Indice

(Versione 2005.1)

Capitolo 1

Teoria Qualitativa delle Equazioni Differenziali

I fisici si stanno abituando a poco a poco a considerare loro scopo precipuo la descrizione dei fatti mediante equazioni differenziali. (E. Mach, 1883)

.... non dimendicando il detto di Poincaré, che un sistema di equazioni differenziali è solo più o meno integrabile. (G.D. Birkhoff, 1927)

La teoria delle equazioni differenziali ordinarie è uno degli strumenti fondamentali delle scienze matematiche. Questa teoria permette di studiare tutti i possibili processi evolutivi che hanno la proprietà di essere: deterministici, a dimensione finita e differenziabili. (V.I. Arnold, 1976)

Come è noto dai corsi di Matematica e di Fisica, le equazioni differenziali sono uno strumento molto potente, e quasi ubiquo, per la modellizzazione di un vasto campo di fenomeni fisici, chimici, biologici, ingegneristici ma anche economici, demografici, etc. In Meccanica, poi, le equazioni differenziali svolgono un ruolo assolutamente basilare, dal momento che tutta la Meccanica è costruita sull'equazione (differenziale) di Newton. Di fatto, la Meccanica consiste, in grandissima parte, proprio nello studio delle soluzioni di equazioni differenziali. Per questo motivo, iniziamo lo studio della Meccanica con uno studio preliminare, e un po' generale, ma focalizzato agli sviluppi successivi, delle equazioni differenziali.

Esclusi pochi casi, determinare analiticamente le soluzioni di un'equazione differenziale è in generale estremamente difficile, se non addirittura impossibile. Per questo motivo, ha assunto sempre maggiore importanza il loro studio "qualitativo", basato sull'idea che, anche se non è possibile determinarne le soluzioni, se ne possono comunque studiare proprietà che sono di tipo qualitativo, geometrico. Questo primo capitolo fornisce una introduzione, elementare, a questo argomento.

1.1 Analisi qualitativa nello spazio delle fasi

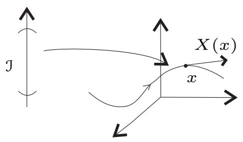
A. Campi vettoriali ed equazioni differenziali. Un *campo vettoriale* definito su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ è una mappa

$$X \,:\, U \to \mathbb{R}^n$$

che ad ogni punto x di U associa un vettore $X(x)$ di $\mathbb{R}^n$. Si può pensare il vettore $X(x)$ come "attaccato" al punto x. (In effetti, $X(x)$ è un vettore tangente ad $\mathbb{R}^n$ nel punto x).

Ogni campo vettoriale X definisce un'equazione differenziale del primo ordine

$$\dot{x} \;=\; X(x)\,, \tag{1.1.1}$$



che è anche chiamata *sistema* di equazioni differenziali del primo ordine se $n > 1$. Una *soluzione* di questa equazione differenziale è una curva

$$x \,:\, \mathcal{I} \to U\,,$$

cioè una mappa da un intervallo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ a U, il cui "vettore velocità" è in ogni punto uguale al campo vettoriale:

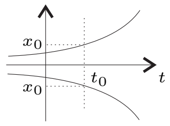
$$\frac{dx}{dt}(t) \;=\; X(x(t)) \qquad \forall t \in \mathcal{I}\,.$$

Una soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = X(x)$ è anche chiamata *curva integrale* del campo vettoriale X.

Gran parte del nostro studio farà riferimento al cosiddetto *problema di Cauchy:* si tratta di trovare la soluzione $t \mapsto x(t)$ che passa per un assegnato punto x_0 ad un istante iniziale t_0: soddisfa cioè $x(t_0) = x_0$. Come è noto, e come ricordiamo con maggior precisione nella sezione 1.1.C, sotto ipotesi molto larghe sul campo vettoriale il problema di Cauchy ha sempre una ed una sola soluzione, che denoteremo

$$x(t; x_0, t_0)\,. \tag{1.1.2}$$

Dunque, $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$. Si noti che per x_0 fissato, la curva $t \mapsto x(t; x_0, t_0)$ fornisce una soluzione. Al variare anche di x_0, la mappa $(t, x_0) \mapsto x(t; x_0, t_0)$ fornisce tutte le soluzioni dell'equazione. Risolvere l'equazione significa dunque determinare questa mappa (che come vedremo più avanti si chiama 'flusso' o anche 'integrale generale' dell'equazione differenziale).



Esempi: (i) L'equazione $\dot{x} = kx$ sulla retta reale, cioè con $x \in \mathbb{R}$, ove k è una costante non nulla, ha l'integrale generale

$$x(t; x_0, t_0) = e^{k(t-t_0)} x_0\,.$$

(ii) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora l'equazione lineare

$$\dot{x} \;=\; A\,x\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

ha l'integrale generale

$$x(t; x_0) \;=\; \exp(At)\, x_0$$

(Per la definizione e le proprietà dell'esponenziale di matrice si veda la sezione 1.3, dove verranno anche fatti degli esempi.) Nei corsi di analisi si usa talvolta una diversa terminologia, soprattutto in relazione alle equazioni lineari. Si chiama *integrale generale* di un'equazione differenziale in $\mathbb{R}^n$ una mappa

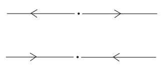
$$(t, c_1, \ldots, c_n) \mapsto x(t; c_1, \ldots, c_n)$$

che, per ogni valore degli n parametri $c = (c_1, \ldots, c_n)$ fornisce una soluzione ("integrale particolare") dell'equazione e, al variare di c, fornisce una famiglia di soluzioni (spesso si richiede tutte). Naturalmente, vi è arbitrarietà nella scelta delle "costanti di integrazione" c. Se come n–upla di costanti di integrazione c si prende il dato iniziale x_0 ad un certo istante t_0, allora si trova proprio la mappa $(t, x_0) \mapsto x(t; x_0, t_0)$ data dalla (1.1.2).

B. Analisi qualitativa. In pratica, può essere estremamente difficile, se non addirittura impossibile, determinare il 'flusso' $(t, x_0) \mapsto x(t; t_0, x_0)$ di un'equazione differenziale. Come vedremo, il teorema di esistenza ed unicità assicura che tale funzione esiste ed è regolare (differenziabile). Ciononostante, tale funzione può essere molto complicata, non esprimibile in termini di funzioni elementari, nè ottenibile con operazioni "semplici", tipo calcolo di integrali, inversioni di funzioni etc. Qualche indicazione sul perchè questo avvenga sarà parte degli scopi del corso. Al di là delle difficoltà pratiche, c'è da dire comunque che un oggetto troppo complicato è scarsamente utile, perchè è difficile o impossibile trarne informazioni utili. Per questo motivo si cerca di studiare altre proprietà delle soluzioni delle equazioni differenziali, più accessibili della loro espressione analitica, ma comunque significative e anzi, in certi casi, forse ancor più significative delle stesse espressioni analitiche al fine di una comprensione globale del comportamento delle soluzioni.

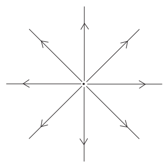
Per cominciare, si sposta l'enfasi dalle soluzioni alle *orbite* dell'equazione differenziale: un'*orbita* è l'immagine di una soluzione $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$, cioè la "curva geometrica" $x(\mathcal{I})$, orientata nel verso dei tempi crescenti. Lo spazio $\mathbb{R}^n$, o l'insieme U, nel quale è definita l'equazione, e al quale appartengono quindi le orbite, viene di solito chiamato *spazio delle fasi* dell'equazione. Naturalmente, anche la determinazione analitica delle orbite può essere proibitiva (quanto quella delle soluzioni, si veda più avanti), ma si vorrebbe capire, per lo meno, e per quanto possibile, come le orbite siano disposte nello spazio delle fasi. L'insieme di tutte le orbite costituisce il cosiddetto *ritratto in fase.*

Esempi. (i) Come già osservato, se $k \neq 0$, le soluzioni dell'equazione $\dot{x} = kx$ sulla retta sono date da $x(t; x_0, 0) = e^{kt} x_0$. Dunque, ci sono tre orbite distinte: il semiasse positivo, il semiasse negativo, ed un'orbita costituita dal solo punto 0. Se $k < 0$ tutte le soluzioni tendono a 0 per $t \to +\infty$ mentre se $k > 0$ esse si allontanano indefinitamente (eccetto naturalmente quella con $x_0 = 0$). Il comportamento delle soluzioni per $t \to -\infty$ è opposto.



(ii) L'equazione differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x}_1 = x_1 , \qquad \dot{x}_2 = x_2$$



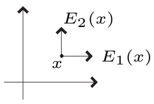
ha l'integrale generale

$$x(t; \overline{x}, 0) = e^t \overline{x}$$

ovvero $x_1(t; \overline{x}, 0) = e^t \overline{x}_1$, $x_2(t; \overline{x}, 0) = e^t \overline{x}_2$. Le orbite sono allora tutti i raggi uscenti dall'origine (esclusa) e l'origine.

(iii) Se $e_1, \ldots, e_n$ sono i vettori di una base di $\mathbb{R}^n$, indichiamo con E_k il campo vettoriale che, in ciascun punto, assume il valore e_k: $E_k(x) = e_k \ \forall x$. Allora ogni campo vettoriale X può essere scritto in modo unico come combinazione lineare di $E_1, \ldots, E_n$, con coefficienti $X_1, \ldots, X_n$ che sono funzioni:

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k E_k , \qquad X(x) = \sum_{k=1}^{n} X_k(x) e_k , \tag{1.1.3}$$



(Questo vuol dire che l'insieme dei campi vettoriali su $U \subset \mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale reale, ma di dimensione infinita. Nella (1.1.3) si è riusciti a scrivere ogni campo vettoriale come combinazione lineare di n campi vettoriali solo perchè si è permesso che i coefficienti siano funzioni, che cambiano da punto a punto, non numeri).

Nota: Se si rappresentano i vettori di $\mathbb{R}^n$ come vettori colonna, allora il campo vettoriale si scrive

$$X(x) \;=\; \begin{pmatrix} X_1(x) \\ . \\ . \\ . \\ X_n(x) \end{pmatrix}$$

e questa notazione è soprattutto comoda quando compaiono prodotti "riga per colonna" con matrici. Per semplicità a volte si scrive anche $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ma bisogna stare attenti a non usare questa notazione per fare i prodotti con le matrici. Pe questo motivo, in certi testi si aggiunge, più correttamente, il segno di trasposta: $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$.

C. Equazioni del secondo ordine. Come è noto, ogni equazione differenziale di ordine superiore al primo (purchè esprimibile in forma normale, cioè risolubile rispetto alla derivata di ordine più alto) può essere scritta come equazione del primo ordine di dimensione più alta, trattando come variabili indipendenti tutte le derivate della funzione incognita, eccetto quella di ordine più alto. Da un punto di vista puramente analitico, il vantaggio di questo procedimento può non riuscire molto chiaro. Il fatto è però che esso permette di applicare allo studio delle equazioni di ogni ordine tutti i metodi, le idee ed i teoremi validi per le equazioni del primo ordine. E fra questi, soprattutto, la possibilità di analizzare l'equazione nello spazio delle fasi.

Limitiamoci al caso che incontreremo nello studio della meccanica, quello di un'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} \;=\; Y(x, \dot{x})\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.1.4}$$

Questo caso include l'equazione di Newton per una particella (con $Y =$ forza/massa ed $n = 3$) e, più in generale, come si vedrà, anche le equazioni del moto dei sistemi vincolati, cioè le equazioni di Lagrange.

Aggiungendo alle n coordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ altre n coordinate $v = (v_1, \ldots, v_n)$ per rappresentare le velocità si ottiene lo spazio delle fasi $2n$–dimensionale $\mathbb{R}^{2n} \ni (x, v)$ e l'equazione (1.1.4) è equivalente al sistema del primo ordine

$$\dot{x} \;=\; v\,, \qquad \dot{v} \;=\; Y(x, v)\,, \qquad (x, v) \in \mathbb{R}^{2n} \tag{1.1.5}$$

ovvero $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = X(x, v)$ con

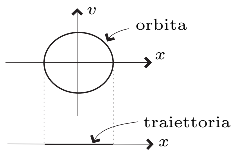
$$X(x, v) \;:=\; \begin{pmatrix} v \\ Y(x, v) \end{pmatrix}.$$

"Equivalente" significa qui che se una curva $t \mapsto x_t \in \mathbb{R}^n$ è soluzione di (1.1.4) allora $t \mapsto (x_t, \dot{x}_t) \in \mathbb{R}^{2n}$ è soluzione di (1.1.5) e, viceversa, se $t \mapsto (x_t, v_t)$ è soluzione di (1.1.5) allora $t \mapsto x_t$ è soluzione di (1.1.4) e $v_t = \dot{x}_t$. (Verificarlo, come semplice esercizio).

Dunque, un'equazione del secondo ordine in $\mathbb{R}^n$ può essere pensata come un particolare sistema del primo ordine in $\mathbb{R}^{2n}$. La particolarità risiede nel fatto che la seconda metà delle componenti di una soluzione $t \mapsto (x_t, v_t)$ sono le derivate temporali della prima metà:

$$\dot{x}_t \;=\; v_t \qquad \forall t\,.$$

Basta pertanto conoscere le prime n componenti di una soluzione per conoscerla tutta. Tuttavia, come si capirà, al fine dell'analisi qualitativa dell'equazione è indispensabile pensare la soluzione come una curva $t \mapsto (x_t, v_t)$ nello spazio delle fasi di dimensione $2n$.



Avvertenze: (i) Nello studio di un'equazione del secondo ordine $\ddot{x} = Y(x, v)$, per evitare di fare confusione, è indispensabile distinguere sempre lo spazio delle coordinate x dallo "spazio delle fasi" del corrispondente sistema del primo ordine, che ha dimensione doppia. Per agevolare questa distinzione, adottando sin d'ora la terminologia usata in meccanica, chiameremo "spazio delle configurazioni" lo spazio delle coordinate x e "traiettorie" le immagini delle curve $t \mapsto x_t$.

(ii) Finora abbiamo usato il puntino per indicare le derivate di curve: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$. In meccanica, per sottolineare il fatto che lungo ogni soluzione $t \mapsto (x_t, v_t)$ di un'equazione del secondo ordine si ha $v_t = \dot{x}_t$, con un'improprietà di notazione entrata ormai nella tradizione, e alla quale naturalmente ci atterremo, si denotano le coordinate nello spazio delle fasi con $(x, \dot{x})$ invece che con (x, v). Questo può creare un po' di confusione, soprattutto all'inizio—confusione che si risolve chiedendosi, di volta in volta, se si ha a che fare con coordinate o con soluzioni, cioè curve.

Esempio: L'oscillatore armonico. L'oscillatore armonico è descritto dall'equazione del secondo ordine

$$m\ddot{x} = -kx\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \tag{1.1.6}$$

ove m e k sono costanti positive, ovvero dal sistema del primo ordine in $\mathbb{R}^2 \ni (x, v)$

$$\dot{x} = v\,, \qquad \dot{v} = -\omega^2 x \qquad (\omega = \sqrt{k/m}\,)\,. \tag{1.1.7}$$

Come si sa, l'equazione (1.1.6) ha l'integrale generale

$$x(t; A, B) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{1.1.8}$$

con A e B costanti arbitrarie. Dunque, tutte le soluzioni sono periodiche di periodo $T = 2\pi/\omega$. Per ottenere il 'flusso' esprimiamo le costanti A e B in termini delle condizioni iniziali (x_0, v_0) a $t = 0$. Chiaramente $x(0; A, B) = A$. Derivando $x(t; A, B)$ si trova poi $v(t; A, B) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ e dunque $v(0; A, B) = B\omega$. Pertanto, la componente x della soluzione con dato iniziale (x_0, v_0) è

$$x(t; x_0, v_0) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{1.1.9}$$

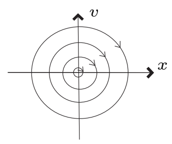
e la seconda componente della soluzione, cioè la velocità, è

$$v(t; x_0, v_0) = -\omega\, x_0\, \sin\omega t + v_0\, \cos\omega t\,. \tag{1.1.10}$$

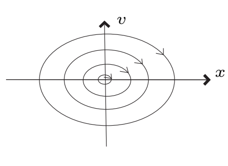
Usando queste espressioni delle soluzioni, costruiamo adesso il ritratto in fase. (Vedremo in seguito che vi è un metodo molto più semplice per farlo, che sfrutta la conservazione dell'energia, ma è istruttivo farlo una prima volta in questo modo.)

Consideriamo innanzittutto il caso $\omega = 1$. L'integrale generale (1.1.9), (1.1.10) si può scrivere

$$\begin{pmatrix} x(t; x_0, v_0) \\ v(t; x_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \tag{1.1.11}$$



Così, le orbite sono circonferenze concentriche all'origine, e l'origine stessa. Si noti che le orbite circolari sono percorse in verso orario. (Il verso di percorrenza è imposto dalla prima equazione, $\dot{x} = v$, che implica che, lungo le soluzioni, la x cresce nel semipiano superiore e decresce in quello inferiore.)



Se $\omega \neq 1$, invece, le orbite sono ellissi di centro l'origine, ancora percorse in senso orario. (Verificarlo. Esprimere i semiassi dell'ellisse in funzione delle condizioni iniziali).

Esercizi 1.1.1 (i) Disegnare il ritratto in fase di $m\ddot{x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$ ("particella libera" unidimensionale).

(ii) Disegnare il ritratto in fase dell'equazione $\ddot{x} = g$ (caduta libera sotto la forza peso).

(iii) Mostrare che l'integrale generale (1.1.7) dell'oscillatore armonico si può scrivere anche

$$x(t; C, \delta) \;=\; C\,\cos(\omega t + \delta)\,, \qquad C \geq 0\,, \quad 0 \leq \delta < 2\pi\,.$$

Esprimere C e δ in funzione dei dati iniziali. (Questa forma dell'integrale generale è comoda, ma si deve tenere presente che non vi è corrispondenza biunivoca fra i dati iniziali ed i valori delle due costanti C e δ: infatti, la soluzione di equilibrio $x(t) = 0$ si ottiene per $C = 0$ e qualunque valore di δ).

(iv) Cosa cambierebbe nel ritratto in fase dell'oscillatore armonico se si prendesse ω negativo?

(v) Se l'equazione $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ è definita in un aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, dove è definita l'equazione del primo ordine corrispondente?

D. Il teorema di esistenza ed unicità. Uno dei risultati fondamentali nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie è il fatto che, sotto ipotesi di regolarità abbastanza larghe, il problema di Cauchy ha sempre soluzione, e anzi essa è (in un senso da precisare appena) unica. Ci limitiamo a formulare in modo preciso ed a commentare questi risultati, rimandando per le loro dimostrazioni ai testi di analisi.

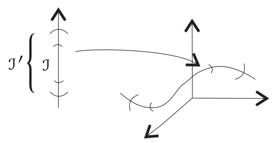
Avvertenza: Nel seguito, assumeremo tacitamente che tutte le funzioni, campi vettoriali etc. siano "differenziabili", intendendo con questo $\mathcal{C}^\infty$. Un vantaggio è la semplicità di esposizione: derivando funzioni $\mathcal{C}^\infty$ non si perde un'ordine di derivabilità, etc. Inoltre, nelle applicazioni, si ha di solito a che fare con oggetti che sono o $\mathcal{C}^\infty$ (e anzi, addirittura reali analitici) oppure neppure continui: si pensi per esempio al campo di forza gravitazionale. Se si fa eccezione per certe situazioni molto speciali e delicate, di norma non vi sono differenze significative fra, diciamo, il caso $\mathcal{C}^1$ e quello $\mathcal{C}^\infty$. Vi è invece molta differenza fra $\mathcal{C}^0$ e $\mathcal{C}^1$. Per questo, non insisteremo sulle condizioni di differenziabilità minima: nella classe di problemi che studieremo, il caso $\mathcal{C}^\infty$ è tipico, e vi è molto da imparare già su di esso.

Cominciamo col formulare il teorema di esistenza:

Proposizione 1 (Esistenza) *Supponiamo che $X : U \to \mathbb{R}^n$ sia differenziabile. Allora, per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $x_0 \in U$ esistono un intervallo $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ che contiene t_0 ed una soluzione $x : \mathcal{J} \to U$ di $\dot{x} = X(x)$ tale che $x(t_0) = x_0$.*

Il teorema assicura l'esistenza, per ogni dato iniziale, di una soluzione definita in un intervallo $\mathcal{J}$. Siccome non vi è controllo sull'ampiezza dell'intervallo di esistenza $\mathcal{J}$ si parla di "esistenza in piccolo". Il teorema non assicura che si possa prendere $\mathcal{J} = \mathbb{R}$ e anzi, questo è vero solo sotto ipotesi aggiuntive sul campo vettoriale, si veda più sotto. Tuttavia, per semplicità di trattazione, nel seguito assumeremo che le soluzioni siano definite per tutti i tempi. (Anche qui vale quel che si è già detto: c'è molto da imparare già dal caso "semplice": situazioni più complicate vanno studiate caso per caso.)

Veniamo ora all'unicità:



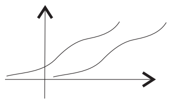
Proposizione 2 (Unicità) *Supponiamo che $X : U \to \mathbb{R}^n$ sia differenziabile. Se $x : \mathcal{J} \to U$ e $x' : \mathcal{J}' \to U$ sono due soluzioni con lo stesso dato iniziale (allo stesso istante iniziale), allora $x'(t) = x(t)$ per $t \in \mathcal{J}' \cap \mathcal{J}$.*

L'esistenza ed unicità delle soluzioni si può interpretare come *determinismo:* se i punti dello spazio delle fasi rappresentano lo "stato" del sistema, allora la conoscenza dello stato iniziale determina completamente l'evoluzione successiva (e passata, per $t < 0$) del sistema.

L'unicità ha varie conseguenze importanti. Innanzittutto, essa assicura che la scelta dell'istante iniziale t_0 non ha alcuna importanza nel determinare la soluzione: conta solo il tempo $t - t_0$ trascorso da esso. Precisamente:

Corollario 1 *Per ogni t_0 ed x_0 si ha*

$$x(t + t_0; x_0, t_0) \;=\; x(t; x_0, 0)\,. \tag{1.1.12}$$



Dimostrazione. Consideriamo la curva $t \mapsto \tilde{x}(t) := x(t_0 + t; x_0, t_0)$. Essa è soluzione di $\dot{x} = X(x)$ perchè

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt}(t) \;&=\; \frac{d}{dt}x(t_0 + t; x_0, t_0) \;=\; \frac{d}{d\tau}x(\tau; x_0, t_0)\Big|_{\tau = t_0 + t}\,\frac{d}{dt}(t_0 + t) \\ &=\; X\big(x(t_0 + t; x_0, t_0)\big) \;=\; X\big(\tilde{x}(t)\big)\,. \end{aligned}$$

Inoltre, questa curva soddisfa $\tilde{x}(0) = x(t_0; x_0, t_0) = x_0$. Dunque, per l'unicità, $\tilde{x}(t)$ è *la* soluzione con dato iniziale x_0 al tempo $t = 0$, cioè $x(t; x_0, 0)$. ∎

Questo fatto significa che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale è "invariante per traslazioni temporali": traslando nel tempo una soluzione, se ne trova un'altra. (Questo è intuitivo perchè, se si pensa alla soluzione come ad un punto che si muove, per strada esso incontra sempre lo stesso campo vettoriale, indipendentemente da quando è partita. Ovviamente, questo non sarà più vero se il campo vettoriale dipende dal tempo.) Per questo motivo, possiamo limitarci a considerare solo la soluzione con dato iniziale a $t = 0$, che per semplicità di notazione d'ora in poi indicheremo $x(t; x_0)$:

$$x(t; x_0) \;:=\; x(t; x_0, 0)\,.$$

Si noti anche che la Proposizione 1 implica che soluzioni che hanno lo stesso dato iniziale, ma ad istanti diversi, hanno la stessa orbita. A sua volta, questo implica che *nello spazio delle fasi, orbite diverse non si intersecano.* Se questo avvenisse, infatti, il punto di intersezione sarebbe dato iniziale all'istante $t = 0$ di due diverse soluzioni, contro l'unicità. Siccome poi il teorema di esistenza implica che per ogni punto x_0 dello spazio delle fasi passa un'orbita (basta prendere x_0 come dato iniziale), si conclude che

Corollario 2 *Per ogni punto dello spazio delle fasi passa una ed una sola orbita.*

Questo fatto spiega, in particolare, perchè si analizzino le equazioni di ordine superiore al primo pensandole come sistemi del primo ordine. Per esempio, nel caso di un'equazione del secondo ordine

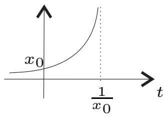
$$\dot{x} \;=\; v\,, \qquad \dot{v} \;=\; Y(x, v)\,, \qquad (x, v) \in \mathbb{R}^{2n}\,,$$

le orbite nello spazio delle fasi non si intersecano. Invece, le "traiettorie" $t \mapsto x_t \in \mathbb{R}^n$ nello spazio delle configurazioni possono intersecarsi: moti diversi possono passare per lo stesso punto x, ma con velocità diverse. Si pensi, per esempio, al caso di una soluzione periodica dell'oscillatore armonico.

