iperbolico ed uno ellittico? Cosa si può dire del ritratto in fase, vicino ad essi, per un'equazione differenziale nonlineare?
- Come si dimostra che le soluzioni lungo le varietà stabile ed instabile di un equilibrio iperbolico non lo raggiungono, ma tendono asintoticamente ad esso?
- Cos'è un insieme invariante di un'equazione differenziale? E un integrale primo? Che relazione c'è tra essi?
- Cosa è la derivata di Lie?
- Cosa significa (analiticamente e geometricamente) che  $k \geq 1$  integrali primi sono funzionalmente indipendenti? Che conseguenze ha questo sui loro insiemi di livello?

- Qual è il numero massimo di integrali primi funzionalmente indipendenti per un'equazione differenziale in  $\mathbf{R}^n$ ?
- Quando vi sono  $\dim \Omega - 1$  integrali primi, quale relazione vi è tra i loro insiemi comuni di livello regolari e le orbite? Dimostrarlo.
- Il campo vettoriale è tangente agli insiemi di livello regolari degli integrali primi? Se sì dimostrarlo.
- Sapere dedurre il sistema di Lotka-Volterra, adimensionalizzarlo, determinarne gli equilibri, la linearizzazione in essi.
- Che proprietà ha l'esponenziale di una matrice antisimmetrica?

### Esercizi

- Tutti gli esercizi pertinenti dalle dispense.
- Determinare i sottospazi stabile, instabile e centrale dell'equazione  $\dot{z} = Az$  nei casi seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 11 & -11 & 1 \end{pmatrix}$$

Disegnare il ritratto in fase su ciascuno di tali sottospazi e, nel secondo caso, anche il ritratto in fase del sistema.

- Si consideri il sistema

$$\dot{x} = x(1 - x - y), \quad \dot{y} = y(2 - x - y).$$

(a) Determinarne gli equilibri, linearizzare il sistema attorno a ciascuno di essi, e tracciare schematicamente il ritratto in fase dei sistemi linearizzati; nel caso di nodi e selle determinare anche le direzioni dei sottospazi stabili/instabili della linearizzazione.

(b) Si riesce ad immaginare come sarà fatto il ritratto in fase?