Osservazioni: (i) Il teorema di esistenza assicura l'esistenza di una soluzione con qualche intervallo di esistenza $\mathcal{I}$, Naturalmente, può avvenire che la soluzione sia estendibile ad un intervallo di esistenza più grande, esista cioè *un'altra* soluzione

$x' : \mathcal{I}' \to \mathbb{R}$, con $\mathcal{I}' \supset \mathcal{I}$, tale che $x'(t) = x(t)$ per $t \in \mathcal{I}$. Il teorema di unicità assicura allora che queste due soluzioni coincidono ove sono entrambe definite. Una *soluzione massimale* è una soluzione $x : \mathcal{I} \to U$ il cui intervallo di esistenza non è ulteriormente estendibile. Nel seguito, per "soluzione" intenderemo sempre "soluzione massimale".

(ii) Come già osservato, può succedere che le soluzioni di un'equazione differenziale non siano definibili per tutti i tempi: anche una soluzione massimale può avere intervallo di esistenza $\mathcal{I} \neq \mathbb{R}$. Intuitivamente, questo avviene quando la soluzione "scappa" in un tempo finito dal dominio U nel quale è definito e regolare il campo vettoriale. Precisamente, questo può avvenire in due modi. Una possibilità è che la soluzione arrivi all'infinito in un tempo finito, cosa che può avvenire se il campo vettoriale cresce molto in fretta per $|x| \to \infty$. Un classico esempio è costituito dall'equazione $\dot{x} = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, che ha l'integrale generale



$$x(t; x_0, 0) \;=\; \frac{x_0}{1 - t x_0}\,.$$

(Al contrario, le soluzioni delle equazioni lineari sono definite per tutti i tempi, si veda la sezione 1.3). L'altra possibilità è che X abbia delle singolarità e che la soluzione ne raggiunga una in un tempo finito, come nel caso dell'equazione $\ddot{x} = -1/x$, $x \in \mathbb{R}$ (verificarlo).

(iii) Il teorema di esistenza vale sotto la sola continuità del campo vettoriale. Per l'unicità (che svolge un ruolo fondamentale) la continuità invece non basta: serve la cosidetta Lipschitzianità locale, che è assicurata, per esempio, se il campo vettoriale è di classe $\mathcal{C}^1$.

E. Equilibri e linearizzazione. Una *soluzione di equilibrio* di $\dot{x} = X(x)$ è una sua soluzione costante:

$$x(t) \;=\; \overline{x} \qquad \forall t\,.$$

Si dice allora che il punto $\overline{x}$ è un *punto di equilibrio* o semplicemente un *equilibrio* dell'equazione. L'interesse degli equilibri è duplice. Da un lato, spesso si è interessati all'esistenza di equilibri per motivi applicativi: un equilibrio rappresenta uno 'stato stazionario' di un sistema. Dall'altro, gli equilibri sono spesso il punto di partenza dello studio di un'equazione differenziale perchè, anche nel caso di equazioni per altri aspetti molto difficili da studiare, sono particolarmente facili da determinare:

Proposizione 3 *Un punto $\overline{x}$ è un equilibrio di $\dot{x} = X(x)$ se e solo se $X(\overline{x}) = 0$.*

Dimostrazione. Se $\overline{x}$ è un equilibrio, allora $0 = \frac{d}{dt}x(t;\overline{x}) = X(x(t;\overline{x})) = X(\overline{x})$. Viceversa, se $X(\overline{x}) = 0$, allora la curva costante $t \mapsto \overline{x}$ risolve $\dot{x} = X(x)$); per l'unicità, essa è la soluzione con dato iniziale $\overline{x}$. ■

Dunque se il dato iniziale x_0 è un equilibrio, cioè $X(x_0) = 0$, allora la soluzione non si muove dall'equilibrio. Un'orbita che contiene un punto di equilibrio consiste di questo punto soltanto. Per questo motivo gli zeri di un campo vettoriale, cioè gli equilibri dell'equazione, sono chiamati anche *punti singolari* del campo: quel che è singolare, in questi punti, non è il campo vettoriale, ma le orbite, che si riducono a punti.

Consideriamo adesso gli equilibri di un'equazione del secondo ordine $\ddot{x} = Y(x, \dot{x})$, pensandola come sistema del primo ordine. Il campo vettoriale

$$X(x, v) \;=\; \begin{pmatrix} v \\ Y(x, v) \end{pmatrix}$$

si annulla in un punto $(\overline{x}, \overline{v})$ se e solo se $\overline{v} = 0$ e

$$Y(\overline{x}, 0) = 0\,. \tag{1.1.13}$$

Dunque, nello spazio delle fasi, gli equilibri di $\dot{x} = v$, $\dot{v} = Y(x, v)$ sono tutti e soli i punti $(\overline{x}, 0)$ con $\overline{x}$ che soddisfa (1.1.13). In tal caso, diremo che $\overline{x}$ è una *configurazione di equilibrio.* (Attenzione: l'equilibrio è $(\overline{x}, 0)$, non $\overline{x}$, che non è neppure un punto dello spazio delle fasi).

Esercizi 1.1.2 (i) Se A è una matrice $n \times n$, quali sono gli equilibri dell'equazione lineare $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$?

(ii) Il *sistema di Lotka–Volterra*

$$\dot{x}_1 \;=\; \alpha x_1 - \beta x_1 x_2\,, \qquad \dot{x}_2 \;=\; -\gamma x_2 + \delta x_1 x_2\,, \tag{1.1.14}$$

ove α, β, γ e δ sono costanti positive, è un classico modello in dinamica delle popolazioni. (Vedere per esempio BGG, pagina 1.7). Trovarne gli equilibri.

(iii) Determinare tutti gli equilibri delle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & \dot{x} = x + y\,, & \dot{y} = x^2 - 1 & \\
\text{(b)} & \dot{x} = yz - y\,, & \dot{y} = x - xy\,, & \dot{z} = xz \\
\text{(c)} & \dot{x} = yz - y\,, & \dot{y} = x - xz\,, & \dot{z} = x + z
\end{array}$$

(iv) Quali sono gli equilibri di $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$, $x \in \mathbb{R}^2$?

(v) Sia a un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$. Quali sono gli equilibri dell'equazione $\dot{x} = a \times x$, $x \in \mathbb{R}^3$?

(vi) Determinare le configurazioni di equilibrio delle seguenti equazioni del secondo ordine (con $x \in \mathbb{R}$): (a) $\ddot{x} = 1 - x$; (b) $\ddot{x} = -x - \dot{x}$; (c) $\ddot{x} = \sin x - \dot{x}^2$; (d) $\ddot{x} = (1 - x^2)(x + \dot{x})$.

(vii) Nel testo abbiamo definito gli equilibri di una equazione del secondo ordine per mezzo degli equilibri del corrispondente sistema del primo ordine. Mostrare che questo è equivalente a definire come soluzione di equilibrio di un'equazione del secondo ordine ogni soluzione costante $t \mapsto \overline{x}$.

(viii)* Si consideri ancora l'equazione $\dot{x} = -x$. Senza usare le espressioni analitiche delle soluzioni, ma solo argomenti qualitativi (esistenza per tutti i tempi, unicità), mostrare che

1. una soluzione con dato iniziale $x_0 \neq 0$ non raggiungerà mai l'origine,
2. ogni soluzione tende asintoticamente all'origine per $t \to +\infty$. Stesso per $\dot{x} = -kx$ ma $t \to -\infty$.

Se l'equazione $\dot{x} = X(x)$ ha un equilibrio in $\overline{x}$, cioè $X(\overline{x}) = 0$, allora sviluppando in serie attorno ad $\overline{x}$ il campo vettoriale si ottiene

$$\dot{x} \;=\; A(x - \overline{x}) \;+\; .....$$

ove A è la matrice Jacobiana di X valutata in x_0, cioè la matrice di componenti

$$A_{ij} \;=\; \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\overline{x})\,,$$

ed i puntini denotano termini di grado superiore al primo in $(x - \overline{x})$. Vicino all'equilibrio, questi termini sono piccoli rispetto a quelli lineari. Si può dunque pensare che sia forse possibile ottenere delle informazioni sul comportamento delle soluzioni dell'equazione $\dot{x} = X(x)$, almeno vicino al punto di equilibrio, studiando l'*equazione linearizzata*

$$\dot{x} \;=\; A(x - \overline{x})\,.$$

Posto $y = x - \overline{x}$ (cioè con una traslazione dell'origine delle coordinate) questa equazione prende la solita forma $\dot{y} = Ay$.

Il vantaggio della linearizzazione è naturalmente che lo studio di un'equazione lineare è molto più facile di quello di una non lineare e si effettua con tecniche standard (si veda la sezione 1.3). Se sia vero che le proprietà delle soluzioni dell'equazione linearizzata forniscano informazioni su quelle delle soluzioni dell'equazione nonlineare è però una questione delicata sulla quale torneremo in seguito. In ogni caso, il procedimento di linearizzazione spiega perchè equazioni lineari si incontrino frequentemente: il loro studio è spesso il primo passo nello studio di equazioni nonlineari.

Esempio: Oscillatore e repulsore armonici. Si consideri l'equazione del secondo ordine

$$m\ddot{x} \;=\; F(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

e si assuma che $F(0) = 0$. Linearizzare il sistema del primo ordine corrispondente attorno all'equilibrio $(0,0)$. Mostrare che il sistema linearizzato è equivalente all'equazione del secondo ordine

$$m\ddot{x} \;=\; ax \qquad \text{ove} \qquad a \;=\; \frac{dF}{dx}(0)\,.$$

Dunque, se $a < 0$ si ottiene l'equazione dell'oscillatore armonico: $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Se invece $a > 0$ si ottiene quella del "repulsore armonico"

$$\ddot{x} \;=\; \omega^2 x \tag{1.1.15}$$

(in entrambi i casi $\omega^2 = |a|/m$). Questo indica l'importanza di queste due equazioni.

Costruiamo allora il ritratto in fase del repulsore armonico (1.1.15), ovvero $\dot{x} = v$, $\dot{v} = \omega^2 x$. (Anche qui vale la stessa considerazione fatta per l'oscillatore armonico: vi è un metodo molto più semplice per farlo ma è istruttivo farlo una prima volta a partire dalle espressioni delle soluzioni). Come si sa, l'integrale generale è

$$x(t;A,B) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

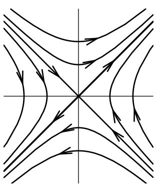
e derivando si ottiene $v(t;A,B) = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t}$. Esprimendo le costanti A e B in termini delle condizioni iniziali (x_0, v_0) a $t = 0$ si trova

$$x(t;x_0,v_0) \;=\; \frac{1}{2}\Big(x_0 + \frac{v_0}{\omega}\Big)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\Big(x_0 - \frac{v_0}{\omega}\Big)e^{-\omega t} \tag{1.1.16}$$

$$v(t;x_0,v_0) \;=\; \frac{\omega}{2}\Big(x_0 + \frac{v_0}{\omega}\Big)e^{\omega t} - \frac{\omega}{2}\Big(x_0 - \frac{v_0}{\omega}\Big)e^{-\omega t}\,. \tag{1.1.17}$$

Si riconosce a vista che, oltre all'equilibrio, vi sono quattro orbite speciali. Se infatti i dati iniziali sono tali che $v_0 = \omega v_0$ allora risulta

$$x(t;x_0,v_0) \;=\; x_0 e^{\omega t}\,, \qquad v(t;x_0,v_0) \;=\; v_0 e^{\omega t}$$



e dunque la soluzione resta sulla retta che congiunge l'origine col dato iniziale. La retta $v = \omega x$ consiste dunque di tre orbite: l'origine, che è un punto di equilibrio, ed i due rami con $x < 0$ e con $x > 0$ sui quali i moti si allontanano indefinitamente per $t \to +\infty$ e tendendo invece all'origine per $t \to -\infty$. (Per questo motivo, si dice che queste due orbite formano la "varietà uscente" o "varietà instabile" dell'equilibrio.) Qualcosa di simile avviene se $v_0 = -\omega v_0$, perchè allora

$$x(t;x_0,v_0) \;=\; x_0 e^{-\omega t}\,, \qquad v(t;x_0,v_0) \;=\; v_0 e^{-\omega t}\,.$$

La differenza è che ora, su ciascun ramo con $x < 0$ e con $x > 0$ della retta $v = -\omega x$, la soluzione tende asintoticamente all'origine per $t \to +\infty$ e all'infinito per $t \to -\infty$. (Queste orbite formano la "varietà stabile" o "varietà entrante".)

Una volta determinate queste orbite speciali è poi facile capire come sono disposte tutte le altre orbite. Infatti, per l'unicià, ogni altra orbita è contenuta nell'angolo delimitato da due di queste. Siccome il termine dominante nella soluzione (1.1.16), (1.1.17) è l'esponenziale positivo per $t \to +\infty$ e quello negativo per $t \to -\infty$, si capisce che per grandi $|t|$ l'orbita tende verso l'una o l'altra di esse, come mostrato in figura. In realtà, è facile determinare l'equazione delle orbite: eliminando il tempo fra le (1.1.16) e (1.1.17) si trova infatti

$$x_t^2 - \frac{v_t^2}{\omega^2} \;=\; x_0^2 - \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

e dunque le orbite sono la famiglia di iperboli di asintoti $v = \pm\omega x$.

Esercizi 1.1.3 (i) Linearizzare il sistema di Lotka–Volterra (1.1.14) nell'intorno dei suoi punti di equilibrio.

(ii) Linearizzare $\ddot{x} = -\sin x - \dot{x}$ attorno ai suoi equilibri con $x \in [0, 2\pi)$.

(iii) Linearizzare le equazioni (a) e (b) dell'esercizio (*1.1.2*) (iii) attorno ai loro punti di equilibrio.

F. Soluzioni periodiche. Una soluzione $t \mapsto x_t$ di un'equazione differenziale è *periodica di periodo* $T > 0$ se risulta

$$x_{t+T} \;=\; x_t \qquad \text{per tutti i} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

È evidente che l'orbita di una soluzione periodica è una curva chiusa. Non è difficile vedere che in realtà vale anche il viceversa: se un'orbita è chiusa, allora tutte le soluzioni con dato iniziale su di essa sono periodiche (con lo stesso periodo).

Esercizi 1.1.4 (i)* Dimostrare questa affermazione.

(ii) Dimostrare che se una soluzione è periodica di periodo T allora essa è anche periodica di periodi $2T$, $3T$, etc. (Il più piccolo $T > 0$ per il quale vale $x_{t+T} = x_T$ per tutti i $t \in \mathbb{R}$ si chiama 'periodo minimo').

(iii) Una soluzione di equilibrio è evidentemente periodica con ogni periodo $T > 0$. Mostrare che vale anche il viceversa: una soluzione periodica con ogni periodo positivo è costante.

In un certo senso, le soluzioni periodiche di un'equazione differenziale sono le più semplici soluzioni dopo gli equilibri e, come gli equilibri, hanno spesso importanza applicativa. Tuttavia, la loro determinazione è in generale molto più complessa di quella degli equilibri; non basta infatti trovare gli zeri di un campo vettoriale, ma si deve ricorrere a metodi più sofisticati (variazionali, topologici, perturbativi, etc.).

G. Dipendenza dai dati iniziali. Cambiamo adesso punto di vista e domandiamoci come dipendano le soluzioni di un'equazione differenziale dal dato iniziale. In altre parole, quali proprietà di regolarità ha, per ogni t fissato, la mappa $x_0 \mapsto x(t; x_0)$?

Proposizione 4 *Se X è differenziabile, allora per ogni t fissato la mappa $x_0 \mapsto x(t; x_0)$ è differenziabile.*

Cenno sulla dimostrazione della continuità. Ci limitiamo a dimostrare la sola continuità (ed in una forma appena più debole, cioè per tempi non troppo grandi) perchè questa dimostrazione poggia su un'importante stima quantitativa sulla velocità con la quale si allontanano l'una dall'altra due soluzioni con diversi dati iniziali. Fissiamo un dato iniziale x_0. Allora esiste una costante positiva K tale che

$$|x(t; x_0') - x(t; x_0)| \;\leq\; e^{Kt}\,|x_0' - x_0| \tag{1.1.18}$$

per tutti i dati iniziali x_0' "abbastanza vicini" ad x_0 e per tutti i tempi t "non troppo grandi". (Questo vuol dire: per ogni x_0 esistono un intorno B di x_0 e due numeri $K > 0$ e $T > 0$ tali che la (1.1.18) vale per tutti gli $x_0' \in B$ e $|t| < T$.)

Per definizione di continuità, la mappa $x_0 \mapsto x(t, x_0)$ è continua in x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che si abbia

$$|x_0' - x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |x(t; x_0') - x(t; x_0)| < \epsilon\,.$$

Per la (1.1.18), questo è vero con

$$\delta = \epsilon\, e^{-Kt}\,. \tag{1.1.19}$$

Questo dimostra la continuità. ■

La dipendenza continua dai dati iniziali significa, grosso modo, che soluzioni che partono vicine restano vicine. Si deve notare, tuttavia, che la distanza fra di esse può crescere nel tempo: secondo la stima (1.1.18), essa può crescere al più esponenzialmente in fretta con t. Esempi semplicissimi mostrano che questa stima è ottimale, nel senso che la separazione fra le soluzioni è davvero esponenziale (si vedano gli esercizi più sotto). Se l'equazione differenziale modellizza un sistema reale, l'aumentare della distanza fra le soluzioni comporta una perdita di precisione nella conoscenza del sistema: ogni errore nella conoscenza dei dati iniziali, che per quanto piccoli non possono mai esser resi nulli, viene amplificato nel corso del tempo. Dunque, la separazione fra le soluzioni può porre dei limiti pratici alla predicibilità stessa dell'evoluzione del sistema. Data l'importanza di questo fatto torneremo su di esso.

Esercizi 1.1.5 (i) Calcolare la separazione fra le soluzioni delle seguenti equazioni: (a) $\dot{x} = kx$, $x \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. (b) $\ddot{x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$ (particella libera).

(ii) Si consideri il repulsore armonico $\ddot{x} = \omega^2 x$. Usando le (1.1.16) e (1.1.17) mostrare che le due soluzioni con dati iniziali $(x_0, -\omega x_0 \pm \epsilon)$, ove ϵ è piccolo, si allontanano con velocità esponenziale l'una dall'altra. Disegnare (approssimativamente) le loro orbite.

H. Il flusso di un campo vettoriale. Si possono unificare i teoremi di esistenza ed unicità e quello di dipendenza differenziabile dal dato iniziale in un unico oggetto: il flusso di un campo vettoriale. Oltre ad un utile strumento matematico, questa nozione costituisce anche un utile modo di pensare alle soluzioni di un'equazione differenziale, che cerca di racchiuderne gli aspetti globali.

Supponiamo che il campo vettoriale X sia differenziabile in tutto $\mathbb{R}^n$ e che tutte le sue soluzioni $x(t; x_0)$ esistano per tutti i tempi $t \in \mathbb{R}$. Allora, in virtù dell'unicità delle soluzioni, possiamo definire la mappa

$$\Phi^X \;:\; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \qquad (t, x_0) \mapsto \Phi^X(t, x_0) \;:=\; x(t; x_0) \tag{1.1.20}$$

che ad ogni istante t e ad ogni dato iniziale x_0 (a $t = 0$) associa il valore al tempo t della soluzione con quel dato iniziale. Questa mappa si chiama il *flusso* del campo vettoriale X. Se fissiamo t, otteniamo una mappa

$$\Phi_t^X \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \qquad \Phi_t^X(x_0) \;=\; \Phi^X(t, x_0) \tag{1.1.21}$$

che trasforma ogni dato iniziale nel suo evoluto all'istante t. Questa mappa si chiama *mappa al tempo t del flusso.*

L'origine del nome "flusso" si capisce se si immagina che lo spazio delle fasi sia riempito da un fluido, ciascuna particella del quale si muove secondo la legge $\dot{x} = X(x)$. Allora, se si applica Φ_t^X ad un dato iniziale, e si fa variare t, si descrive la traiettoria di una singola particella fluida (cioè un'orbita dell'equazione). Applicando Φ_t^X a tutti i punti di un certo insieme U, e facendo variare t, si fa "fluire" questo insieme.

Esempi. (i) La mappa al tempo t del flusso dell'oscillatore armonico (1.1.7) è data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} . \tag{1.1.22}$$

Dunque, per $\omega = 1$, il flusso consiste di rotazioni uniformi. (Se $\omega \neq 1$, si parla di "rotazioni ellittiche").

(ii) Il flusso dell'equazione lineare $\dot{x} = Ax$, ove A è una matrice reale $n \times n$ ed $x \in \mathbb{R}^n$, è dato dalla matrice esponenziale: $\Phi_t^{Ax} = \exp(tA)$.

Il flusso possiede alcune proprietà che svolgono un ruolo importante nel suo uso per lo studio delle equazioni differenziali:

Proposizione 5

i. Φ_0^X *è la mappa identità.*
ii. Per tutti i $t, s \in \mathbb{R}$ *si ha* $\Phi_t^X \circ \Phi_s^X = \Phi_{t+s}^X$.
iii. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ *si ha* $(\Phi_t^X)^{-1} = \Phi_{-t}^X$.
iv. Per ogni t*, la mappa* $\Phi_t^X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. (i) è ovvia.

(ii) Questa proprietà significa che, qualunque sia il dato iniziale x_0, si ha

$$\Phi_{t+s}(x_0) \;=\; \Phi_t^X(\Phi_s^X(x_0))\,.$$

Il primo membro è il punto $x(t+s; x_0)$ raggiunto dopo il tempo $t+s$ partendo dal dato iniziale x_0 mentre il secondo membro è il punto $x(t; x(s; x_0))$ raggiunto dopo un tempo t partendo dal punto $x(s; x_0)$. È intuitivo che, in virtù della traslabilità temporale delle soluzioni (Corollario 1), questi due punti coincidano: nel secondo caso, è come interrompere l'evoluzione all'istante s, rimettere a zero l'orologio, e farla ripartire.

Per provarlo, fissiamo un valore di s e definiamo

$$\tilde{x}(t) \;:=\; x(t+s; x_0)\,.$$

La curva $t \mapsto \tilde{x}(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale (verificarlo!) e soddisfa $\tilde{x}(0) = x(s; x_0)$. Dunque, per l'unicità,

$$\tilde{x}(t) \;=\; x(t; x(s, x_0))\,.$$

(iii) Prendendo $s = -t$, la iii. dà $\Phi_{-t}^X \circ \Phi_t^X = \mathrm{id}$. Dunque Φ_t^X è invertibile ed ha inversa Φ_{-t}^X.

(iv) Φ_t^X e $(\Phi_t^X)^{-1} = \Phi_{-t}^X$ sono entrambe differenziabili in virtù della Proposizione 4. ■

Esercizi 1.1.6 (i) Scrivere la mappa al tempo t del flusso del repulsore armonico $\ddot{x} = \omega^2 x$.

(ii) Determinare la mappa al tempo t del flusso dell'equazione $\dot{x} = 1 - x$.

(iii) Verificare sul flusso dell'equazione $\dot{x} = kx$ le quattro proprietà della Proposizione 5.

Osservazioni: (i) La proprietà ii. significa che l'insieme dei diffeomorfismi Φ_t^X, $t \in \mathbb{R}$, forma gruppo rispetto alla composizione e che, inoltre, questo gruppo è omomorfo al gruppo additivo $\mathbb{R}$.

(ii) Se le soluzioni dell'equazione differenziale non sono definite per tutti i tempi, allora non si può parlare di flusso. Segue dai teoremi generali che, se il campo vettoriale è differenziabile in un aperto U, allora per ogni punto di U esiste un intorno B di tale punto ed un intervallo $\mathcal{I}$ tali che tutte le soluzioni con dati iniziali in B esistono per tutti i tempi $t \in \mathcal{I}$ (alcune avranno intervalli di esistenza più grandi di $\mathcal{I}$, ma le consideriamo solo per $t \in \mathcal{I}$). Naturalmente, queste soluzioni non restano, in generale, dentro a B: denotiamo allora con B' l'insieme di tutti i punti $x(t; x_0)$ per $x_0 \in B$ e $t \in \mathcal{I}$. Si può allora definire un *flusso locale*

$$\Phi^X \ : \mathcal{I} \times B \ \to \ B' .$$

Questa mappa ha tutte le proprietà del flusso, ma solo per i tempi per i quali esiste.

I. Equazioni differenziali dipendenti dal tempo. Il caso di un'equazione differenziale dipendente dal tempo o, come si dice, *non autonoma*

$$\dot{x} \ = \ X(x,t)$$

presenta delle particolarità. I teoremi di esistenza ed unicità e di dipendenza continua dal dato iniziale continuano a valere, ma quel che si perde è, ovviamente, la traslabilità nel tempo delle soluzioni: se $t \mapsto x(t)$ è una soluzione, non è detto che $t \mapsto x(t+t_0)$ lo sia. Dunque, l'istante al quale sono assegnati i dati iniziali giuoca un ruolo essenziale nell'evoluzione: se $t_0 \neq t_0'$ allora $x(t; x_0, t_0)$ ed $x(t; x_0, t_0')$ possono essere soluzioni completamente diverse. Per questo, nell'indicare il flusso di un campo vettoriale dipendente dal tempo si deve anche indicare l'istante iniziale:

$$\Phi^X_{t_0,t}(x_0) .$$

Una conseguenza importante di questo fatto è che, nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^n$, orbite diverse possono intersecarsi: basta che le corrispondenti soluzioni passino per il punto di intersezione ad istanti diversi.

Naturalmente, ogni equazione non autonoma è equivalente ad una autonoma in uno "spazio delle fasi esteso" di dimensione $n+1$, ottenuto aggiungendo una coordinata, chiamiamola τ, per rappresentare il tempo:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} X(x,\tau) \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{1.1.23}$$

In questo senso, un'equazione non autonoma si riduce al caso autonomo. Tuttavia, lo studio del caso non autonomo presenta delle specificità. Per esempio, nello spazio delle fasi esteso non esistono equilibri. Di conseguenza, il tipo di domande che ci si pone relativamente ad equazioni non autonome è in parte diverso dal caso autonomo. Per esempio, se il campo vettoriale dipende periodicamente dal tempo, una questione naturale è se esistano soluzioni periodiche con ugual periodo. Lo studio di questo tipo di problemi va effettuato con tecniche ad hoc per il caso non autonomo.

Esercizi 1.1.7 (i) Mostrare che una curva costante $t \mapsto \overline{x}$ è soluzione dell'equazione non autonoma $\dot{x} = X(x,t)$ se e solo se $X(\overline{x}, 0) = 0 \ \forall t$.

(ii) Determinare il flusso non–autonomo dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2t$, $x \in \mathbb{R}$ e disegnarne il ritratto in fase nello spazio delle fasi esteso.

J. Equazioni differenziali su varietà. Oltre ad equazioni differenziali su un aperto di $\mathbb{R}^n$ si possono, ed anzi si dovrebbero, considerare equazioni differenziali su varietà differenziabili n–dimensionali (ipersuperfici regolari di uno spazio euclideo $\mathbb{R}^N$, $N > n$). L'esigenza di questa generalizzazione apparirà chiara quando cominceremo a studiare la meccanica e, nel Capitolo 3, considereremo sistemi vincolati come, per esempio, un punto materiale che si muove sulla superficie di una sfera.

Questa estensione richiede la conoscenza della matematica delle varietà differenziabili e pertanto limiteremo questo primo sguardo al caso di un aperto di $\mathbb{R}^n$. Siccome una varietà differenziabile è localmente come $\mathbb{R}^n$, questo non fa differenza dal punto di vista locale. Ci si aspetta dunque che sia solo globalmente che ... possano emergere difficoltà.

Tuttavia, già in questo capitolo incontreremo situazioni in cui lo spazio delle fasi non è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ma, per esempio, un cerchio. La cosa non porrà alcuna difficoltà pratica, ma è bene aver presente che, a un certo punto, si dovrà di fatto fare questa estensione.

1.2 Integrali primi

Come si è detto nella sezione precedente, le soluzioni di un'equazione differenziale possono comportarsi in modi molto complicati oppure più semplici, più ordinati. Vi sono due elementi noti che possono portare a comportamenti "semplici": l'esistenza di integrali primi (o "costanti del moto") e l'esistenza di simmetrie. Ci occupiamo qui del primo aspetto—le simmetrie verranno incontrate più avanti, nello studio della meccanica. Per sola semplicità di linguaggio e notazione assumiamo di avere un campo vettoriale X definito in tutto $\mathbb{R}^n$. (L'adattamento al caso di un aperto di $\mathbb{R}^n$ è ovvia.)

A. Insiemi invarianti. Nello studio delle proprietà qualitative di un'equazione differenziale, una questione interessante è se le soluzioni possano "vagare" senza limiti per tutto lo spazio delle fasi o siano, invece, ristrette in qualche modo. Precisamente, ci si chiede se esistano dei sottoinsiemi dello spazio delle fasi che sono "invarianti" sotto il flusso, nel senso che le soluzioni che partono da uno di essi vi restano:

Definizione *Un insieme Ω è detto* invariante *se*

$$x_0 \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad \Phi_t^X(x_0) \in \Omega \qquad \forall t$$

(ovvero $\Phi_t^X(\Omega) \subset \Omega$ $\forall t$). Se questa proprietà è soddisfatta solo per tempi $t > 0$ si parla di invarianza nel futuro *e se lo è solo per $t < 0$ si parla di* invarianza nel passato.

Un esempio banale di insieme invariante è un'orbita. L'esistenza di insiemi invarianti (non banali!) pone dei limiti all'evoluzione delle soluzioni.

B. Integrali primi. Il tipo più semplice di insiemi invarianti è costituito dagli insiemi di livello degli integrali primi:

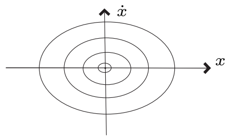
Definizione *Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è un* integrale primo *dell'equazione differenziale $\dot{x} = X(x)$ se essa è costante lungo le soluzioni dell'equazione: $f(x(t;x_0)) = f(x_0)$ per tutti i t ed x_0 (ovvero $f \circ \Phi_t^X = f$ $\forall t$).*

Esempio: L'energia

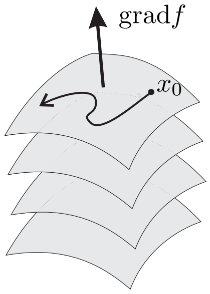
$$E(x, \dot{x}) \;=\; \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2$$

è un integrale primo per l'oscillatore armonico $m\ddot{x} = -kx$. Infatti, lungo una qualunque soluzione $t \mapsto x_t$ si ha

$$\frac{d}{dt}E(x_t, \dot{x}_t) \;=\; m\,\dot{x}_t\,\ddot{x}_t + k\,x_t\,\dot{x}_t \;=\; (m\,\ddot{x}_t + k\,x_t)\,\dot{x}_t \;=\; 0\,.$$



La costanza dell'energia implica che le orbite dell'oscillatore armonico appartengono alle curve $E(x,\dot{x}) = \text{cost}$, che sono ellissi centrate nell'origine se $\text{cost} > 0$, e l'origine stessa se $\text{cost} = 0$. Si vede come, in questo caso, l'esistenza di un integrale primo permette di determinare il ritratto in fase dell'equazione senza dover prima integrare l'equazione stessa.



$f = \text{cost}$

Naturalmente, ogni funzione costante è un integrale primo—ma completamente inutile. Solo gli integrali primi "non banali" hanno interesse, quelli cioè che non sono identicamente costanti in nessun aperto dello spazio delle fasi.

Per analizzare meglio questa situazione, consideriamo per semplicità il caso di un integrale primo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ il cui gradiente sia ovunque non nullo.[1] Per il teorema della funzione implicita gli insiemi di livello di f sono allora sottovarietà di dimensione $n-1$. Queste sottovarietà 'riempono' in modo regolare lo spazio delle fasi, nel senso che ne passa esattamente una per ogni punto (si dice che esse 'foliano' lo spazio delle fasi). Dunque, lo spazio delle fasi è decomposto, foliato, in sottovarietà invarianti di dimensione $n-1$: è come se l'equazione avesse una dimensione in meno.

Se vi sono $k \le n$ integrali primi $f_1, \ldots, f_k$, allora ogni soluzione deve appartenere ad un insieme di livello di ciascuno di essi, cioè all'intersezione di tutti questi insiemi di livello:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \;:\; f_1(x) = c_1\,, \ldots\,,\; f_k(x) = c_k\}\,.$$

Se le k funzioni sono ovunque "funzionalmente indipendenti", nel senso che la loro matrice Jacobiana ha ovunque rango massimo possibile, cioè

$$\text{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) \;=\; k \tag{1.2.1}$$

in tutti i punti x, allora il teorema della funzione implicita assicura che gli insiemi di livello $\{x \in \mathbb{R}^n \;:\; f_1(x) = c_1, \ldots, f_k(x) = c_k\}$ sono sottovarietà di dimensione $n-k$. Dunque, lo spazio delle fasi è adesso foliato in sottovarietà invarianti di dimensione k.

Nel caso estremo (e raro) nel quale vi siano $n-1$ integrali primi ovunque fuzionalmente indipendenti, i loro comuni insiemi di livello sono *curve*, e dunque individuano le orbite. Per determinare le soluzioni dell'equazione non resta che da trovare la legge oraria con la quale le orbite sono percorse. Un esempio di questa situazione è offerta dall'oscillatore armonico dell'esempio precedente; nella sezione 1.4 generalizzeremo questa situazione a tutti i sistemi meccanici conservativi ad un grado di libertà.

Si capisce dunque che l'esistenza di integrali primi mette dei forti vincoli al comportamento delle soluzioni di un'equazione differenziale. Proprio per

[1] Questo di solito non avviene, perchè il gradiente si annulla in tutti i punti critici di f. Se vi sono punti critici, le considerazioni che seguono valgono se ci si restringe ad un intorno di un insieme di livello di f sul quale f non ha punti critici. O anche, al sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ costituito da tutti gli insiemi di livello sui quali f non ha punti critici. Si noti che questo sottoinsieme è invariante, perchè unione di insiemi invarianti (gli insiemi di livello). Per esempio, nel caso dell'oscillatore armonico, si deve rimuovere l'origine.

questo, non ci si può aspettare che ogni equazione differenziale ne possieda. Tuttavia, se esistono, è vitale tenerne conto.

Esercizi 1.2.1 (i) Dove è verificata la condizione di indipendenza (1.2.1) per l'energia dell'oscillatore armonico? Che relazione c'è con la struttura degli insiemi di livello?

(ii) Verificare che la funzione $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2 x^2$ è un integrale primo del repulsore armonico $\ddot{x} = \omega^2 x$ ed usarla per tracciare il ritratto in fase. Dove è violata la condizione di indipendenza? Come è fatto il corrispondente insieme di livello di E?

(iii) Mostrare che se l'equazione differenziale $\dot{x} = X(x)$ in $\mathbb{R}^n$ ha n integrali primi ovunque funzionalmente indipendenti allora $X = 0$.

Osservazioni. (i) Per acquisire un po' di familiarità con il teorema della funzione implicita può essere utile esaminare alcuni casi semplici. Sia $f = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una funzione. Le k righe della matrice Jacobiana $\frac{\partial f}{\partial x}$ sono i gradienti delle funzioni $f_1, \dots, f_k$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f_k}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

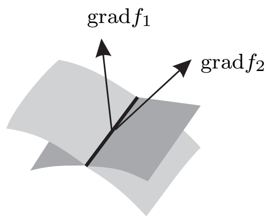
Dunque, la condizione di 'indipendenza funzionale' (1.2.1) significa che i gradienti delle k funzioni sono linearmente indipendenti nel punto x, e dunque in tutto un suo intorno.

Nel caso $k = 1$ vi è una sola funzione f_1 e la (1.2.1) equivale al fatto che il suo gradiente sia diverso da zero:

$$\mathrm{grad} f_1(x) \neq 0\,.$$

Dunque, la funzione f_1 non è identicamente costante in un intorno di x (se così fosse, i suoi insiemi di livello non sarebbero di certo curve).

Se vi sono due funzioni f_1 ed f_2, allora la condizione di indipendenza (1.2.1) significa che i loro gradienti sono linearmente indipendenti. Dunque, ciascun gradiente è diverso da zero e gli insiemi di livello di ciascuna funzione sono sottovarietà di dimensione $n-1$. Siccome il gradiente di f_i è diretto come la normale alla sottovarietà $f_i = \text{cost}$, l'indipendenza lineare dei due gradienti assicura che, nel punto considerato (e dunque in tutto un suo intorno), le due superfici non sono tangenti l'un l'altra. Pertanto, esse si intersecano in una sottovarietà di dimensione $n-2$. (Si pensi al caso $n = 3$: due superfici non tangenti si intersecano su una curva).



(ii) Come mostrano i casi dell'oscillatore e del repulsore armonico degli esercizi *1.2.1* non ci si può aspettare che, in generale, la condizione di indipendenza degli integrali primi sia soddisfatta ovunque. Di solito, tuttavia, tale condizione è violata in 'pochi' punti. La struttura degli insiemi di livello 'singolari', che passano per questi punti, va studiata, se serve, caso per caso. (Possono essere per esempio sottovarietà di dimensione minore oppure può anche esserci perdita della struttura di sottovarietà, come avviene se c'è una auto-intersezione.) Per semplicità, limiteremo le nostre considerazioni teoriche al caso 'tipico' degli insiemi di livello regolari degli integrali primi. Per semplificare anche la terminologia, diremo allora, un po' genericamente, che gli integrali primi sono "indipendenti" per significare che essi sono ovunque funzionalmente indipendenti in tutto un sottoinsieme 'grande' del loro dominio, al quale ci restringiamo.

Va però osservato che, a differenza di altri casi, nei quali lo studio di situazioni 'patologiche' non è molto interessante, se non in connessione con situazioni (molto) particolari, la struttura degli insiemi di livello 'singolari' degli integrali primi fornisce in certi casi informazioni sul comportamento delle orbite vicino ad esse ed è dunque di grande interesse. Ma questo è un argomento che va al di là dei nostri scopi.

C. La derivata di Lie. Come si determinano gli eventuali integrali primi di un'equazione differenziale? O almeno, come si stabilisce se una certa funzione è un integrale primo o meno? La condizione usata nella definizione fa riferimento alle soluzioni dell'equazione differenziale ed è allora del tutto inutile: un integrale primo, infatti, è utile soprattutto quando *non* si conoscono le soluzioni, perchè dà informazioni su di esse.

Un momento di riflessione, tuttavia, fa capire che per controllare se una funzione f sia o meno un integrale primo non serve conoscere le soluzioni dell'equazione differenziale. Procedendo come nell'esempio dell'oscillatore armonico, infatti, per verificare se il valore di f cambia lungo una soluzione $t \mapsto x_t$ dell'equazione basta calcolare la derivata della funzione composta $t \mapsto f(x_t)$ ed usare $\dot{x}_t = X(x_t)$. Si trova

$$\frac{d}{dt} f(x_t) \;=\; \mathrm{grad} f(x_t) \cdot \dot{x}_t \;=\; \mathrm{grad} f(x_t) \cdot X(x_t)\,.$$

Così, si intuisce che la condizione perchè f sia un integrale primo è

$$X(x) \cdot \mathrm{grad} f(x) \;=\; 0 \qquad \forall x\,.$$

In altre parole, è necessario (e di fatto sufficiente, si veda sotto) che la derivata della funzione nella direzione del campo sia nulla. Questo conduce alla seguente

Definizione *Si chiama* derivata di Lie *(o derivata direzionale) della funzione* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *associata al campo vettoriale* X *la funzione*

$$L_X f \;:\; \mathbb{R}^n \;\to\; \mathbb{R}$$

definita da

$$L_X f \;:=\; X \cdot \mathrm{grad} f \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Abbiamo ora:

Proposizione 6 *Sia* X *un campo vettoriale ed* f *una funzione.*
i. Se $t \mapsto x_t$ *è una soluzione di* $\dot{x} = X(x)$, *allora*

$$\frac{d}{dt} f(x_t) \;=\; L_X f(x_t) \qquad \forall t \tag{1.2.2}$$

ii. f *è integrale primo di* $\dot{x} = X(x)$ *se e solo se* $L_X f = 0$.

Dimostrazione. (i) Questo segue dal conto fatto più sopra.

(ii) Se $L_X f = 0$ allora la (1.2.2) mostra che f è costante lungo ogni soluzione e dunque è un integrale primo. Se invece f è un integrale primo, allora la (1.2.2) dà $L_X f(x_t) = 0$ per ogni moto ed ogni istante. Prendendo $t = 0$ si ottiene $L_X f(x_0) = 0$ per ogni dato iniziale x_0, cioè per ogni punto dello spazio delle fasi. Dunque $L_X f = 0$. ■

Esempio: Sia X il campo vettoriale definito dall'equazione dell'oscillatore armonico $m\ddot{x} = -kx$, cioè

$$X(x, v) \;=\; \begin{pmatrix} v \\ -kx/m \end{pmatrix}\,,$$

e sia $E(x, v) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$ l'energia. Allora

$$L_X E \;=\; \begin{pmatrix} v \\ -kx/m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} kx \\ mv \end{pmatrix} \;=\; vkx + (-kx/m)mv \;=\; 0\,.$$

Esercizi 1.2.2 (i) Calcolare la velocità di variazione dell'energia $E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ lungo le soluzioni dell'oscillatore armonico smorzato $m\ddot{x} = -kx - 2\mu\dot{x}$, $x \in \mathbb{R}$, ove k e μ sono costanti positive.

(ii) Determinare le costanti c_1 e c_2 in modo che la funzione $f(x_1, x_2) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2$ sia integrale primo di $\dot{x}_1 = x_1x_2$, $\dot{x}_2 = 2x_1^2$.

(iii) Osserviamo preliminarmente che, se f è un integrale primo, allora anche i suoi insiemi di sottolivello $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) \leq c\}$ sono insiemi invarianti. Mostrare che se

$$L_X f(x) \leq 0 \qquad \forall x$$

allora gli insiemi di sottolivello di f sono invarianti nel futuro.

(iv) Mostrare che, se $f(x, t)$ dipende anche dal tempo, allora

$$\frac{d}{dt} f(x_t, t) \;=\; L_X f(x_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x_t, t)\,.$$

(v) Si consideri il sistema di Lotka–Volterra $\dot{x} = \alpha x - \beta xy$, $\dot{y} = -\gamma y + \delta xy$ nel piano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (con $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$). Si mostri che gli assi x ed y e dunque il primo quadrante sono insiemi invarianti. Si mostri poi che il sistema ha l'integrale primo

$$f(x, y) \;=\; \delta x - \gamma \log x + \beta y - \alpha \log y$$

e lo si usi per tracciare il ritratto in fase nel primo quadrante. [Suggerimento: trovare i punti critici di $f(x, y)$ ed usare il fatto (provato più avanti) che, attorno ad un minimo isolato, le curve di livello di una funzione sono chiuse; per determinare il verso di percorrenza delle orbite si può, ad esempio, determinare il verso di percorrenza sugli assi x ed y.]

(vi) La risposta all'esercizio precedente mostra che, nel primo quadrante, le soluzioni del sistema di Lotka–Volterra sono oscillazioni periodiche attorno all'equilibrio. Questo implica che i massimi (ed i minimi) di entrambe le popolazioni sono raggiunti ad istanti diversi (convincersene). In altre parole, la popolazione dei predatori risponde con un certo ritardo alle variazioni di quella delle prede. Domanda: se la dinamica delle due popolazioni è descritta da un'equazione differenziale, è possibile che esse raggiungano i loro massimi allo stesso istante?

(vii) Il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3)$

$$\dot{x}_1 \;=\; x_2x_3\,, \qquad \dot{x}_2 \;=\; -x_1x_3\,, \qquad \dot{x}_3 \;=\; 0$$

è un caso particolare dell' *equazione di Eulero* per il corpo rigido (vedere il capitolo 5). Mostrare che essa ha gli integrali primi

$$f_1(x_1, x_2, x_3) \;=\; \frac{1}{2}\,|x|^2\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) \;=\; x_3\,.$$

Usarli per tracciare il ritratto in fase dell'equazione. Mostrare che anche

$$f_3(x_1, x_2, x_3) \;=\; \frac{1}{2}\,(x_1^2 + x_2^2)$$

è un integrale primo. È indipendente dagli altri due? Usare f_2 ed f_3 per tracciare il ritratto in fase.

1.3 Esempio: Sistemi lineari

In questa sezione e nella successiva consideriamo alcuni esempi semplici, ma fondamentali, perchè introducono alcune idee che si incontrano anche in casi più generali e contribuiscono a formare un quadro di riferimento: le equazioni lineari e le equazioni del secondo ordine ad un grado di libertà.

A. Sistemi lineari: matrice esponenziale. L'integrale generale di un'equazione lineare si scrive esplicitamente per mezzo dell'esponenziale di matrice. Ricordiamo che l'esponenziale di una matrice B è definita come la serie $\exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B^k = \mathbf{1} + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \ldots$.

Proposizione 7 *Sia A una matrice reale $n \times n$. Allora la soluzione di*

$$\dot{x} \;=\; Ax\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3.1}$$

con dato iniziale x_0 è

$$x(t;x_0) \;=\; \exp(tA)x_0\,. \tag{1.3.2}$$

Dimostrazione. Per A ed x_0 assegnati, $\exp(tA)x_0$ è una serie di potenze in t (a valori in $\mathbb{R}^n$). Mostriamo innanzitutto che essa è assolutamente convergente per ogni $t \in \mathbb{R}$ (e dunque uniformemente convergente in ogni compatto di $\mathbb{R}$). A tale scopo, ricordiamo che la norma "operatoriale" di una matrice B è definita come

$$\|B\|_o \;:=\; \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}\,.$$

Chiaramente, $\|B\|_o < \infty$ per ogni matrice B (si vedano gli esercizi). Si noti poi che dalla definizione segue $\|Bx\| \le \|B\|_o\|x\|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Da qui, per induzione, segue subito $\|B^kx\| \le \|B\|_o^k\|x\|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. (Infatti $\|B^{k+1}x\| = \|B(B^kx)\| \le \|B\|_o\|B^kx\|$). Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{(tA)^k}{k!}x\right\| \;\le\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k\,\|A\|_o^k}{k!}\,\|x\| \;=\; e^{|t|\|A\|_o}\,\|x\| \;<\; \infty$$

e questo prova la convergenza assoluta. Allora la derivata di $t \mapsto \exp(tA)x_0$ si può calcolare derivando la serie termine a termine e così si trova

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\exp(tA)x_0 \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\Big(\frac{t^kA^k}{k!}x_0\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}\,x_0 \\ &=\; A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}\,x_0 \;=\; A\,\exp(tA)x_0\,. \end{aligned}$$

Questo prova che $\exp(tA)x_0$ è soluzione di $\dot{x} = Ax$. Essa vale x_0 a $t = 0$. ■

L'integrazione dell'equazione lineare $x = Ax$ si riduce così al calcolo della matrice esponenziale $\exp(tA)$. Questo è particolarmente facile se la matrice A è *diagonalizzabile*, esiste cioè una matrice invertibile P, reale o complessa, tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale. Come è noto dai corsi di algebra lineare (e come ricordiamo nella sottosezione successiva), una matrice è diagonalizzabile se e solo possiede n autovettori $u_1, \ldots, u_n$ linearmente indipendenti. Bisogna solo fare attenzione al fatto che la matrice diagonalizzante P è reale se gli autovalori di A sono tutti reali, complessa altrimenti. Infatti, P ha per colonne gli autovettori di A.

Se A è diagonalizzabile, allora con il cambiamento lineare di coordinate $x \mapsto P^{-1}x$ ci si riduce al calcolo dell'esponenziale di una matrice diagonale, che è banale (si vedano gli esercizi). Equivalentemente, si possono sviluppare tutti i vettori nella base formata da autovettori. Ci vuole solo un po' di attenzione all'interpretazione dei risultati nel caso di autovettori complessi. Ma, come vedremo, una volta capito il semplice caso $n = 2$ si è in realtà capito quasi tutto.

Se invece A non è diagonalizzabile il procedimento di calcolo dell'esponenziale si basa sulla forma normale di Jordan ed è più complesso (si può vedere l'Appendice F al capitolo 1 di BGG). Per semplicità, ci limiteremo qui al caso diagonalizzabile. Anzi, assumeremo addirittura che A *abbia n autovalori (reali* *o complessi) tutti distinti.* Questa è una condizione sufficiente per la diagonalizzabilità (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$). Questa condizione ovviamente non è necessaria (si pensi alla matrice unità) ma permette di semplificare un po' l'esposizione.

Esercizi 1.3.1 In questi esercizi, per calcolare l'esponenziale di matrice usare la serie esponenziale.

(i) Sia $A = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ una matrice diagonale. Calcolare $\exp(A)$.

(ii) Sia u autovettore di una matrice A relativo all'autovalore λ. Mostrare che $\exp(tA)u = e^{\lambda t}u$.

(iii) Mostrare che

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

[Suggerimento: Calcolare A^2 ed A^3 e dedurne per induzione l'espressione per le potenze pari e dispari di A. Usare poi le serie di McLaurin del seno e del coseno.]

(iv) Posto $u = \dot{x}/\omega$, l'equazione dell'oscillatore armonico $\ddot{x} = -\omega^2 x$ si può scrivere come il sistema del primo ordine $\dot{x} = \omega u$, $\dot{u} = -\omega x$. L'integrazione di questo sistema si riduce al calcolo dell'esponenziale della matrice $At = \begin{pmatrix} 0 & \omega t \\ -\omega t & 0 \end{pmatrix}$. Confrontare il risultato dell'esercizio precedente con la (1.1.22).

(v) Mostrare che se due matrici A e B commutano, cioè $AB = BA$, allora

$$\exp(A + B) = \exp(A)\,\exp(B)\,.$$

(Attenzione: la condizione di commutazione è essenziale!).

(vi) Mostrare che, se A e P sono matrici $n \times n$ e P è invertibile, allora

$$\exp A \;=\; P\,\exp(P^{-1}AP)\,P^{-1}\,.$$

(vii) Mostrare che la norma operatoriale di una matrice $n \times n$ è finita.

B. Richiami di algebra lineare. Richiamiamo qui, sotto forma di esercizi, alcuni fatti elementari su autovalori ed autovettori e sulla diagonalizzabilità di una matrice. Le dimostrazioni di tutti questi fatti si trovano ovviamente sui testi di algebra lineare. Tuttavia, non è difficile ricostruirsele da sè come, appunto, utile esercizio.

Esercizi 1.3.2 (i) Mostrare che se una matrice reale A ha un autovalore complesso λ allora ogni autovettore relativo a λ è necessariamente complesso.

(ii) Mostrare che se A è reale, allora i suoi autovalori complessi sono in numero pari e formano coppie complesse coniugate e che, inoltre, se $u \in \mathbb{C}^n$ è autovettore di A relativo ad un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ allora il suo complesso coniugato è autovettore di A relativo a $\overline{\lambda}$.

(iii) Sia A una matrice $n \times n$ sul corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Mostrare che se A possiede n autovettori $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{K}^n$ linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$ allora la matrice P che ha $u_1, \ldots, u_n$ come colonne è invertibile e diagonalizza A. E che, viceversa, se $P \in \mathrm{L}(n, \mathbb{K})$ è invertibile e diagonalizza A allora le sue colonne sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$ e sono autovettori di A.

(iv) Sia $A \in \mathrm{L}(n, \mathbb{K})$. Mostrare che se u e v sono autovettori relativi ad autovalori distinti $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ allora essi sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$.

(v) Sia $A \in \mathrm{L}(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Si assuma che A abbia n autovalori semplici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Siano $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{K}^n$ autovettori non nulli di A relativi a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, rispettivamente (cioè $Au_i = \lambda_i u_i$). Mostrare che $u_1, \ldots, u_n$ sono linearmente indipendenti (su $\mathbb{K}$).

C. Ritratti in fase dei sistemi lineari nel piano. Vogliamo adesso determinare l'integrale generale e il ritratto in fase dell'equazione $\dot{x} = Ax$ nel caso in cui A sia una matrice reale 2×2 con autovalori distinti. Distinguiamo il caso di autovalori reali da quello di autovalori complessi.

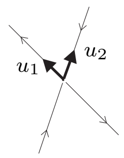
Autovalori reali. Se A ha due autovalori reali λ_1 e λ_2 distinti allora possiede due autovettori u_1 e u_2 linearmente indipendenti. Possiamo allora sviluppare il dato iniziale x_0 nella base costituita da u_1 ed u_2 ed utilizzare poi la linearità di $\exp(At)$ ed il fatto, già incontrato in un esercizio, che

$$Au \;=\; \lambda u \quad \Longrightarrow \quad \exp(tA)u \;=\; e^{t\lambda}u\,. \tag{1.3.3}$$

Si trova così

$$x_0 \;=\; c_1u_1 + c_2u_2 \quad \Longrightarrow \quad \exp(tA)x_0 \;=\; c_1e^{\lambda_1 t}u_1 + c_2e^{\lambda_2 t}u_2 \tag{1.3.4}$$

che dà l'espressione del flusso dell'equazione.



$(\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0)$

Il ritratto in fase si costruisce facilmente a partire dalla (1.3.4), procedendo sostanzialmente come per il repulsore armonico della sezione 1.1.E. Supponiamo innanzittutto che i due autovalori non siano nulli. Allora vi sono due speciali famiglie di soluzioni, quelle con dati iniziali sui sottospazi unidimensionali paralleli agli autovettori. La (1.3.4) mostra che ciascuno di questi sottospazi è invariante e per $t \to +\infty$ tutte le soluzioni non nulle su di esso tendono all'origine se $\lambda_i < 0$, all'infinito se $\lambda_i > 0$ (il contrario per $t \to -\infty$). Ciascuno si essi consiste dunque di tre orbite, l'origine e le due semirette. Esso si chiama sottospazio *stabile* se $\lambda_i < 0$, *instabile* se $\lambda_i > 0$.

Un modo semplice per completare il ritratto in fase è quello di fare un cambiamento di coordinate, passando alla base costituita dai due vettori u_1 ed u_2. Questo si fa con la matrice $P = [u_1, u_2]$ che diagonalizza A. Chiaramente $P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = u_1$ e $P\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = u_2$. Pertanto, nelle coordinate $y = P^{-1}x$ il dato iniziale $x_0 = c_1u_1 + c_2u_2$ diviene $y_0 = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ ed il suo evoluto è

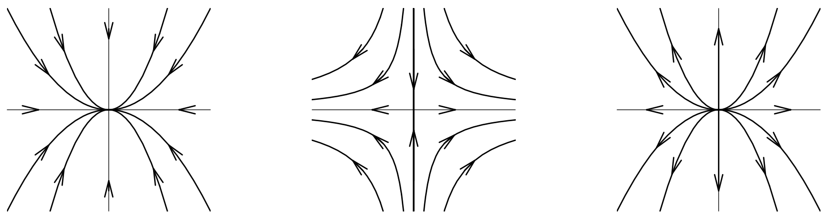
$$y(t) \;=\; P^{-1}x(t) \;=\; P^{-1}\big(c_1e^{\lambda_1 t}u_1 + c_2e^{\lambda_2 t}u_2\big) \;=\; \begin{pmatrix}c_1e^{\lambda_1 t}\\ c_2e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}. \tag{1.3.5}$$

Le varietà (in)stabili sono ora gli assi coordinati. Per determinare l'equazione delle altre orbite basta eliminare il tempo dall'espressione (1.3.5) della soluzione, ottenendo $(y_2/c_2)^{1/\lambda_2} = (y_1/c_1)^{1/\lambda_1}$ ovvero

$$y_2 \;=\; \mathrm{cost}\,|y_1|^{\lambda_2/\lambda_1}\,.$$

Dunque, come mostrato nelle tre figure:

- Se i due autovalori sono entrambi negativi (positivi) le orbite sono rami di curve simili a parabole, tangenti nell'origine all'asse che corrisponde all'autovalore minore in valore assoluto. Lungo di esse, tutte le soluzioni tendono all'origine (all'infinito) per $t \to +\infty$ ed all'infinito (all'origine) per $t \to -\infty$.



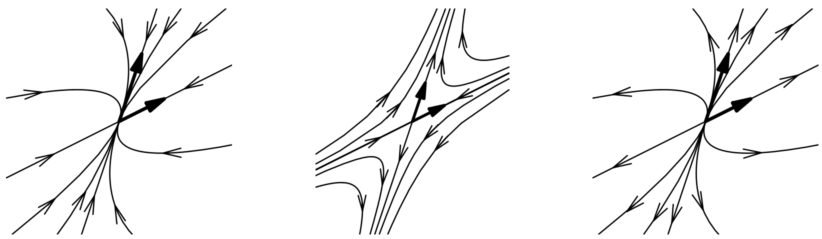
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ $\qquad$ $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ $\qquad$ $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

- Se gli autovalori sono uno positivo ed uno negativo, allora le orbite sono simili ad iperboli di equazione

$$y_2 \;=\; \mathrm{cost}\,|y_1|^{-|\lambda_1/\lambda_2|}\,.$$

Esse tendono all'infinito sia per $t \to +\infty$ che per $t \to -\infty$, ma diventando tangenti all'asse corrispondente all'autovalore positivo nel primo caso, a quello negativo nel secondo.

I ritratti in fase nelle coordinate originarie si ottengono poi con il cambiamento di coordinate lineare $x = Py$ e sono qualitativamente simili a quelli nelle coordinate y. Essi si tracciano facilmente, pensando che i due assi y_1 ed y_2 vengono trasformati nelle rette parallele agli autovettori u_1 ed u_2 di A, cioè nelle varietà stabili o instabili, si veda la figura (ove i due autovettori sono rappresentati in grassetto). Questi tre ritratti in fase hanno un nome: il primo ed il terzo si chiamano *nodi*, rispettivamente *stabile* ed *instabile*, mentre il secondo si chiama *sella* (o colle).

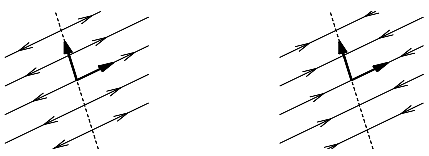


Nodo stabile *Sella* *Nodo instabile*

Resta da considerare il caso, semplicissimo, in cui un autovalore, per esempio λ_2, sia nullo. L'integrale generale (1.3.4) è ora

$$x_0 \;=\; c_1u_1 + c_2u_2 \quad\Longrightarrow\quad \exp(tA)x_0 \;=\; c_1e^{\lambda_1 t}u_1 + c_2u_2\,.$$

Dunque il sottospazio parallelo ad u_2 (cioè $c_1 = 0$) consiste interamente di punti di equilibrio. Le altre orbite sono semirette parallele all'autovettore u_1.



$\lambda_1 > 0 = \lambda_2$ $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$

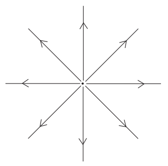
Esercizi 1.3.3 (i) Mostrare che gli autovalori di una matrice A reale e 2×2 sono reali se e solo se $(\mathrm{tr}A)^2 \geq 4\det A$.

(ii) Mostrare che se A è una matrice reale 2×2 allora l'origine è una sella per $\dot{x} = Ax$ se e solo se $\det A < 0$.

(iii) Disegnare il ritratto in fase dell'equazione $\dot{x} = Ax$ e determinare la soluzione con dato iniziale x_0 nei casi seguenti:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



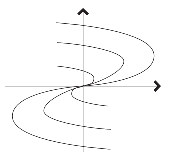
(iv) Si assuma che una matrice A, reale e 2×2, abbia un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ doppio e non nullo e sia diagonalizzabile, abbia cioè due autovettori relativi a λ linearmente indipendenti. Mostrare che A è multipla dell'identità, trovare l'integrale generale di $\dot{x} = Ax$ e mostrare che il ritratto in fase è quello mostrato in figura, nel caso $\lambda > 0$ (chiamato a volte *nodo a stella*).

Esercizi 1.3.4 Se la matrice non è diagonalizzabile, allora le soluzioni non sono combinazioni lineari di esponenziali, ma combinazioni lineari di prodotti di polinomi per esponenziali. Uno studio esaustivo richiede la teoria delle forme normali di Jordan. Ci limitiamo a dare alcune indicazioni, con riferimento all'equazione $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ove A è una matrice 2×2.

(i) Innanzitutto, sottolineiamo il fatto che l'esistenza di un autovalore doppio non è incompatibile con la diagonalizzabilità. Per esempio, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hanno entrambe l'autovalore 0 doppio, ma mentre la prima è già diagonale, la seconda non è diagonalizzabile. Integrare l'equazione con queste due matrici.

(ii) Si consideri ora la matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ con λ e b non nulli. Determinare autovalori ed autovettori di A. Mostrare che l'integrale generale è

$$(x_0, y_0) \mapsto (e^{\lambda t}(x_0 + bty_0), e^{\lambda t} y_0)$$



(ottenere questo risultato sia integrando 'a mano' il sistema $\dot{x} = \lambda x + by$, $\dot{y} = \lambda y$ sia calcolando $\exp(tA)$ per mezzo della serie esponenziale). Mostrare che il ritratto in fase è del tipo mostrato in figura. (È un *nodo degenere*: si può pensare di ottenerlo come limite di un nodo per $\lambda_-, \lambda_+ \to \lambda$, $u_-, u_+ \to u$. Qui u è l'unico autovettore della matrice A, cioè $u = (1, 0)$ nel caso considerato qui. Tutte le orbite sono tangenti ad u nell'origine, per $t \to \infty$ o $t \to -\infty$ a seconda che $\lambda < 0$ o $\lambda > 0$).

(iii) Determinare l'integrale generale e tracciare il ritratto in fase per (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iv)* Si supponga che una matrice non nulla 2×2 abbia un autovalore doppio $\lambda \in \mathbb{R}$ al quale corrisponde un solo autovettore u (non nullo). Mostrare che in una base formata da u e da un qualunque altro vettore linearmente indipendente la matrice prende la forma della matrice A dell'esercizio (ii), con $b \neq 0$.

Autovalori complessi. Se la matrice A ha autovalori complessi e distinti, allora i corrispondenti autovettori u_1, u_2 sono complessi e linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$. L'espressione (1.3.4) per le soluzioni vale ancora ma, contenendo quantità complesse, non è particolarmente chiara. Conviene utilizzare una base di $\mathbb{R}^2$ costituita dalle parti reale ed immaginaria di u_1 ed u_2.

Siccome la matrice A è reale i suoi due autovalori, se complessi, sono complessi coniugati. Indichiamoli allora con $\alpha \pm i\beta$ con α e β reali. L'ipotesi che i due autovalori siano distinti equivale allora a $\beta \neq 0$ e possiamo fare la convenzione

$$\beta > 0 .$$

Si tenga presente che se u è un autovettore (complesso) relativo ad $\alpha + i\beta$, allora il suo complesso coniugato è autovettore relativo a $\overline{\lambda}$.

Lemma 1 *Sia A una matrice reale 2×2 con autovalori complessi e distinti $\alpha \pm i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sia $v + iw$, con $v, w \in \mathbb{R}^2$, un autovettore relativo ad $\alpha + i\beta$. Allora v e w sono linearmente indipendenti e, indicata con P la matrice $P = [v, w]$, si ha*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} .$$

Dimostrazione. Siccome gli autovalori $\alpha \pm i\beta$ sono distinti, i due autovettori $v \pm iw$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$. Dunque $w \neq 0$. Se, per assurdo, v e w fossero linearmente dipendenti su $\mathbb{R}$ allora sarebbe $v = kw$ con qualche $k \in \mathbb{R}$. Ma allora $v + iw = (k+i)w = \frac{k+i}{k-i}(k-i)w = \frac{k+i}{k-i}(v - iw)$, contro l'ipotesi di indipendenza lineare (su $\mathbb{C}$) di $v + iw$ e $v - iw$.

Per calcolare $P^{-1}AP$ si osservi innanzittutto che $A(v + iw) = (\alpha + i\beta)(v + iw) = (\alpha v - \beta w) + i(\beta v + \alpha w)$ e dunque, uguagliando le parti reali ed immaginarie,

$$Av = \alpha v - \beta w \,, \qquad Aw = \beta v + \alpha w \,.$$

Siccome $P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ è la prima colonna di P, cioè v, si ha allora

$$P^{-1}AP\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = P^{-1}Av = \alpha P^{-1}v - \beta P^{-1}w = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\beta\end{pmatrix} .$$

Similmente $P^{-1}AP\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix}$. Dunque $P^{-1}AP$ ha la forma indicata. ∎

Per calcolare la matrice esponenziale $\exp tA'$ osserviamo ora che

$$A' = \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \beta\\-\beta & 0\end{pmatrix} .$$

Siccome la matrice identità commuta con ogni altra matrice abbiamo

$$\exp(tA') = \exp\left[\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]\exp\left[\begin{pmatrix}0 & \beta\\-\beta & 0\end{pmatrix}\right] .$$

Le due matrici esponenziali si calcolano facilmente (si vedano gli esercizi *1.3.1*) e si trova

$$\exp(tA') = e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t\\-\sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix} .$$

Pertanto, se indichiamo con $R(\beta t)$ la matrice 2×2 di rotazione oraria di angolo βt,

$$R(\beta t) = \begin{pmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t\\-\sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix} , \tag{1.3.6}$$

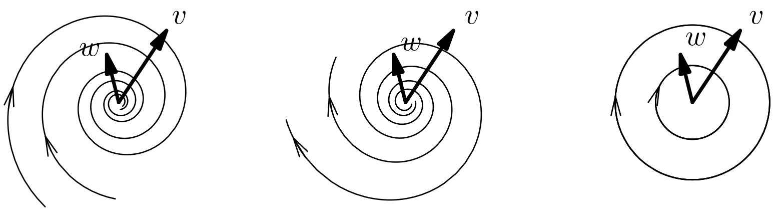
vediamo che, nelle coordinate y, la soluzione con dato iniziale y_0 è

$$y(t; y_0) = e^{\alpha t} R(\beta t)\, y_0$$

ed è costituita da una rotazione oraria con velocità angolare β composta con la dilatazione (o contrazione) $e^{\alpha t}$. Dunque, se $\alpha \neq 0$, nelle coordinate y le orbite sono spirali che si avvolgono in senso orario. Per $t \to +\infty$, le soluzioni tendono verso l'origine se $\alpha < 0$, verso l'infinito se $\alpha > 0$. I ritratti in fase nelle coordinate originali x sono qualitativamente simili (con l'eccezione del verso di avvolgimento delle spirali: siccome i due assi y_1 ed y_2 corrispondono ai vettori v e w, il verso delle spirali è quello che porta w su v; nella figura è mostrato solo un caso). Questi due ritratti in fase si chiamano *fuochi* stabile e, rispettivamente, instabile. Se $\alpha = 0$ le orbite sono cerchi (ellissi, nelle coordinate originali) ed il ritratto in fase si chiama un *centro.*

Esempio: L'oscillatore armonico smorzato. In presenza di attrito viscoso, l'equazione di un oscillatore armonico è

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} - kx \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,,$$



Fuoco stabile *Fuoco instabile* *Centro*

ove m, k e h sono costanti positive. Posto $\mu = h/(2m)$ e, al solito, $\omega^2 = k/m$, l'equazione diviene

$$\ddot{x} \;=\; -2\mu\dot{x} - \omega^2 x\,. \tag{1.3.7}$$

Come sistema del primo ordine essa è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \;=\; A\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}\,, \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}\,.$$

La matrice A ha gli autovalori

$$\lambda_\pm \;=\; -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$$

e si conclude che

- Se $\mu > \omega$ (attrito forte) allora λ_- e λ_+ sono entrambi negativi e il ritratto in fase è quello di un nodo stabile. Per tracciare il ritratto in fase bisogna ancora determinare gli autovettori di A relativi ai due autovalori $\lambda_\pm$: si trova $u_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix}$.
- Se $\mu < \omega$ (attrito debole) allora λ_- e λ_+ sono complessi, con parte reale negativa, e dunque il ritratto in fase è quello di un fuoco stabile. Il verso di percorrenza delle spirali si determina senza difficoltà osservando che l'equazione è del secondo ordine.

Si noti il diverso comportamtento delle soluzioni nei due casi: se l'attrito è abbastanza piccolo, il sistema tende verso l'equilibrio in modo oscillatorio. Se l'attrito è forte, invece, il sistema tende verso l'equilibrio in modo monotono, non oscillatorio.

Esercizi 1.3.5 (i) Il procedimento usato per determinare il ritratto in fase può essere utilizzato, anche in pratica, per determinare le soluzioni di un'equazione. Usando la stessa notazione del testo, verificare che

$$\exp(At)x_0 \;=\; e^{\alpha t} P R(\beta t) P^{-1} x_0\,. \tag{1.3.8}$$

(ii) Usando la (1.3.8) determinare la soluzione di $\dot{x} = Ax$ con dato iniziale x_0 per: (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tracciare inoltre i ritratti in fase.

(iii)* Un modo alternativo di determinare le soluzioni è il seguente: se $x_0 = av + bw$ allora, posto $a + ib = re^{i\gamma}$ con $r \geq 0$ e $\gamma \in [0, 2\pi)$, si ha

$$\exp(At)x_0 \;=\; r\,e^{\alpha t}\Big[\cos(\beta t - \gamma)v - \sin(\beta t - \gamma)w\Big]\,. \tag{1.3.9}$$

Verificarlo. Per confronto, risolvere (ii) usando la (1.3.9).

(iv) Nel caso dell'oscillatore con forte smorzamento, sarebbe stato possibile stabilire che le due varietà stabili appartengono al secondo e quarto quadrante *senza* calcolare gli autovettori $u_\pm$, ma sfruttando il fatto che l'equazione è del secondo ordine?

(v) Qual è il ritratto in fase dell'oscillatore smorzato nel caso $\mu = \omega$?

(vi)* Si supponga che A abbia due autovalori complessi $\alpha \pm i\beta$, con $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, cosicché il ritratto in fase di $\dot{x} = Ax$ è un fuoco (stabile o instabile). Mostrare che se una funzione continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è un integrale primo di $\dot{x} = Ax$ allora essa è costante.

D. Sistemi lineari in $\mathbb{R}^n$. È facile estendere l'analisi precedente al caso di di un'equazione lineare in $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = Ax\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

ove A è una matrice reale $n \times n$. Limitiamoci a dare i risultati — le poche dimostrazioni necessarie sono lasciate come esercizio. Come prima, assumiamo che tutti gli autovalori di A siano semplici e non nulli. In generale vi saranno sia autovalori reali che autovalori complessi ma, siccome la matrice è reale, questi ultimi sono in numero pari e anzi formano coppie complesse coniugate. Supponiamo allora che vi siano r autovalori reali $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ e $2k$ autovalori complessi $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$, con $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ (ovviamente $r + 2k = n$). Per semplificare la notazione, ordiniamo gli autovalori complessi in modo che $\lambda_{r+1} = \overline{\lambda}_{r+2}, \lambda_{r+3} = \overline{\lambda}_{r+4}, \ldots, \lambda_{n-1} = \overline{\lambda}_n$, ovvero[2]

$$\alpha_j = \alpha_{j+1}\,, \quad \beta_j = -\beta_{j+1}\,, \qquad j = r+1, r+3, \ldots, n-1\,.$$

Siano $u_1, \ldots, u_r$ autovettori (reali) relativi agli autovalori reali e $v_{r+1} \pm iw_{r+1}\,, v_{r+3} \pm iw_{r+3}\,, \ldots, v_{r+k} \pm iw_{r+k}$ autovettori relativi a quelli complessi. Gli n vettori reali $u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, w_{r+1}, \ldots, v_{n-1}, w_{n-1}$ sono linearmente indipendenti e dunque formano una base per $\mathbb{R}^n$ (vedere gli esercizi della sezione 1.3.B). Si passa alla base formata da essi con la matrice

$$P = [u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, w_{r+1} \ \ldots, v_{n-1}, w_{n-1}]\,.$$

Come nel caso 2×2 si riconosce che la matrice $A' = P^{-1}AP$ ha la forma diagonale a blocchi

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \alpha_r & & & \\ & & & & B_{r+1} & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & B_{n-1} \end{pmatrix}$$

con blocchi 2×2

$$B_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}\,.$$

[2] La notazione è comunque pesante. Me ne scuso, ma non ho trovato di meglio: questa convenzione serve solo a far sì che le parti reali degli n autovalori siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Il prezzo da pagare è che l'indice j degli autovalori $\alpha_j \pm i\beta_j$, degli autovettori $v_j \pm iw_j$ e dei blocchi B_j assume i valori $r+1, r+3, \ldots, n-1$.

Infine, con lo stesso argomento del caso 2×2 si riconosce che

$$\exp tA' = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & e^{\alpha_r t} & & & \\ & & & & e^{\alpha_{r+1} t} R(\beta_{r+1} t) & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & e^{\alpha_{n-1} t} R(\beta_{n-1} t) \end{pmatrix}$$

ove $R(\beta t)$ è la matrice 2×2 di rotazione oraria di angolo βt, vedere (1.3.6). Dunque, nelle coordinate $y = P^{-1}x$, la soluzione con dato iniziale y^0 ha componenti

$$y_j(t) = e^{\alpha_j t} y_j^0 \,, \qquad j = 1, \ldots, r \tag{1.3.10}$$

$$\begin{pmatrix} y_j(t) \\ y_{j+1}(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha_j t} R(\beta_j t) \begin{pmatrix} y_j^0 \\ y_{j+1}^0 \end{pmatrix} \,, \quad j = r+1, r+3, \ldots, n-1 \tag{1.3.11}$$

Si vede così che la proiezione della soluzione sugli autovettori corrispondenti agli autovalori reali e sui piani bidimensionali corrispondenti agli autovalori complessi sono molto semplici: dilatazioni o contrazioni esponenziali le prime (o equilibri, se l'autovalore nullo), fuochi o centri le seconde. Il ritratto in fase complessivo, per altro di difficile visualizzazione se $n > 3$, si ricostruisce da qui.

Per esempio, se $n = 3$ e vi è un autovalore negativo e due complessi con parte reale pure negativa, allora le soluzioni spiraleggiano verso l'origine, lungo spirali con asse l'autovettore reale. Fare una figura. Per qualche altro caso vedere l'Appendice F del capitolo 1 di BGG ed il libro *Equazioni differenziali ordinarie* di Arnold.

Osservazione: Nel caso diagonalizzabile considerato qui, lo spazio delle fasi $\mathbb{R}^n$ si decompone nella somma di tre sottospazi invarianti:

- Un sottospazio "stabile", generato dagli autovettori relativi agli autovalori reali negativi e dalle parti reali ed immaginarie degli autovettori relativi agli autovalori complessi con parte reale negativa. In questo sottospazio, tutte le soluzioni tendono asintoticamente all'origine per $t \to +\infty$.
- Un sottospazio "instabile", generato dagli autovettori relativi agli autovalori reali positivi e dalle parti reali ed immaginarie degli autovettori relativi agli autovalori complessi con parte reale positiva. In questo sottospazio, tutte le soluzioni tendono all'infinito per $t \to +\infty$.
- Un sottospazio "centrale", generato dalle parti reali ed immaginarie degli autovettori relativi agli autovalori immaginari. In questo sottospazio, tutte le soluzioni sono limitate.

(Se la matrice non è diagonalizzabile, allora il sottospazio centrale può contenere anche soluzioni non limitate.)

E. Studio locale attorno ai punti di equilibrio. Teorema di Grobman–Hartman. Consideriamo adesso una qualunque equazione differenziale $\dot{x} = X(x)$ in $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che essa abbia un equilibrio in un punto $\overline{x}$. Allora $X(\overline{x}) = 0$ e, come si è già accennato, si può sperare di ottenere informazioni sul comportamento delle soluzioni vicino all'equilibrio da quello delle soluzioni dell'equazione linearizzata

$$\dot{x} = A(x - \overline{x}) \tag{1.3.12}$$

ove A è la matrice Jacobiana di X calcolata nel punto $\overline{x}$, ovvero la matrice di componenti

$$A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\overline{x}) \,.$$

Esercizi 1.3.6 (i) Linearizzare il sistema di Lotka–Volterra attorno ai suoi due punti di equilibrio. Confrontare il ritratto in fase di ciascun sistema linearizzato con quello del sistema di Lotka–Volterra in un piccolo intorno del punto di equilibrio.

(ii) Si consideri il sistema $\dot{x} = ax + bx^2$, $x \in \mathbb{R}$, ove a e $b \neq 0$ sono parametri. Se ne confronti il ritratto in fase con quello della sua linearizzazione attorno all'equilibrio $x = 0$, al variare di a e b. (Fare anche il caso $a = 0$).

Una questione importante è se, in un intorno sufficientemente piccolo del punto di equilibrio, il ritratto in fase del sistema nonlineare "assomigli" a quello del sistema linearizzato (1.3.12). La risposta a questa domanda è fornita da un importante teorema, il cosiddetto teorema di Grobman–Hartman, e dipende dalle proprietà della linearizzazione: essa è affermativa se *tutti* gli autovalori della matrice A hanno parte reale non nulla.

Se invece vi sono autovalori con parte reale nulla, allora come mostra l'esercizio (ii) più sopra, la risposta è negativa: se i due ritratti in fase si assomiglino o no dipende anche dai termini nonlineari.

Data l'importanza dell'annullarsi o meno della parte reale degli autovalori della parte lineare del campo vettoriale, si usa la seguente terminologia, che con evidenza discende dai casi dell'oscillatore e del repulsore armonici: un equilibrio di un'equazione differenziale è detto

- *iperbolico* se tutti gli autovalori della linearizzazione hanno parte reale non nulla.
- *ellittico* se tutti gli autovalori della linearizzazione sono puramente immaginari (ma non nulli).

Esercizi 1.3.7 (i) Si consideri ancora l'equazione di Newton unidimensionale conservativa $m\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Si supponga che $V'(\overline{x}) = 0$ ma $V''(\overline{x}) \neq 0$. Mostrare che allora l'equilibrio $(\overline{x}, 0)$ è ellittico se $\overline{x}$ è un minimo di V ed è iperbolico se $\overline{x}$ è un massimo di V.

(ii) Si supponga ora che, nell'esercizio precedente, $V(x) = \pm x^4$. L'equilibrio $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ è iperbolico? Ellittico?

Osservazioni: (i) *Teorema di Grobman–Hartman.* Un enunciato preciso di questo risultato è un po' delicato, e la sua dimostrazione complessa. Per essere precisi, dovremmo infatti specificare cosa significhi che due ritratti in fase si "assomigliano". Normalmente, si vorrebbe che esista un cambiamento di coordinate $x \mapsto x'$ definito in un intorno del punto di equilibrio che in tale intorno trasformi le soluzioni dell'equazione $\dot{x} = X(x)$ in quelle della sua parte lineare $\dot{y} = Ay$. Questo è *quasi* quello che succede: si dimostra infatti che esiste un *omeomorfismo* (cioè una bijezione continua con inversa continua) $x \mapsto y$ siffatto ma, almeno senza ipotesi aggiuntive, non si riesce a dimostrare l'esistenza di un diffeomorfismo. Aggiungiamo che è possibile prendere la mappa $x \mapsto y$ diffeomorfismo se, per esempio, tutti gli autovalori hanno parte reale positiva, o tutti negativa.

(ii) *Varietà stabile ed instabile.* Una conseguenza del teorema di Grobamn–Hartman è che vicino ad un equilibrio iperbolico sono definite due varietà con proprietà simili agli autospazi stabili ed instabili di un'equazione lineare. Precisamente, tutti i moti sulla varietà stabile (instabile) tendono all'equilibrio per $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) e tale varietà è tangente nell'equilibrio all'autospazi stabile (instabile) dell'equazione linearizzata.

1.4 Esempio: Equazione di Newton unidimensionale

A. Sistemi conservativi. Un altro caso semplice, ma importante perchè permette di comprendere parecchi meccanismi elementari, è quello dell'equazione di Newton per un sistema conservativo unidimensionale:

$$m\ddot{x} \;=\; -\frac{dV}{dx}(x)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,. \tag{1.4.1}$$

Questa è l'equazione che governa il moto di una particella di massa m che si muove senza attrito lungo una guida rettilinea, sotto l'effetto di forze di energia potenziale $V(x)$. (Si veda il capitolo 3). Come già sappiamo, l'equazione (1.4.1) ha l'integrale primo dell'energia

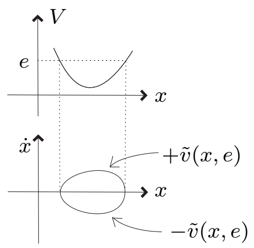
$$E(x,v) \;=\; \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

e dunque, per disegnarne il ritratto in fase, è sufficiente disegnare gli insiemi di livello

$$C_e \;:=\; \Big\{(x,v)\in\mathbb{R}^2 \;:\; \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = e\Big\}$$

della funzione E. Come adesso spieghiamo, questo è abbastanza facile da fare, almeno qualitativamente, a partire da un esame del grafico di V.[3]

Ritratto in fase. Si osservi innanzittutto che, siccome l'energia cinetica non può essere negativa, si ha $E(x,v)\ge V(x)$. Di conseguenza, per e fissato (e ovviamente $\ge$ del minimo di V, se no C_e è vuoto), l'insieme C_e si proietta sull'asse delle x sul sottoinsieme



$$\mathcal{I}_e \;=\; \{x\in\mathbb{R} \,:\, V(x)\le e\}\,.$$

Si noti anche che, siccome $\frac{\partial E}{\partial x}(x,v)=V'(x)$ e $\frac{\partial E}{\partial v}(x,v)=mv$, C_e è una curva regolare, eccetto nei punti (x,v) nei quali $V'(x)$ e v si annullano entrambi, cioè, negli equilibri di energia e. Dunque, gli unici punti singolari di C_e (punti isolati, punti angolosi, autointersezioni) possono essere gli equilibri.

Si noti infine che, in corrispondenza ai punti $x\in\mathcal{I}_e$ nei quali $V(x)<e$, C_e consiste di due rami, simmetrici rispetto all'asse x, di equazione

$$v \;=\; \pm\,\tilde{v}(x,e)\,, \qquad \tilde{v}(x,e) \;:=\; \sqrt{\frac{2}{m}\big(e-V(x)\big)}\,. \tag{1.4.2}$$

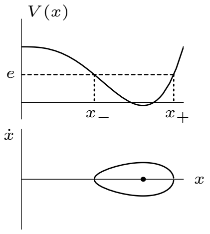
Questi due rami si incontrano in quei punti dell'asse delle x nei quali $\tilde{v}(x,e)=0$, cioè $V(x)=e$. Se tali punti non sono equilibri, allora la curva (dovendo essere regolare e simmetrica rispetto all'asse delle x) ha in essi tangente verticale; questo non succede invece mai se il punto di intersezione con l'asse x è un equilibrio (vedere gli esercizi).

Esaminiamo ora un certo numero di casi tipici, a partire dai quali è poi possibile costruire l'intero ritratto in fase. Per semplicità di esposizione, assumiamo che $\mathcal{I}_e$ sia connesso (se questo non avviene, basta considerarne una componente connessa alla volta).

- Se $\overline{x}$ è un minimo stretto di V e $V(\overline{x})=e$ allora $\mathcal{I}_e$ consiste del solo punto $\overline{x}$ e C_e consiste del solo punto di equilibrio $(\overline{x},0)$.

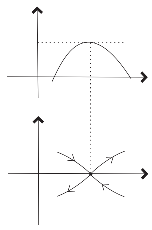
[3] In realtà, questa è una cosa più facile da fare che da spiegare—si cerchi di capire l'idea e poi la si applichi a qualche esempio.

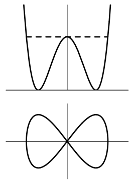
- Supponiamo ora che e sia un valore regolare di $E(x,v)$, cosicchè C_e è una curva regolare. Consideriamo alcuni casi:



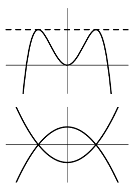
  - ●● $\mathcal{I}_e$ è un intervallo chiuso e limitato $[x_-, x_+]$ e $V(x) = e$ solo negli estremi $x_\pm$. In questo caso C_e è una curva regolare chiusa, unione dei due rami $v = \pm\tilde{v}(x)$, che si raccordano con tangente verticale nei punti $(x_-, 0)$ ed $(x_+, 0)$. Non contenendo punti di equilibrio, questa curva chiusa consiste di una sola orbita che è percorsa periodicamente: la coordinata x varia periodicamente fra i due 'punti di inversione' x_- ed x_+, nei quali la velocità si annulla e cambia di segno. Si noti che questa situazione è sempre incontrata ad energie (un po') superiori a quelle di un minimo stretto di V. Quindi, nel piano delle fasi, un equilibrio che corrisponde ad un minimo stretto dell'energia potenziale è sempre circondato da moti periodici.
  - ●● Se $\mathcal{I}_e = [x_-, +\infty)$ e $V(x) = e$ solo in x_- la situazione è simile: i due rami di C_e si incontrano (ancora con tangente verticale) in $(x_-, 0)$ e per $x \to +\infty$ essi vanno all'infinito. Anche in questo caso C_e è una singola orbita, ma non periodica: i moti $t \mapsto x(t)$ su di essa arrivano da, e tendono a, $+\infty$. Considerazioni del tutto analoghe valgono se $\mathcal{I}_e = (-\infty, x_+]$.
  - ●● Se $\mathcal{I}_e = (-\infty, +\infty)$ e $V(x) < e$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, C_e consiste di due rami disgiunti: quello superiore corrisponde a moti che vanno da $-\infty$ a $+\infty$, quello inferiore a moti che vanno al contrario.

- Supponiamo infine che V abbia un *massimo* stretto in un punto $\overline{x}$ e sia $e = V(\overline{x})$. Allora $V(x) < e$ in qualche intervallo a destra e a sinistra di $\overline{x}$. Localmente, vicino all'equilibrio $(\overline{x}, 0)$, C_e ha la forma di una ics, come nel caso del repulsore armonico: è costituito da quattro rami, due alla sua destra e due alla sua sinistra, che si incontrano in $(\overline{x}, 0)$ (l'angolo di intersezione è calcolato negli esercizi). Su due di essi le soluzioni tendono asintoticamente all'equilibrio per $t \to +\infty$ e sugli altri due per $t \to -\infty$; questi tratti di C_e sono tratti delle "varietà instabile" e, rispettivamente, della "varietà stabile" dell'equilibrio. La struttura globale di C_e, e dunque di queste varietà, dipende dalle proprietà di V. Vediamo i casi più comuni:





  - ●● Se $\mathcal{I}_e$ è un intervallo chiuso $[x_-, x_+]$ e non contiene altri punti critici di V, allora C_e è una curva a forma di otto, che attraversa verticalmente l'asse delle x nei due punti $(x_-, 0)$ ed $(x_+, 0)$ ed ha in $\overline{x}$ un punto singolare di autointersezione. Dunque, C_e è l'unione di tre orbite: l'equilibrio ed i due 'lobi'. Si noti che ciascun lobo è al tempo stesso "varietà stabile" e "'varietà instabile" dell'equilibrio.



  - ●● Se all'interno di $\mathcal{I}_e$ vi è un altro punto critico di V che ha energia e, diciamo un altro massimo $\tilde{x} < \overline{x}$, allora una varietà stabile ed una instabile di $(\overline{x}, 0)$ tendono asintoticamente ad esso, e ne sono, rispettivamente, varietà instabile e stabile.

In pratica, per studiare un caso particolare, si fa variare l'energia dal valore minino (o da $-\infty$, se V non ha minimi) fino a $+\infty$ e si disegna una (o qualche) curva di livello di ciascun tipo.

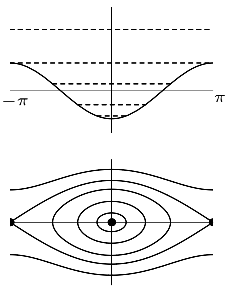
Osservazione: Per tracciare le curve di livello dell'energia si può immaginare di lasciar rotolare una pallina sul grafico dell'energia potenziale, come se fosse una collina: tanto minore di e è $V(x)$, tanto più velocemente si muove la pallina, in un verso o nell'altro, ed essa ha velocità nulla in quelle configurazioni nelle quali $e = V(x)$, se esistono. Quando raggiunge una di queste configurazioni, la pallina torna indietro. Se tale configurazione è di equilibrio, allora essa non può essere raggiunta.

Esempio: Il pendolo. Come si sa (e si vedrà nella sezione 3.1), se si indica con x l'angolo formato dal pendolo con la verticale discendente e con g l'accelerazione di gravità, allora l'equazione del moto di un pendolo di massa m e lunghezza l è

$$ml\ddot{x} \;=\; -mg\sin x$$

Dunque l'energia potenziale è $V(x) = -mg\cos x$ e dobbiamo disegnare le curve

$$\frac{1}{2}mlv^2 - mg\cos\varphi \;=\; e$$



al variare di e. Siccome il sistema è 2π–periodico in x, possiamo limitarci a disegnare il ritratto in fase in una striscia di larghezza 2π, per esempio $x \in [-\pi, \pi]$, $v \in \mathbb{R}$ e poi proseguirlo per periodicità.[4] In questa striscia, le configurazioni di equilibrio sono $x = 0$, che corrisponde all'equilibrio inferiore, ed $x = \pm\pi$, che entrambi corrispondono al pendolo rivoltato.

- Per e uguale al minimo di V, cioè $e = -mg$, l'insieme di livello è costituito dal solo punto di equilibrio inferiore $(0, 0)$.
- Per energie comprese fra il minimo ed il massimo di V, cioè $-mg < e < mg$, le curve di livello sono regolari e chiuse e corrispondono alle oscillazioni ('librazioni') del pendolo, di ampiezza crescente con e.
- Se e è uguale al massimo di V, cioè $e = mg$, l'insieme di livello è definito per $x \in [-\pi, \pi]$ e consiste di quattro orbite: i due equilibri $(\pm\pi, 0)$ e le loro varietà stabile ed instabile. Si noti che la varietà stabile dell'uno è varietà instabile dell'altro, e viceversa. I moti su queste orbite tendono asintoticamente, per $t \to \pm\infty$, alla posizione di equilibrio superiore, senza tuttavia mai raggiungerla.
- Se l'energia è più alta, $e > g$, allora la curva di livello è costituita da due orbite, ciascuna delle quali corrisponde alle rotazioni del pendolo, una in verso orario l'altra antiorario.

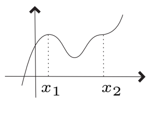
Si osservi che tutti i moti sono periodici, eccetto quelli sulle varietà (in)stabili degli equilibri superiori.[5] Le varietà (in)stabili si chiamano anche *separatrici* perchè separano la regione occupata dai moti oscillatori da quella dei moti rotatori del pendolo.

Esercizi 1.4.1 (i) Mostrare che se C_e interseca l'asse delle x in un punto regolare, allora esso ha ivi tangente verticale.

(ii)* Mostrare che se $\overline{x}$ è un punto di massimo o di flesso orizzontale per V, allora

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{d\tilde{v}}{dx}(x) \;=\; \pm\sqrt{\frac{-V''(\overline{x})}{m}}\,. \tag{1.4.3}$$

Dunque, le separatrici formano un angolo positivo (ma minore di $\pi/2$) se il massimo è quadratico e sono invece tangenti all'asse delle x se $V''(\overline{x}) = 0$.



(iii) Supponiamo che V abbia un massimo in x_1 ed un flesso orizzontale in x_2 e che sia $V(x_1) = V(x_2) = e$ e $V(x) < e$ per tutti gli $x \in (x_1, x_2)$. Disegnare la parte di C_e compresa nella striscia $x \in [x_1, x_2]$.

(iv) Supponiamo che $\overline{x}$ sia un punto critico di V e consideriamo un'orbita di energia $e > V(\overline{x})$. Qual è la tangente a C_e nei suoi punti $(\overline{x}, \pm\tilde{v}(\overline{x}))$?

(v) Disegnare il ritratto in fase per le seguenti energie potenziali:

(a) $V(x) = -x^4/4 + x^2/2$ (b) $V(x) = -x(x-1)^2$
(c) $V(x) = x^3(x - 4/3)$ (d) $V(x) = -(x-1)^2$.

Legge oraria. L'analisi precedente ha sfruttato l'esistenza di un integrale primo per determinare le orbite. Per l'integrazione completa dell'equazione

[4] In realtà, $x = -\pi$ ed $x = \pi$ sono la stessa configurazione del sistema, e dunque le rette $x = -\pi$ e $x = \pi$ andrebbero identificate: come si vedrà nel capitolo 3, lo spazio delle fasi è propriamente un cilindro, non il piano.

[5] Le soluzioni di equilibrio sono (banalmente) periodiche con ogni periodo.

differenziale bisogna ancora trovare la legge oraria, cioè la parametrizzazione temporale $t \mapsto x_t$ delle soluzioni. Come adesso vediamo anche questo si può fare (almeno in linea di principio, cioè a meno di difficoltà di calcolo) sfruttando l'esistenza dell'integrale primo, che fornisce direttamente non proprio la funzione $\mapsto x_t$, ma la sua inversa, cioè il tempo in funzione della posizione.

Consideriamo una soluzione con dato iniziale (x_0, v_0) ad un istante t_0 ed assumiamo, per fissare le idee, che sia $v_0 > 0$. Allora, se indichiamo con e l'energia della soluzione, la velocità iniziale v_0 soddisfa la (1.4.2) con il segno $+$. Di conseguenza, fino a che il moto non inverte il senso si ha

$$\frac{dx_t}{dt} \;=\; \sqrt{\frac{2}{m}(e - V(x_t))}\,.$$

Questa è un'equazione a variabili separabili e si può integrare: essa si può scrivere

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{e - V(x)}} \;=\; dt$$

e dunque

$$t(x) \;=\; t_0 \;+\; \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e - V(x)}}\,. \tag{1.4.4}$$

A parte eventuali difficoltà nel calcolare l'integrale, questo fornisce la funzione $x \mapsto t(x)$. Invertendola, si ottiene la legge oraria $t \mapsto x_t$.

Naturalmente, tutto questo vale fino a che la soluzione non raggiunge un punto di inversione, perchè allora si perde la monotonia di $t \mapsto x_t$. Se un punto di inversione x_+ viene raggiunto ad un certo istante t_+, allora bisogna prendere $(x_+, 0)$ come dato iniziale all'istante t_+ e ripetere il procedimento, facendo attenzione al fatto che adesso la velocità è negativa e dunque bisogna prendere ovunque il segno $-$ della (1.4.2).

Si vede così che l'esistenza dell'integrale primo permette l'integrazione dell'equazione differenziale, a meno del calcolo di un integrale e dell'inversione di una funzione. Tradizionalmente, si dice che il problema è stato ridotto alle *quadrature* (quadratura = calcolo di un integrale). Naturalmente, l'inversione della $x \mapsto t(x)$ può essere proibitiva, ma è comunque utile avere un'espressione per questa funzione. Essa può essere usata, se serve, per calcoli approssimati (numerici) e anche come base per ulteriori considerazioni teoriche.

Come esempio, si può trovare un'espressione per il periodo dei moti periodici. Consideriamo un'orbita periodica di energia e e 'punti di inversione' $x_\pm$. Il suo periodo è il tempo necessario ad andare da x_- ad x_+ più quello necessario a tornare indietro (tempi che sono ovviamente uguali). Dalla (1.4.4) si trova così che il periodo è

$$T(e) \;=\; \sqrt{2m}\int_{x_-(e)}^{x_+(e)}\frac{dx}{\sqrt{e - V(x)}} \tag{1.4.5}$$

ed è una funzione della sola energia. In casi speciali, in particolare per l'oscillatore armonico, tale funzione è costante; tutti i moti hanno dunque lo stesso periodo, indipendentemente dalla loro energia, e si dice che il sistema è *isocrono*. In generale, invece, la funzione $T(e)$ non è costante, il periodo varia con l'energia ed il sistema è chiamato *anisocrono*.

Esempio: periodo delle oscillazioni del pendolo. Per il pendolo, $V(x) = -mg\cos x$. I moti di oscillazione si hanno per $e < mg$. I punti di inversione sono

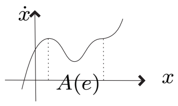
$x_\pm(e) = \pm \arccos(-\frac{e}{mg})$ e così

$$T(e) \;=\; \sqrt{\frac{2}{g}} \int_{-\arccos(-\frac{e}{mg})}^{\arccos(-\frac{e}{mg})} \frac{dx}{\sqrt{e/mg + \cos x}} \,.$$

L'integrale si può calcolare, ma non in termini di trascendenti elementari (esso fa intervenire una funzione trascendente nota cone 'integrale ellittico del primo tipo'). Il grafico del periodo, come funzione dell'energia, è mostrato nella figura. Per e che tende al suo valore minimo $-mg$, cioè quello dell'equilibrio stabile, il periodo tende non a zero, ma al periodo delle 'piccole oscillazioni' del pendolo, cioè, il periodo delle oscillazioni del sistema linearizzato. Al crescere dell'energia, e dunque dell'ampiezza del moto, il periodo cresce e tende all'infinito sulle separatrici, che hanno energia uguale a quella del massimo dell'energia potenziale (mg). Il fatto che il periodo diverga sulle separatrici è ovvio: il sistema ci mette un tempo infinito a percorrerle, con la velocità che tende a zero vicino agli equilibri instabili. Dunque, per la continuità, moti vicini alle separatrici spenderanno molto tempo vicino agli equilibri instabili. Così, il periodo di oscillazione del pendolo *non* è indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni: il pendolo è un sistema anisocrono. L'isocronismo delle oscillazioni, scoperto da Galilei, è vero solo approssimativamente per ampiezze piccole: infatti, la tangente al grafico in $e = -mg$ è orizzontale. La figura mostra anche il periodo dei moti di rotazione del pendolo, ad energie superiori a mg; al crescere dell'energia la loro velocità è sempre più alta e dunque il loro periodo tende a zero per $e \to +\infty$.

Esercizi 1.4.2 (i) Calcolare il periodo dei moti di un oscillatore armonico, per il quale $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, usando la (1.4.5).

(ii) *(Relazione periodo-energia)* Supponiamo che, in una certa regione del piano delle fasi, tutti i moti siano periodici. (Questo avviene, per esempio, vicino ad un minimo dell'energia potenziale). Indichiamo con $A(e)$ l'area racchiusa dall'orbita di energia e. Mostrare che



$$T(e) \;=\; m\,\frac{dA}{de}(e)\,.$$

(iii) Se $V(x_*) = e$, allora nella (1.4.4) la funzione integranda diverge per $x \to x_*$. Mostrare che l'integrale converge se x_* è un punto di inversione, ciò che avviene se $V'(x_*) \neq 0$, e diverge se x_* è una configurazione di equilibrio, cioè se $V'(x_*) = 0$. (Questo dà una prova indipendente del fatto che un punto di equilibrio non può essere raggiunto in tempo finito).

(iv)* Supponiamo che, come nel caso del pendolo, il sistema sia definito non su $\mathbb{R}$ ma su S^1, cosicché lo spazio delle fasi è in realtà un cilindro. Mostrare che ogni orbita che fa un giro completo sul cilindro è periodica (cioè, se lungo un moto x si incrementa di 2π allora $\dot x$ riprende lo stesso valore) e trovare un'espressione per il suo periodo.

B. Sistemi meccanici con attrito. Aggiungiamo adesso ai sistemi conservativi studiati finora un po' di dissipazione, dovuta ad attrito viscoso (proporzionale alla velocità). Se indichiamo con $h > 0$ il coefficiente d'attrito, l'equazione del moto è

$$m\ddot x = -V'(x) - h\dot x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.6}$$

Naturalmente l'energia non è più un integrale primo e la dinamica del sistema è completamente diversa da quello del sistema conservativo. In effetti ci si aspetta che, perdendo energia, tutti i moti tendano verso posizioni equilibrio (senza naturalmente mai raggiungerli, per l'unicità). Si riesce a tracciare, almeno qualitativamente, il ritratto in fase?

Innanzittutto, osserviamo che le configurazioni di equilibrio sono ancora i punti critici di V (la dissipazione ovviamente non introduce nuovi equilibri). Altre informazioni si ottengono naturalmente dal fatto che l'energia viene dissipata. La variazione dell'energia $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x)$ lungo i moti si calcola per mezzo della derivata di Lie. Indicando con X il campo vettoriale del sistema (scritto come equazione del primo ordine) si ha

$$L_X E(x,\dot{x}) \;=\; \dot{x}(-V'(x) - h\dot{x}) + V'(x)\dot{x} \;=\; -h\dot{x}^2 .$$

Dunque l'energia decresce con tasso proporzionale al quadrato della velocità. Questo ha l'effetto che, nel piano delle fasi, le orbite non seguono le curve di livello di E ma le attraversano trasversalmente (eccetto laddove $\dot{x} = 0$, cioè in equilibri e punti di inversione) "scendendo" verso regioni di energia più bassa. In particolare, attorno a configurazioni di equilibrio che sono minimi stretti di V, le orbite non saranno più curve chiuse ma tenderanno verso l'equilibrio. Come?

Si possono avere informazioni più dettagliate sulla struttura del ritratto in fase vicino agli equilibri linearizzando il sistema e ricordando che, per il teorema di Grobman–Hartman, se l'equilibrio è iperbolico allora, localmente, il ritratto in fase del sistema è simile a quello della linearizzazione. Se $V'(\overline{x}) = 0$, allora $V'(x) = V''(0)(x-\overline{x}) + ...$ e linearizzando la (1.4.6), pensata naturalmente come sistema del primo ordine $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -\frac{1}{m} V'(x) - \frac{h}{m} v$, si trova

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \;=\; A \begin{pmatrix} x-\overline{x} \\ v \end{pmatrix}, \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m} V''(0) & -\frac{h}{m} \end{pmatrix}$$

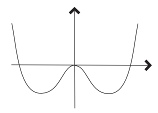
ovvero, come equazione del secondo ordine,

$$m\ddot{x} = -V''(0)(x-\overline{x}) - h\dot{x} .$$

Se l'equilibrio è un minimo "quadratico dell'energia potenziale, cioè $V''(\overline{x}) > 0$, allora questa non è altro che l'equazione di un oscillatore armonico smorzato (si ponga $\omega^2 = V''(0)/m$ e $2\mu = h/m$ nella (1.3.7)). Dunque, come sappiamo, l'equilibrio è iperbolico. Infatti, gli autovalori di A sono $\lambda_\pm \;=\; \frac{1}{2m}\Big[-h \pm \sqrt{h^2 - 4V''(0)}\Big]$. Se la dissipazione è forte ($h^2 > 4V''(0)$) i due autovalori sono entrambi reali negativi e dunque si ha un nodo stabile. Se invece la dissipazione è debole ($h^2 < 4V''(0)$) i due autovalori sono complessi con parte reale negativa e il ritratto in fase è quello di un fuoco stabile.

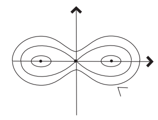
In modo analogo si riconosce che gli equilibri $(\overline{x}, 0)$ che corrispondono a massimi 'quadratici' di V, cioè tali che $V''(\overline{x}) < 0$, sono iperbolici ed il ritratto in fase è, localmente, quello di una sella. Vi saranno, in particolare, le varietà stabili ed instabili.

Esempio: cattura in sistema bistabile. Come esempio consideriamo il caso di una doppia buca di potenziale:



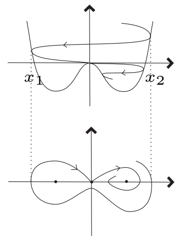
$$\ddot{x} \;=\; -V'(x) - h\dot{x} , \qquad V(x) \;=\; \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

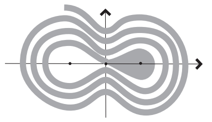
(per semplicità di notazione prendiamo $m = 1$). Il sistema ha le tre configurazioni di equilibrio $x = -1, 0, 1$. La prima e l'ultima sono minimi (quadratici) dell'energia potenziale e la seconda è un massimo (pure quadratico). Il ritratto in fase del sistema senza dissipazione ($h = 0$) è mostrato nella figura accanto.



Siccome $V''(\pm 1) = 2$, l'analisi precedente ci dice che gli equilibri $(\pm 1, 0)$ sono nodi stabili se $h^2 > 4V''(\pm 1) = 8$ e fuochi se $h^2 < 8$. Il punto $(0,0)$ è invece un punto di sella.

Per tracciare il ritratto in fase cominciamo col tracciare le due varietà instabili del punto di sella. Perdendo energia, esse spiraleggiano verso i due equilibri $(\pm 1, 0)$. Cerchiamo poi di tracciare uno dei due rami della varietà stabile del punto di sella, per esempio quello che arriva dal semiasse $x < 0$. Andando indietro nel tempo, il moto guadagna energia: esso dunque arriva ad un punto di inversione $x_1 < 0$ con un'energia un po' superiore a quella della sella, poi ad uno $x_2 > 0$ con energia ancora superiore, e così via. Lo stesso fa l'altra varietà stabile. Il risultato, mostrato in figura, è che le due varietà stabili delimitano la regione (in grigio) delle condizioni iniziali che cascano nella buca di destra da quella delle condizioni iniziali che cascano nella





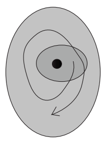
buca di sinistra. Ciascuna regione contiene moti oscillatori di ampiezza decrescente, inizialmente attorno alle due buche, e poi entro una delle due.

È interessante osservare che l'energia persa in un'oscillazione è dell'ordine di h e tale quantità dà una misura dello spessore delle due regioni. Dunque, se l'attrito è molto debole, $h \ll 1$, una piccola variazione delle condizioni iniziali può portare ad un esito completamente diverso: per $h \to 0$ diventa impossibile predire in quale buca il sistema cascherà.

Esercizi 1.4.3 Tracciare il ritratto in fase del pendolo con attrito.

1.5 Stabilità degli equilibri

A. Stabilità alla Lyapunov. Come già accennato, la nozione intuitiva di stabilità di un equilibrio è che le soluzioni che partono vicine ad esso vi restino vicine e che, eventualmente, vi tendano asintoticamente, Vi sono diverse formalizzazioni di queste idee (necessarie per poter fare affermazioni precise). La più comune è dovuta a Lyapunov:



Definizione *Un punto di equilibrio $\overline{x}$ di $\dot{x} = X(x)$ è chiamato*

i. stabile *se per ogni intorno U di $\overline{x}$ esiste un intorno U_0 di $\overline{x}$ tale che*

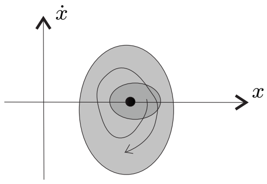
$$x_0 \in U_0 \quad \Longrightarrow \quad x(t; x_0) \in U \quad \forall t > 0\,. \tag{1.5.1}$$

ii. instabile *se non è stabile.*

iii. asintoticamente stabile *se è stabile e se, inoltre, esiste un intorno V di $\overline{x}$ tale che*

$$x_0 \in V \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} x(t; x_0) \;=\; \overline{x}\,. \tag{1.5.2}$$

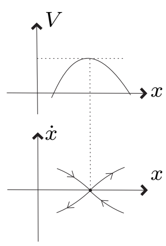
Se la (1.5.1) è soddisfatta per tutti i tempi, non solo per quelli positivi, allora si dice che l'equilibrio è *stabile per tutti i tempi.* Se si vuole sottolineare che l'equilibrio è stabile, ma non per tutti i tempi, si dice che è *stabile per tempi positivi.*



Nel caso di equazioni del secondo ordine, come sappiamo, gli equilibri sono del tipo $(\overline{x}, 0)$, e $\overline{x}$ si chiama configurazione di equilibrio. Diremo allora che una *configurazione di equilibrio è stabile* (instabile, asintoticamente stabile) se il corrispondente equilibrio $(0, \overline{x})$ è stabile (instabile, asintoticamente stabile). Dunque, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ è stabile se per ogni intorno $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ di $(\overline{x}, 0)$ esiste un intorno $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{2n}$ di $(\overline{x}, 0)$ tale che

$$(x_0, \dot{x}_0) \in \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad (x_t, \dot{x}_t) \in \mathcal{U} \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Esempi (importanti): (i) Nel caso dell'equazione $m\ddot{x} = -V'(x)$ $x \in \mathbb{R}$, i punti di minimo stretti dell'energia potenziale V sono circondati da orbite periodiche. Pertanto, essi sono configurazioni di equilibrio stabili per tutti i tempi. (Qualunque sia l'intorno U dell'origine, basta prendere come U_0 l'interno di un'orbita chiusa contenuta in U).



(ii) I massimi stretti di V sono invece configurazioni di equilibrio instabili per $m\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Infatti, se V ha un massimo stretto in $\overline{x}$, allora arbitrariamente vicino a $(\overline{x}, 0)$ vi sono dati iniziali la cui orbita si allontana da $(\overline{x}, 0)$: per esempio, tutti quelli sulla varietà instabile. (Si noti che per provare l'instabilità si deve fare vedere che, in *ogni* intorno U dell'equilibrio c'è un dato iniziale x_0 la cui orbita lascia U).

(iii) Nel caso dei sistemi lineari nel piano, un fuoco stabile è asintoticamente stabile e un centro è stabile per tutti i tempi, ma non asintoticamente stabile. Invece, una sella è instabile.

(iv) Consideriamo ora l'equazione lineare $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, ove A è una matrice reale *con autovalori tutti distinti.* L'origine è

1. Stabile se tutti gli autovalori hanno parte reale ≤ 0.
2. Asintoticamente stabile se tutti gli autovalori hanno parte reale < 0.
3. Instabile se almeno un autovalore ha parte reale > 0.

Per dimostrare queste asserzioni procediamo come nella sezione 1.3.D, passando alle coordinate $y = P^{-1}x$ nelle quali le soluzioni sono date dalle (1.3.10), (1.3.11) ed usiamo la stessa notazione usata là.

1. Consideriamo una soluzione che, nelle coordinate y, ha dato iniziale y^o. Se tutti gli autovalori hanno parte reale ≤ 0 allora dalle (1.3.10), (1.3.11) segue subito che, per $t > 0$, ogni componente della soluzione corrispondente ad un autovalore reale α_j soddisfa

$$\left|y_j(t)\right| \ = \ e^{\alpha_j t}\left|y_j^o\right| \ \leq \ \left|y_j^o\right|$$

mentre ogni coppia di componenti relative ad una coppia di autovalori complessi $\alpha_j \pm i\beta_j$ soddisfa

$$\left\| \begin{pmatrix} y_j(t) \\ y_{j+1}(t) \end{pmatrix} \right\| \ = \ e^{\alpha_j t}\left\| \begin{pmatrix} y_j^o \\ y_{j+1}^o \end{pmatrix} \right\| \ \leq \ \left\| \begin{pmatrix} y_j^o \\ y_{j+1}^o \end{pmatrix} \right\| .$$

Dunque, se tutti gli $\alpha_j \leq 0$, allora $\|y(t)\| \leq \|y^o\|$. Di conseguenza, nelle coordinate y, *ogni* palla centrata nell'origine è invariante nel futuro. Questo prova la stabilità, perchè ogni intorno dell'origine nelle coordinate x contiene una di queste y–palle (in $\mathbb{R}^n$ tutte le topologie sono equivalenti).

2. Se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa allora, oltre ad eserci stabilità, tutte le soluzioni tendono all'origine: le (1.3.10), (1.3.11) mostrano infatti che, nelle coordinate y, $\lim_{t\to+\infty} y_j(t) = 0$ per tutti i j.

3. Supponiamo infine ci sia un autovalore con parte reale positiva, per esempio l'autovalore reale α_1. Sia u_1 un autovettore corrispondente a α_1. Sappiamo allora che, *per ogni* $r > 0$, piccolo quanto si vuole, la soluzione con dato iniziale ru_1 (nelle coordinate y) è $re^{\alpha_1 t}u_1$ e tende all'infinito; dunque, in ogni intorno dell'origine ci sono soluzioni che non vi restano dentro e questo prova l'instabilità. Per un autovalore complesso con parte reale positiva si procede in modo simile.

(v) Attenzione però che, se A ha autovalori con molteplicità maggiore di uno, allora il risultato 1. dell'esempio precedente non è più vero, almeno in generale: *in presenza di autovalori multipli con parte reale nulla, l'origine può essere instabile.* Il più semplice esempio è offerto dall'equazione $\ddot{x} = 0$, ovvero

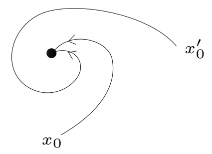
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \ = \ A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \qquad A \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(particella libera). La matrice A ha zero come autovalore doppio e l'origine è instabile: infatti, per ogni $v_0 \neq 0$, la soluzione con dato iniziale $x_0 = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ va all'infinito. Questo esempio indica che il problema della stabilità può essere delicato.

È molto importante osservare che la stabilità asinotica, che è tipica per sistemi dissipativi, è impossibile in sistemi conservativi:

Proposizione 8 *Un'equazione differenziale che ha un integrale primo differenziabile in tutto lo spazio delle fasi e "non banale" (cioè, non costante in nessun aperto) non ha equilibri asintoticamente stabili.*[6]

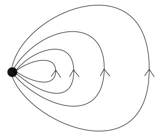
[6] Per la validità di questo risultato è essenziale richiedere che l'integrale primo sia regolare (per esempio, differenziabile, ma basterebbe anche la continuità): l'argomento usato nella dimostrazione perderebbe infatti la sua validità se l'integrale primo fosse discontinuo nel punto di equilibrio.



$f(x_0) = f(x'_0) = f(\overline{x})$

Dimostrazione. Per assurdo. Se un equilibrio $\overline{x}$ fosse asintoticamente stabile allora esisterebbe un intorno V di $\overline{x}$ tale che $x_0 \in V \implies \lim_{t\to+\infty} x_t = \overline{x}$. Ma allora, siccome f è continua e costante sulle soluzioni, si avrebbe $f(x_0) = \lim_{t\to+\infty} f(x_t) = f(\overline{x})$. Dunque f assumerebbe lo stesso valore in tutti i punti di V, contro l'ipotesi. ■

Nel resto di questa sezione forniamo alcuni criteri di stabilità e di instabilità degli equilibri. Ci sono principalmente due approcci possibili: uno utilizza le proprietà spettrali della linearizzazione del campo vettoriale e l'altro utilizza la costruzione di insiemi invarianti per mezzo di opportune funzioni ("funzioni di Lyapunov"). Questi metodi sono chiamati a volte 'primo' e 'secondo' metodo di Lyapunov, rispettivamente. Cominciamo l'analisi dal secondo (perchè lo useremo poi nella dimostrazione del primo). Si dovrebbe tenere presente però che, a parte casi particolari, la determinazione della stabilità o instabilità di un equilibrio di una data equazione differenziale, può essere un problema estremamente difficile—a volte impossibile da risolvere con le tecniche esistenti oggi.



Osservazione: Nella definizione di stabilità asintotica si richiede non solo che tutti i moti che partono vicino ad $\overline{x}$ vi tendano asintoticamente, ma anche che $\overline{x}$ sia stabile. Questo secondo requisito non è sovrabbondante: si possono fare esempi (piuttosto artificiali) di situazioni nelle quali tutte le soluzioni che partono da un intorno di un punto di equilibrio vi tendono asintoticamente, e ciononostante l'equilibrio è instabile: le soluzioni prima si allontanano dall'equilibrio, rendendolo instabile, ma poi ritornano indietro.

B. Il metodo delle funzioni di Lyapunov. L'idea soggiacente il 'secondo' metodo di Lyapunov è facile da spiegare. Se un'equazione differenziale $\dot{x} = X(x)$ ha un integrale primo $\mathcal{W}$, allora i suoi insiemi di sottolivello $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{W}(x) < c\}$ sono insiemi aperti e, come sappiamo, sono invarianti. In generale, questo non implica alcunchè sulla stabilità di un equilibrio. Però, se gli insiemi di sottolivello di $\mathcal{W}$ formano una base di intorni dell'equilibrio, cioè sono limitati e si "stringono" su di esso, allora la loro esistenza ne implica la stabilità (per tutti i tempi). Un istante di riflessione fa sospettare che questo avviene se $\mathcal{W}$ ha o un massimo o un minimo stretto nel punto di equilibrio (ma questo va dimostrato: si veda il Lemma più sotto).

Questo metodo funziona anche se $\mathcal{W}$, invece di essere un integrale primo, è una funzione monotona lungo le soluzioni. Per esempio, se la derivata di Lie $L_X\mathcal{W} \le 0$ allora $\mathcal{W}$ non cresce lungo le soluzioni: dunque, tutte le soluzioni sono ancora intrappolate negli insiemi di sottolivello, ma solo per tempi positivi. Se $\mathcal{W}$ ha un minimo stretto nell'equilibrio, esso è allora stabile (per tempi positivi). Se poi $\mathcal{W}$ è strettamente decrescente lungo le soluzioni, cioè $L_X\mathcal{W} < 0$, allora le soluzioni devono addirittura "scendere" verso il punto di minimo—e si sospetta la stabilità asintotica.

Queste considerazioni, molto elementari, possono essere precisate e rese rigorose:[7]

Proposizione 9 *Sia $\overline{x}$ un equilibrio di $\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, e sia $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile che ha un minimo stretto in $\overline{x}$. Allora*

i. $L_X\mathcal{W}(x) = 0 \quad \forall x \implies$ *$\overline{x}$ è stabile per tutti i tempi.*

ii. $L_X\mathcal{W}(x) \le 0 \quad \forall x \implies$ *$\overline{x}$ è stabile.*

[7] Sarà evidente dalla dimostrazione che per la validità di questa Proposizione basta che la funzione $\mathcal{W}$ sia definita ed abbia le proprietà indicate in un intorno del punto di equilibrio, non in tutto $\mathbb{R}^n$, come assumiamo per semplificare la notazione.

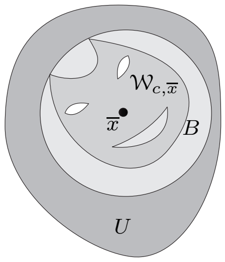
iii. $L_X\mathcal{W}(x) < 0 \quad \forall x \neq \overline{x} \quad \Longrightarrow \quad \overline{x}$ *è asintoticamente stabile.*[8]

Dimostrazione. (i) Come osservato, il cuore della dimostrazione consiste nel dimostrare il fatto piuttosto intuitivo che gli insiemi di sottolivello

$$\mathcal{W}_c := \{x : \mathcal{W}(x) < c\}.$$

formano una base di intorni per $\overline{x}$. Chiaramente, $\mathcal{W}_c$ è un intorno aperto di $\overline{x}$ per ogni $c > \mathcal{W}(\overline{x})$. (Contiene $\overline{x}$ perchè $\mathcal{W}$ ha ivi un minimo stretto ed è aperto perchè preimmagine sotto la funzione continua $\mathcal{W}$ dell'intervallo aperto $(-\infty, \overline{x})$.) Naturalmente potrebbe avvenire che $\mathcal{W}_c$ non sia connesso; in tal caso, consideriamone solo la componente connessa che contiene $\overline{x}$, che denotiamo $\mathcal{W}_{c,\overline{x}}$.

Lemma 2 *Se* $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ha minimo stretto in* $\overline{x}$ *allora per ogni intorno* U *di* $\overline{x}$ *esiste* $c > \mathcal{W}(\overline{x})$ *tale che* $\mathcal{W}_{c,\overline{x}} \subset U$.



Dimostrazione del Lemma. Dato U, prendiamo una palla B centrata in $\overline{x}$ e sufficientemente piccola, in modo che
(a) $B \subset U$.
(b) $\overline{x}$ sia il punto di minimo assoluto di $\mathcal{W}$ nella palla chiusa $\overline{B}$.
L'idea è quella di prendere per c il valore minimo di $\mathcal{W}$ sulla frontiera ∂B di B (questo valore esiste perchè ∂B è compatta). Allora $\mathcal{W}_{c,\overline{x}}$ contiene $\overline{x}$ (per (b) è infatti $c > W(\overline{x})$) e non contiene alcun punto della frontiera di B (per costruzione). Ma allora, essendo connesso, $\mathcal{W}_{c,\overline{x}}$ è contenuto in B (teorema "del passaggio della dogana": avendo un punto interno a B, se ne avesse anche uno esterno dovrebbe intersecarne la frontiera). Dunque è anche contenuto in U. ∎

La dimostrazione della Proposizione è ora immediata:

(i) Dato un intorno U di $\overline{x}$, per il Lemma, esiste c tale che $\mathcal{W}_{c,\overline{x}} \subset U$. Siccome $L_X\mathcal{W} = 0$, $\mathcal{W}_{c,\overline{x}}$ è un intorno di $\overline{x}$ invariante e dunque ogni soluzione che parte da esso vi resta per tutti i tempi. Con riferimento alla definizione di stabilità, basta dunque prendere $U_0 = \mathcal{W}_{c,\overline{x}}$.

(ii) La dimostrazione è identica alla precedente (la sola differenza è che $\mathcal{W}_{c,\overline{x}}$ è adesso invariante solo per tempi positivi).

(iii) Questo è un po' più laborioso. Sia U un intorno di $\overline{x}$ la cui chiusura è contenuta in $\mathbb{R}^n$. Siccome $L_X\mathcal{W}$ si annulla solo in $\overline{x}$, questo punto è l'unico punto di minimo di $\mathcal{W}$ in U. Da ii. segue che $\overline{x}$ è stabile e dunque esiste un intorno V di $\overline{x}$ tale che se $x_0 \in V$ allora $x_t \in U$ per $t > 0$. Mostriamo ora che, di più, ogni soluzione con dato iniziale $x_0 \in V$ tende a $\overline{x}$ per $t \to +\infty$.

Siccome $x_t \in U$ per $t > 0$ e $L_X\mathcal{W} < 0$ in tutto U, la funzione $t \mapsto \mathcal{W}(x_t)$ è strettamente decrescente e dunque ha limite per $t \to +\infty$. Siccome in U la funzione $\mathcal{W}$ ha l'unico punto di minimo $\overline{x}$, tale limite è certamente $\geq \mathcal{W}(\overline{x})$ ed anzi è $= \mathcal{W}(\overline{x})$ se e solo se $x_t \to \overline{x}$. Basta allora mostrare che il limite di $\mathcal{W}(x_t)$ è proprio $\mathcal{W}(\overline{x})$.

Per assurdo: se tale limite fosse un numero $l > \mathcal{W}(\overline{x})$ allora per ogni $t > 0$ la soluzione x_t apparterrebbe a un compatto $K \subset U$ che non contiene $\overline{x}$ (per esempio $K = U \setminus \mathcal{W}_{k,\overline{x}}$ con qualunque k tale che $\mathcal{W}(\overline{x}) < k < l$). Siccome K è

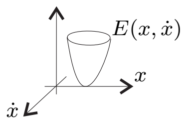
[8] Non si può assumere che $L_X\mathcal{W}$ sia ovunque negativa perchè, come abbiamo già osservato, essa si annulla sempre negli equilibri: se $X(\overline{x}) = 0$ allora $L_X\mathcal{W}(\overline{x}) = X(\overline{x}) \cdot \mathrm{grad}\mathcal{W}(\overline{x}) = 0$.

contenuto in U ed è un compatto, la funzione $L_X\mathcal{W}$ è in esso ovunque negativa e dunque ha massimo assoluto pure negativo: $L_X \le -a$ per qualche $a > 0$. Ma allora $\frac{d}{dt}\mathcal{W}(x_t) \le -a$ per tutti i $t > 0$ e così $\mathcal{W}(x_t) \le \mathcal{W}(x_0) - at$, che tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$. Questo è impossibile, perchè in K è $\mathcal{W} \ge \mathcal{W}(\overline{x}) > -\infty$. ■

Questo teorema gioca un ruolo molto importante nello studio della stabilità degli equilibri e ne vedremo nel seguito alcune applicazioni. Esso è molto potente perchè permette di inferire delle conclusioni sulla stabilità di un equilibrio anche in assenza di ogni informazione sulla dinamica. Ha tuttavia la limitazione che, nello studio di casi particolari, non è chiaro come determinare una *funzione di Lyapunov*, cioè una funzione con le proprietà della proposizione. In sistemi che possiedono integrali primi la scelta ovvia è quella di provare ad usare gli integrali primi, ma non è detto che, anche se il sistema ha un equilibrio stabile, essi abbiano un minimo isolato in esso.

Esempi: Facciamo alcuni semplici esempi, nei quali la stabilità o eventualmente la stabilità asintotica è già nota ed ovvia a priori, ma che sono utili per capire come funziona il metodo.

(i) Consideriamo il sistema meccanico conservativo ad un grado di libertà $m\ddot{x} = -V'(x)$. Sappiamo già, dall'analisi del ritratto in fase dell'equazione, che se V ha un minimo stretto in $\overline{x}$ allora $(\overline{x}, 0)$ è un equilibrio stabile per tutti i tempi. Si può arrivare alla stessa conclusione utilizzando l'energia $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ come funzione di Lyapunov. Siccome $E(x,\dot{x})$ è un integrale primo, basta dimostrare che ha un minimo stretto in $(\overline{x}, 0)$. Questo segue dal fatto che V ha un minimo stretto in $\overline{x}$ e dal fatto che, per ogni x, l'energia cinetica $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ha un minimo stretto in $\dot{x} = 0$: dunque, quando ci si allontana da $(\overline{x}, 0)$ almeno una delle due funzioni cresce e l'altra non decresce.



(ii)* Introduciamo ora dell'attrito viscoso nell'esempio precedente: $m\ddot{x} = -V'(x) - h\dot{x}$. La discussione qualitativa della sezione 1.4 suggerisce che, se V ha un minimo stretto in $\overline{x}$, allora il punto di equilibrio $(\overline{x}, 0)$ nel piano delle fasi è un equilibrio asintoticamente stabile. Cerchiamo di dimostrarlo con una funzione di Lyapunov.

La prima scelta che viene in mente è l'energia $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$. Essa ha un minimo stretto in $(\overline{x}, 0)$ e, indicato con X il campo vettoriale del sistema, ha derivata di Lie

$$L_X E(x,\dot{x}) \;=\; -h\dot{x}^2\,.$$

Dunque $L_X E$ è ovunque ≤ 0 ma è nulla su tutta la retta $\dot{x} = 0$, non solo in $(\overline{x}, 0)$. Questo permette di concludere che c'è stabilità, ma non che c'è stabilità asintotica.

Si può tuttavia ottenere una funzione di Lyapunov per la stabilità asintotica modificando un po' la funzione E. Siccome il problema è che $L_X E$ si annulla su tutta una retta passante per l'equilibrio cerchiamo di aggiungere ad E una funzione $\tilde{E}$ che ha anch'essa un minimo stretto nell'equilibrio e la cui derivata di Lie è ovunque < 0 eccetto che su una *diversa* retta passante per l'equilibrio: la somma $E + \tilde{E}$ avrà allora un minimo stretto nell'equilibrio e derivata di Lie ovunque < 0 eccetto che nell'equilibrio.

Per esempio, cerchiamo di far sì che $L_X\tilde{E}$ si annulli sulla retta $\dot{x} = a(x - \overline{x})$, con un opportuno $a \ne 0$. A questo scopo prendiamo $\tilde{E}(x,\dot{x}) = E(x, \dot{x} + a(x - \overline{x}))$, ovvero

$$\tilde{E}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\,m[\dot{x} + a(x - \overline{x})]^2 + V(x)\,.$$

Si verifica subito che $\tilde{E}$ ha un punto critico isolato in $(\overline{x}, 0)$ e che esso è un minimo. Si ha poi

$$L_X\tilde{E}(x,\dot{x}) \;=\; (ma - h)\,[\dot{x} + a(x - \overline{x})]\,\dot{x} - a\,(x - \overline{x})\,V'(x)\,.$$

Pertanto, se si sceglie $a = h/m$ si trova

$$L_X\tilde{E}(x,\dot{x}) \;=\; -\,\frac{h}{m}\,(x - \overline{x})\,V'(x)\,.$$

Siccome V ha un minimo stretto in $\overline{x}$ si ha $(x-\overline{x})V'(x) > 0$ per tutti gli x in un intorno di $\overline{x}$, eccetto in $\overline{x}$. Dunque

$$L_X\Big[E(x,\dot{x})+\tilde{E}(x,\dot{x})\Big] \;=\; -\frac{h}{m}\Big[m\dot{x}^2+(x-\overline{x})\,V'(x)\Big]$$

è < 0 in tutto un intorno di $(\overline{x},0)$, eccetto il solo $(\overline{x},0)$. Questo prova la stabilità asintotica. Questa procedura è abbastanza complessa: vedremo che il metodo spettrale permette di arrivare alla stessa conclusione in modo molto più semplice—ma solo se il minimo è "quadratico", cioè $V''(0)\neq 0$.

Esercizi 1.5.1 (i) Estendere l'esempio (i) al caso dell'equazione di Newton per un punto nello spazio: $m\ddot{x} \;=\; -\nabla V(x)\,,\quad x\in\mathbb{R}^3$.

(ii) Determinare tutti gli equilibri del sistema in $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x}_1=-2x_2+x_2x_3\,,\quad \dot{x}_2=x_1-x_1x_3\,,\quad \dot{x}_3=x_1x_2\,.$$

Determinare poi le costanti c_1,c_2,c_3, se possibile, in modo che $\mathcal{W}(x) \;=\; \frac{1}{2}\,(c_1x_1^2+c_2x_2^2+c_3x_3^2)$ sia una funzione di Lyapunov per l'origine.

(iii) Si consideri il sistema in $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x}_1=-x_2x_3\,,\quad \dot{x}_2=x_1x_3\,,\quad \dot{x}_3=0$$

per il quale tutti i punti $(0,0,\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, sono equilibri. Provarne la stabilità per mezzo di funzioni di Lyapunov del tipo $\mathcal{W}_\lambda(x)=\frac{1}{2}\,(x_1^2+x_2^2+(x-\lambda)^2)$.

(iv) Sia A una matrice reale 3×3. Usando $\mathcal{W}(x) \;=\; \frac{1}{2}\,\|x\|^2$ come funzione di Lyapunov, mostrare che l'origine è un equilibrio stabile di $\dot{x}=x\times Ax$.

(v) Usando $\mathcal{W}(x)=\frac{1}{2}\,\|x\|^2$ come funzione di Lyapunov, mostrare che l'origine è un equilibrio asintoticamente stabile di $\dot{x}=x\times Ax-kx$ ove A una matrice reale 3×3 e $k>0$.

(vi) Sia $A \;=\; \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Si usi $\mathcal{W}(x) \;=\; \frac{1}{2}\,\|x\|^2$ per mostrare che l'origine è equilibrio

- asintoticamente stabile per $\dot{x}=Ax-\begin{pmatrix}x_1^3+x_1x_2^2\\ x_2^3+x_2x_1^2\end{pmatrix}$
- stabile ma non asintoticamente stabile per $\dot{x}=Ax-\begin{pmatrix}-x_1x_2\\ x_1^2\end{pmatrix}$
- instabile per $\dot{x} \;=\; Ax+\begin{pmatrix}x_1^3+x_1x_2^2\\ x_2^3+x_2x_1^2\end{pmatrix}$ (serve l'Osservazione (ii) della sezione 1.5,D).

(vii) Usando $\mathcal{W}(x)=\frac{1}{2}\,\|x\|^2$, studiare le proprietà di stabilità dell'origine per

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2-x_1x_2^2+x_3^2-x_1^3\\
\dot{x}_2 &= x_1+x_3^3-x_2^3\\
\dot{x}_3 &= -x_1x_3-x_1^2x_3-x_2x_3^2-x_3^5\,.
\end{aligned}$$

Osservazioni: (complementi): (i) * È abbastanza ovvio che funzioni di Lyapunov si possono usare anche per provare l'instabilità di un equilibrio. Per esempio, *se $\mathcal{W}$ ha un minimo isolato in $\overline{x}$ e $L_X\mathcal{W}(x)>0$ per tutti gli $x\in\Omega$, $x\neq\overline{x}$, allora $\overline{x}$ è instabile.* (La dimostrazione di questo fatto non è difficile ed usa un argomento simile a quello usato per dimostrare la stabilità asintotica nella Proposizione 9, ma al contrario: si fa vedere che, a causa della crescita di $\mathcal{W}$ lungo le soluzioni, ogni soluzione con dato iniziale x_0 in un insieme di sottolivello di $\mathcal{W}$ prima o poi lo lascia).

(ii)* L'esistenza di una funzione di Lyapunov è una condizione sufficiente per la stabilità (o stabilità asintotica), ma non è necessaria: si possono fare esempi di sistemi che hanno un equilibrio (asintoticamente) stabile e non possiedono alcuna funzione di Lyapunov.

(iii)* Una questione che può essere interessante, nelle applicazioni, è determinare il "bacino di attrazione" di un equilibrio asintoticamente stabile $\overline{x}$, cioè l'insieme delle condizioni iniziali che producono soluzioni che tendono ad $\overline{x}$. L'esistenza di una funzione di Lyapunov fornisce delle informazioni sul bacino di attrazione. Infatti, se risulta $L_X \mathcal{W}(x) < 0$ in tutti i punti $x \neq \overline{x}$ di un intorno Ω di $\overline{x}$, allora il bacino di attrazione di $\overline{x}$ contiene ogni (componente connessa di un) insieme di sottolivello di $\mathcal{W}$ che è interamente contenuta in Ω. (La dimostrazione di questo fatto si fa con la stessa tecnica usata nella dimostrazione del punto (iii) della Proposizione 9).

C. Il metodo spettrale. L'analisi dello spettro della linearizzazione di un campo vettoriale fornisce informazioni sulla stabilità di un equilibrio che sono in parte complementari a quelle fornite dalle funzioni di Lyapunov. Precisamente, questo metodo permette di provare la stabilità asintotica e l'instabilità, ma non è in grado di provare la stabilità non asintotica (per la quale fornisce però delle condizioni necessarie).

Proposizione 10 *Supponiamo che $\overline{x}$ sia un equilibrio dell'equazione $\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.*
i. Se $\frac{\partial X}{\partial x}(\overline{x})$ ha tutti gli autovalori con parte reale negativa, allora $\overline{x}$ è asintoticamente stabile.
ii. Se $\frac{\partial X}{\partial x}(\overline{x})$ ha un autovalore con parte reale positiva, allora $\overline{x}$ è instabile.

Dimostrazione. (i) Per semplicità, limitiamoci al solo caso in cui la matrice $\frac{\partial X}{\partial x}(\overline{x})$ abbia autovalori tutti distinti. Supponiamo che vi siano r autovalori reali $\alpha_i < 0$ e k coppie di autovalori complessi $\alpha_j \pm i\beta_j$ con parte reale $\alpha_j < 0$. Come visto nella sezione 1.3.D esiste allora una matrice reale invertibile P tale che $A := P^{-1}\frac{\partial X}{\partial x}(\overline{x})P$ ha la forma diagonale a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & B_{r+1} & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & B_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad B_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}.$$

Nelle coordinate $y = P^{-1}(x - \overline{x})$ l'equilibrio $\overline{x}$ diventa l'origine e l'equazione diviene

$$\dot{y} = Ay + r(y)$$

ove il resto $r(y) = P^{-1}(X(x) - \frac{\partial X}{\partial x}(\overline{x}))P$ è piccolo: esistono un raggio $R > 0$ ed una costante $c > 0$ tali che

$$\|r(y)\| \leq c\|y\|^2 \quad \text{se} \quad \|y\| \leq R\,.$$

Per provare la stabilità asintotica dell'origine usiamo $\mathcal{W}(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2$ come funzione di Lyapunov.[9] Questa funzione ha un minimo stretto nell'origine. Calcoliamone allora la derivata di Lie. A questo scopo notiamo preliminarmente che si ha

$$y \cdot Ay = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^2$$

come si vede osservando che il prodotto scalare $y \cdot Ay$ consiste della somma degli r termini $\alpha_j y_j^2$ e di k termini del tipo

$$\begin{pmatrix} y_j \\ y_j' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_j \\ y_j' \end{pmatrix} = \alpha_j (y_j^2 + {y_j'}^2)\,.$$

[9] $\mathcal{W}$ sarà una funzione di Lyapunov in una palla centrata nell'origine, non in tutto $\mathbb{R}^n$, come richiesto nella Proposizione 9. Come si è già osservato, però, questo è sufficiente per la validità della Proposizione 9.

Allora, osservando che $-\Lambda := \max \alpha_j < 0$, si ha

$$\begin{aligned} L_{Ay+r(y)}\mathcal{W}(y) &= y \cdot (Ay + r(y)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^2 + y \cdot r(y) \\ &\leq \max \alpha_j \, \|y\|^2 + \|y\| \, \|r(y)\| \\ &\leq (-\Lambda + c\|y\|)\|y\|^2 \end{aligned}$$

che è < 0 in tutta una palla centrata nell'origine, esclusa l'origine stessa. (Basta prendere $\|y\| < \min(\Lambda/c, R)$). Per la Proposizione (9), l'origine è dunque asintoticamente stabile.

(ii) La dimostrazione dell'instabilità, nel caso ci sia un autovalore λ con parte reale positiva, è molto più difficile, e la tralasciamo. L'idea è naturalmente quella di dimostrare che le soluzioni con dati iniziali vicini all'autospazio relativo a λ restano vicine alle corrispondenti soluzioni del sistema linearizzato, che si allontanano dall'equilibrio. Tuttavia, questo è molto laborioso. ■

Esempio: Per vedere come funziona il metodo spettrale, consideriamo ancora l'equazione $\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sulla (in)stabilità degli equilibri della quale sappiamo già tutto. Assumiamo che V abbia un punto critico in $\overline{x}$, cosicché $\overline{x}$ è una configurazione di equilibrio. Per applicare il metodo spettrale dobbiamo linearizzare l'equazione, pensandola come un'equazione del primo ordine:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -V'(x) \end{pmatrix} .$$

Siccome $V'(x) = V''(\overline{x})(x - \overline{x}) + \ldots$, la linearizzazione attorno a $(\overline{x}, 0)$ è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x - \overline{x} \\ v \end{pmatrix} , \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(\overline{x}) & 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice A ha autovalori $\pm\sqrt{-V''(\overline{x})}$. Se $V''(\overline{x})$ è positivo, nel qual caso V ha un minimo stretto in $\overline{x}$, i du eautovalori sono immaginari e il metodo spettrale non permette di concludere nulla. Se invece $V''(\overline{x})$ è negativo, nel qual caso V ha un massimo stretto in $\overline{x}$, allora i due autovalori sono reali ed uno di essi è positivo, cosicché l'equilibrio è instabile. Questa situazione è tipica: siccome il sistema è conservativo, e non può dunque avere equilibri asintoticamente stabili, il metodo spettrale può solo provare l'instabilità degli equilibri.

Il metodo spettrale è molto potente. Esso indica che, *sotto certe ipotesi* (tutti gli autovalori hanno parte reale < 0 oppure almeno un autovalore ha parte reale > 0) le proprietà di stabilità di un equilibrio di un'equazione differenziale sono le stesse di quelle della sua linearizzazione: i termini nonlineari dell'equazione sono ininfluenti.

Tuttavia, bisogna tenere ben presente che questo *non è vero se queste ipotesi non sono verificate.* Precisamente, se gli autovalori della linearizzazione di un'equazione differenziale hanno tutti parte reale ≤ 0 ed almeno uno di essi ha parte reale $= 0$ allora, nonostante il fatto che l'equilibrio sia stabile per la linearizzazione, nulla si può dire sulla stabilità dell'equilibrio dell'equazione: a seconda dei termini non lineari dell'equazione, esso può essere stabile o instabile.

A causa di questo, *nel caso dei sistemi meccanici conservativi*, nei quali la stabilità asintotica è impossibile a causa della proposizione 8 e che costituiscono gran parte di questo corso, il metodo spettrale fornisce

- una condizione sufficiente per la instabilità (se vi è un autovalore con parte reale positiva)

- una condizione *necessaria* per la stabilità (se nessun autovalore ha parte reale positiva).

(Questo fatto è stato chiarito da Lyapunov. Tuttavia, fino a tempi anche recenti, c'è stata molta confusione. In parecchi testi non recentissimi, per esempio, si da per scontato che il fatto che tutti gli autovalori della linearizzazione abbiano parte reale ≤ 0 implichi la stabilità.)

Esercizi 1.5.2 (i) Studiare con il metodo spettrale la (in)stabilità degli equilibri dei sistemi dell'esercizio *1.5.1.vii.*

(ii) Come nell'esempio, si consideri l'equazione $\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e si assuma che V abbia un massimo stretto in $\overline{x}$, ma adesso con derivata seconda nulla. L'equilibrio è instabile? Si può arrivare a questa conclusione con il metodo spettrale?

(iii) Si assuma che V abbia un punto critico in $\overline{x}$. Cosa si può concludere, e sotto quali condizioni, sulla (in)stabilità di $(\overline{x}, 0)$ per l'equazione $m\ddot{x} = -V'(x) - 2h\dot{x}$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$?

1.6 Coniugazione di flussi

Uno strumento per certi aspetti molto potente nello studio di un'equazione differenziale è la possibilità di fare cambiamenti di coordinate. Può infatti avvenire che certe proprietà delle soluzioni, per esempio dovute a simmetrie dell'equazione, siano evidenti in certi sistemi di coordinate, nascoste in altre. Per questo motivo bisogna sapere come trasformare un'equazione differenziale, ovvero un campo vettoriale, sotto un cambio di coordinate.

Affrontiamo questo argomento nel modo più veloce possibile, formalizzandolo però in un modo che ne metta in evidenza gli aspetti geometrici – necessari nel seguito – e cercando anche di fare qualche esempio di tipo più concettuale, che mostri l'estrema flessibilità che si ha nella scelta delle coordinate.

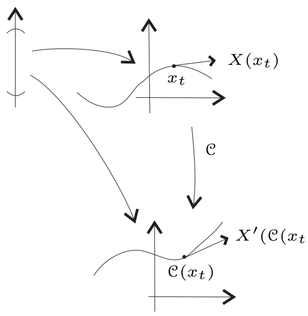
A. Coniugazione di campi vettoriali. Ricordiamo che se U è un aperto in $\mathbb{R}^n$, un *cambiamento di coordinate in* U è un diffeomorfismo

$$\mathcal{C} \,:\, U \,\to\, U' \,, \qquad x \mapsto x' = \mathcal{C}(x) \,,$$

ove U' è un altro aperto di $\mathbb{R}^n$. Dunque, $\mathcal{C}$ è biunivoca ed ha la proprietà che la sua matrice Jacobiana è ovunque invertibile:

$$\det\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x)\right) \neq 0 \qquad \forall x \in U \,.$$

(Ai fini della nostra trattazione si potrebbe per semplicità anche assumere $U = U' = \mathbb{R}^n$, ma è utile usare simboli diversi per distinguere lo spazio di partenza da quello d'arrivo.) Per maggior chiarezza, nel seguito parliamo di diffeomorfismi invece che di cambi di coordinate.



Dato un campo vettoriale X in U, vogliamo determinare il campo vettoriale X' in U' che ha la seguente proprietà: le soluzioni di $\dot{x}' = X'(x')$ sono le immagini sotto $\mathcal{C}$ delle soluzioni di $\dot{x} = X(x)$. Precisamente, vogliamo che

$$\frac{dx_t}{dt} = X(x_t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\mathcal{C}(x_t) = X'(\mathcal{C}(x_t))\,. \tag{1.6.1}$$

Diciamo allora che X' è *coniugato a* X *da* $\mathcal{C}$.

Proposizione 11 *Il campo vettoriale X' coniugato ad X da $\mathcal{C}$ è*

$$X' \;=\; \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\, X\right) \circ \mathcal{C}^{-1} \tag{1.6.2}$$

Dimostrazione. Sia $x(t)$ una soluzione di $\dot{x} = X(x)$. Derivando rispetto al tempo la i-ma componente di $\mathcal{C}(x(t))$ troviamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{C}_i(x(t)) \;&=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial x_j}(x(t))\, \frac{dx_j}{dt}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial x_j}(x(t))\, X_j(x(t)) \\
&=\; \Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial x_j}\, X_j\Big](x(t)) \;=\; \Big[\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\, X\Big]_i (x(t)) \\
&=\; \left(\Big[\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\, X\Big]_i \circ \mathcal{C}^{-1}\right) (\mathcal{C}(x(t)))\,.
\end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{C}(x(t))$ è soluzione di $\dot{x}' = X'(x')$ con X' definito dalla (1.6.2). ■

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mathcal{C}"] \arrow[d, "X"'] & U' \arrow[d, "X'"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Nella (1.6.2) la composizione con $\mathcal{C}^{-1}$ serve affinchè la matrice Jacobiana $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}$ ed il campo vettoriale X siano calcolati nel posto giusto, cioè in $\mathcal{C}^{-1}(x') \in U$, non in $x' \in U'$, si veda la figura. Il valore di X' in un punto x' è così $X'(x') = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x)\, X(x)$ con $x = \mathcal{C}^{-1}(x')$.

L'espressione (1.6.2) è comoda soprattutto nelle questioni teoriche. Nel fare i cambiamenti di coordinate in esempi specifici può risultare più agevole calcolare X' ripetendo il calcolo fatto nella dimostrazione della Proposizione (11), scrivendo cioè il cambio di coordinate (o il suo inverso) e derivandolo lungo una soluzione, senza quindi calcolare esplicitamente la matrice Jaobiana.

Esempi: (i) Consideriamo l'equazione $\dot{x} = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ed il cambiamento di coordinate $y(x) = x^3$ in $\mathbb{R}_+$ (o in $\mathbb{R}_-$). Immaginiamo che x_t sia una soluzione dell'equazione e deriviamo $y(x_t)$ rispetto al tempo (senza indicare gli argomenti): $\dot{y} = 3x^2\dot{x} = 3x^2x^2 = 3x^4 = 3y^{4/3}$. Dunque, nelle coordinate y, l'equazione diviene $\dot{y} = 3y^{4/3}$.

(ii) Consideriamo l'equazione in $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x}_1 = x_1\,, \qquad \dot{x}_2 \;=\; x_2$$

e la mappa $x' = \mathcal{C}(x)$ data da $x_1' = 2x_1$, $x_2' = x_1x_2$, che è un diffeomorfismo di $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\, x_1 \neq 0\}$ in sè stesso (verificarlo). Derivando si trova $\dot{x}_1' = 2\dot{x}_1 = 2x_1 = x_1'$ e $\dot{x}_2' = \dot{x}_1x_2 + x_1\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_1x_2 = 2x_1x_2 = 2x_2'$. Dunque, nelle nuove coordinate, l'equazione è

$$\dot{x}_1' = x_1'\,, \qquad \dot{x}_2' = 2x_2'\,.$$

Per confronto, trasformiamo il campo vettoriale $X(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ con la (1.6.2):

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x)\, X(x) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_1' \\ 2x_2' \end{pmatrix}\,.$$

Esercizi 1.6.1 (i) Cosa diventa l'equazione lineare $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, nelle coordinate $y = Px$, ove P è una matrice invertibile?

(ii) Cosa diventa l'equazione $\dot{x} = x$, $x \in \mathbb{R}$, nelle coordinate $y(x) = x^3/3$?

(iii) È possibile trovare un cambio di coordinate globale in $\mathbb{R}$ che trasforma $\dot{x} = x^2$ in $\dot{y} = y$?

(iv)* Mostrare che X ed X' sono coniugati se e solo se i loro flussi Φ^X e $\Phi^{X'}$ soddisfano

$$\Phi_t^{X'} \;=\; \mathcal{C} \circ \Phi_t^X \circ \mathcal{C}^{-1}\,.$$

Dedurre poi la (1.6.2) derivando rispetto al tempo i due membri di questa equazione.

(v)* Mostrare che se $\mathcal{C}$ coniuga X ad X' allora $\mathcal{C}^{-1}$ coniuga X' ad X. [Suggerimento: usare il fatto che $\mathcal{C}$ è un diffeomorfismo.]

Osservazione: Push–forward e pull–back. La (1.6.2) può essere riguardata come la legge di trasformazione di un campo vettoriale sotto un diffeomorfismo. Si noti l'analogia con la trasformazione di una funzione. Un diffeomorfismo $\mathcal{C} : U \to U'$ "coniuga" ogni funzione $f : U \to \mathbb{R}$ ad una funzione $f' : U' \to \mathbb{R}$ data da

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\mathcal{C}"] \arrow[dr, "f"'] & & U' \arrow[dl, "f'"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

$$f' \;=\; f \circ \mathcal{C}^{-1}\,.$$

La funzione f' è chiamata il *push–forward* di f perchè è ottenuta "spingendo avanti" f e si indica a volte con $\mathcal{C}_* f$:

$$\mathcal{C}_* f \;=\; f \circ \mathcal{C}^{-1}\,.$$

Similmente, il diffeomorfismo $\mathcal{C}$ "spinge avanti" campi vettoriali su U in campi vettoriali su U' e questa azione si chiama anch'essa *push–forward* e si indica con il simbolo $\mathcal{C}_*$. Dunque,

$$\mathcal{C}_* X \;=\; \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} X\right) \circ \mathcal{C}^{-1}\,. \tag{1.6.3}$$

Un diffeomorfismo può anche essere usato per "tirare indietro" funzioni e campi vettoriali sullo spazio di arrivo. Il *pull–back* sotto $\mathcal{C} : U \to U'$ di una funzione $f' : U' \to \mathbb{R}$ e di un campo vettoriale X' su U' sono definiti come

$$\mathcal{C}^* f' \;:=\; f' \circ \mathcal{C}\,, \qquad \mathcal{C}^* X \;=\; \left(\frac{\partial \mathcal{C}^{-1}}{\partial x'} X'\right) \circ \mathcal{C}\,.$$

Ovviamente $\mathcal{C}^*\mathcal{C}_* f = f$. Per esercizio, mostrare che $\mathcal{C}^*\mathcal{C}_* X = X$.

B. "Sollevamento" di diffeomorfismi. Consideriamo adesso un'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} \;=\; Y(x, \dot{x})$$

e riguardiamola, al solito, come un sistema del primo ordine: $\dot{x} = v$, $\dot{v} = Y(x, v)$. Supponiamo di fare un cambiamento di coordinate $x \mapsto \mathcal{C}(x)$ nello spazio delle configurazioni. Per poter dire come si trasforma l'equazione, o il sistema del primo ordine, abbiamo bisogno di specificare come si trasformano le coordinate v. Dobbiamo cioè "estendere" $x \mapsto \mathcal{C}(x)$ ad un diffeomorfismo $(x, v) \mapsto \big(\mathcal{C}(x), \mathcal{D}(x, v)\big)$ dello spazio delle fasi. Come? Questa domanda non ha una risposta unica: l'estensione si può fare in infiniti modi diversi. Tuttavia, vi è un unico modo di fare l'estensione in modo da preservare il fatto che la seconda metà delle coordinate rappresentino le velocità delle prime.

Cerchiamo infatti di determinare $\mathcal{D}$ in modo che, data una qualunque curva $t \mapsto x_t$, $\mathcal{D}(x_t, \dot{x}_t)$ sia uguale a $\frac{d}{dt}\mathcal{C}(x_t)$. Siccome $\frac{d}{dt}\mathcal{C}(x_t) = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x_t)\,\dot{x}_t$, si conclude che deve essere $\mathcal{D}(x, v) = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x) v$ e dunque l'estensione di $x \mapsto \mathcal{C}(x)$ cercata è

$$(x, v) \;\mapsto\; \left(\mathcal{C}(x), \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x) v\right).$$

Questa mappa si chiama il "sollevamento" alle velocità di $x \mapsto \mathcal{C}(x)$.

Esercizi 1.6.2 (i) Mostrare che il sollevamento di un diffeomorfismo dello spazio delle configurazioni coniuga un sistema del secondo ordine ad un sistema del secondo ordine.

(ii) Scrivere l'equazione $\ddot{x} = (1+2\dot{x}^2)\tan x$ usando la coordinata $y(x) = \tan x$. [Suggerimento: calcolare $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ in termini di $y, \dot{y}, \ddot{y}$]

(iii) Il problema di Kepler nel piano è descritto dalle equazioni

$$\ddot{x} = -k\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,, \qquad \ddot{y} = -k\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

ove k è una costante positiva. Mostrare che in coordinate polari (r,φ) queste equazioni diventanto

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \;=\; -\frac{k}{r^2}\,, \qquad m(\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \;=\; 0\,.$$

[Suggerimento: derivare $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).]

C. Cambi di coordinate dipendenti dal tempo. Anche se solo occasionalmente, nel seguito considereremo a volte dei cambi di coordinate dipendenti dal tempo. Con questo, intendiamo una mappa

$$\mathcal{C} : U \times \mathbb{R} \to U'\,, \qquad (x,t) \mapsto \mathcal{C}(x,t)\,,$$

ove U ed U' sono aperti in $\mathbb{R}^n$, che dipende differenziabilmente da t e, per ogni t fissato, è un diffeomorfismo di U in U'. Denoteremo spesso con $\mathcal{C}_t$ la mappa a t fissato:

$$\mathcal{C}_t(x) \;=\; \mathcal{C}(x,t)\,.$$

In questo contesto è naturale considerare campi vettoriali $X(x,t)$ dipendenti dal tempo. (Se anche X non dipende da t, il suo trasformato vi dipenderà!).

Come nel caso indipendente dal tempo, diciamo che $\mathcal{C}$ coniuga X ad X' se $\mathcal{C}$ trasforma soluzioni di X in soluzioni di X': cioè, una curva $t \mapsto x(t)$ è soluzione di $\dot{x} = X(x,t)$ se e solo se la curva $x'(t) := \mathcal{C}(x(t),t)$ è soluzione di $\dot{x}' = X'(x',t)$. Un semplice calcolo, lasciato come esercizio, porta a

$$X' \;=\; \Big[(\mathcal{C}_t)_* X + \frac{\partial \mathcal{C}_t}{\partial t}\Big] \circ \mathcal{C}_t^{-1}\,. \tag{1.6.4}$$

(Il termine aggiuntivo al push–forward dà conto del fatto che la velocità di un punto x' dipende adesso anche dalla velocità con cui $\mathcal{C}$ lo muove: se $X=0$ e $\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial t} \neq 0$ allora necessariamente $X' \neq 0$ nonostante sia $(\mathcal{C}_t)_* X = 0$).

Esercizi 1.6.3 (i) Dedurre la (1.6.4).

(ii) Qual è il sollevamento alle velocità di un diffeomorfismo dipendente dal tempo?

D. Coordinate "tempo–energia". Il teorema di rettificabilità locale. Consideriamo ora alcuni esempi un po' concettuali, nei quali si usa un sistema di coordinate a prima vista strano, ma in realtà estremamente ben adattato alla descrizione del sistema.

Esempi: (i) Come sappiamo, tutte le soluzioni dell'oscillatore armonico $\ddot{x} = -x$, eccetto quella d'equilibrio, sono periodiche con periodo 2π. Più precisamente, il flusso dell'equazione consiste di una rotazione uniforme con velocità angolare unitaria in verso orario. Dunque, in coordinate polari (ρ,φ) nel piano (x,v), il raggio ρ sta costante e l'angolo φ retrocede (perchè il verso è orario) con velocità costante. Dunque, in coordinate polari, il sistema $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -x$ diventa

$$\dot{\rho} \;=\; 0\,, \qquad \dot{\varphi} \;=\; -1\,.$$

Verificarlo.

(ii) Se invece dell'angolo ϕ usiamo l'angolo $\tau = -\phi$, allora l'equazione dell'oscillatore diviene

$$\dot{\rho} = 0 \,, \qquad \dot{\tau} = 1$$

ed ha le soluzioni

$$\rho(t;\rho_0,\tau_0) = \rho_0 \,, \qquad \tau(t;\rho_0,\tau_0) = \tau_0 + t \,.$$

Dunque, τ cresce con velocità unitaria lungo le soluzioni—proprio come il tempo. Di fatto, la coordinata τ di un punto (x,v) del piano è esattamente il *tempo* necessario a raggiungere il punto (x,v) lungo una soluzione dell'equazione, partendo da un punto sull'asse x.

(iii) Se $\omega \neq 1$, le soluzioni dell'oscillatore armonico $\ddot{x} = -\omega^2 x$ hanno periodo $2\pi/\omega$ ma le orbite, ellittiche, non sono percorse con velocità angolare costante. È però ancora possibile trovare delle coordinate simili a quelle polari, nelle quali l'equazione diventa

$$\dot{\sigma} = 0 \,, \qquad \dot{\tau} = \omega \,.$$

Basta definire σ, τ attraverso le

$$x = \sigma \sin\tau \,, \qquad v = \sigma\,\omega\,\cos\tau$$

ovvero $\rho = x^2 + v^2/\omega^2$, $\tau = \arctan(\omega x/v)$. Verificarlo.

Generalizzando questi esempi, arriviamo al "teorema di rettificazione. Questo teorema è sostanzialmente una riformulazione dei teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai parametri che fa riferimento all'esistenza di coordinate (locali) adattate alle soluzioni di un'equazione differenziale. Nonostante non aggiunga nulla di davvero nuovo ai risultati già visti, esso introduce un punto di vista un po' diverso, complementare, che getta un po' di luce su alcuni concetti.

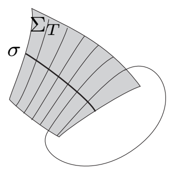
Proposizione 12 *Sia $\overline{x}$ un punto nel quale $X(\overline{x}) \neq 0$. Allora esiste un intorno di $\overline{x}$ munito di coordinate $y = (y_1,\ldots,y_n)$ nelle quali l'equazione differenziale $\dot{x} = X(x)$ si scrive*

$$\dot{y}_1 = 0 \,, \quad \ldots\ldots \,, \quad \dot{y}_{n-1} = 0 \,, \quad \dot{y}_n = 1 \tag{1.6.5}$$

e dunque il suo flusso è dato da

$$\Big(y_1\,,\ldots\ldots, y_{n-1}, y_n\Big) \;\mapsto \Big(y_1\,,\ldots\ldots, y_{n-1}, y_n + t\Big) \,.$$

Dimostrazione. Ci limitiamo ad indicare le idee della dimostrazione. Siccome $X(\overline{x}) \neq 0$, esiste un intorno sufficientemente piccolo di $\overline{x}$ nel quale il campo vettoriale X è ovunque diverso da zero. Esiste allora una piccola ipersuperficie σ di dimensione $n-1$ che passa per $\overline{x}$ ed è in ogni suo punto x "trasversale" ad $X(x)$ (cioè X non è tangente a σ in alcun punto). Questo significa che la componente di X normale a σ è ovunque diversa da zero, cosicché X punta ovunque verso lo stesso lato di σ. Dunque, σ interseca trasversalmente le orbite di $\dot{x} = X(x)$ e anzi ogni soluzione la attraversa nello stesso verso. Per questo motivo, σ si chiama una *sezione* del flusso.



Naturalmente può succedere che un'orbita intersechi σ in più di un punto, perchè fa un giro e ripassa per σ dopo un certo tempo (positivo o negativo). Restringendo σ se necessario, possiamo fare in modo che questo non avvenga per tempi t di valore assoluto minore di un certo $T > 0$. Consideriamo allora l'insieme

$$\Sigma_T \;:=\; \cup_{|t|<T} \Phi_t^X(\sigma)$$

ottenuto trasportando tutti i punti della sezione σ lungo le loro orbite, per tempi $-T < t < T$. Questo insieme è un intorno di $\overline{x}$ (perchè?) e consiste di un certo numero di tratti connessi di orbite, chiamiamoli "spezzoni", ciascuno dei quali interseca σ una sola volta. Allora, ciascun punto di Σ_T è univocamente determinato

- dallo spezzone dell'orbita al quale esso appartiene, e
- dalla sua posizione su tale spezzone di orbita.

L'idea dunque è di usare come coordinate

- un qualunque sistema di coordinate $y_1, \ldots, y_{n-1}$ su σ, che individua gli spezzoni di orbita, e
- un'opportuna coordinata y_n su ciascuno spezzone di orbita.

Siccome le soluzioni dell'equazione differenziale si muovono lungo le orbite, le coordinate $y_1, \ldots, y_{n-1}$ restano costanti e dunque soddisfano (1.6.5). Per ottenere un sistema di coordinate in Σ_T ci basta poi aggiungere una coordinata curvilinea sugli spezzoni di orbita (scegliendola in modo che varii differenziabilmente da spezzone a spezzone). Si capisce che si può anche fare in modo che quest'ultima coordinata avanzi con velocità unitaria lungo le soluzioni, come richiesto dalla (1.6.5): basta infatti usare come coordinata lungo ogni spezzone di orbita il *tempo* necessario ad andare, seguendo la soluzione, dal punto di intersezione con σ al punto in questione. Infatti, su ciascuno spezzone di orbita, questo tempo è in corrispondenza biunivoca con i punti—ed ovviamente avanza con velocità unitaria.

Per rendere l'argomento rigoroso bisognerebbe dimostrare che la trasformazione dalle coordinate originali x alle y descritte qui è, oltre che biunivoca, anche un diffeomorfismo: è cioè differenziabile ed ha inversa differenziabile. Si capisce che in questo giuoca un ruolo essenziale il teorema di dipendenza differenziabile dai dati iniziali. ■

La dimostrazione del teorema meette bene in evidenza il fatto che le coordinate "rettificanti" y sono definite solo localmente: innanzittuto, potrebbe essere impossibile prendere una sezione σ grande perchè nel far questo si può perdere la condizione di trasversalità con X. Inoltre, se un'orbita riattraversa la sezione, si perde la biunivocità e dunque il tempo T, ovvero la "lunghezza" dell'intorno, non può essere mandata all'infinito. In altre parole, queste coordinate sono intrinsecamente locali. E si noti che, più ci si avvicina ad un equilibrio, più si deve restringerne il dominio: perchè su un equilibrio, il 'tempo' non si può certo usare come coordinata.

Esercizio: Costruire delle coordinate rettificanti per l'oscillatore armonico

$$\ddot{x} = -\omega^2 x\,, \qquad = \sqrt{k/m}\,.$$

Discuterne il dominio. [Suggerimento: si veda l'Esempio (iii) più sopra].

Osservazione: Una conseguenza del teorema di rettificazione è che localmente, in un intorno di ogni punto che non sia un equilibrio, ogni equazione differenziale in $\mathbb{R}^n$ possiede $n = 1$ integrali primi indipendenti: le coordinate $y_1, \ldots, y_n$ che determinano l'orbita sono, banalmente, costanti lungo di esse. Dunque, l'esistenza di integrali primi *locali* non fornisce alcuna informazione: essi esistono sempre, eccetto possibilmente vicino ai punti di equilibrio. L'esistenza di integrali primi è significaiva solo se essi sono in qualche senso *globali*, definiti cioè, se non in tutto lo spazio delle fasi, almeno in un suo sottoinsieme "grande" (se si riflette un po', si capisce che la cosa importante è che questo insieme sia invariante, in modo da contenere intere orbite.).

1.7 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi

Esercizi *1.1.1* (ii) Suggerimento: mostrare che l'equazione dell'orbita è $x = \text{cost} + v^2/(2g)$.

(iv) Nulla.

(v) In $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$: tutte le velocità sono sempre possibili.

Esercizi *1.1.2* (i) I punti del nucleo della matrice A. Se A è invertibile, la sola origine $x = 0$.

(ii) $(0,0)$, $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$.

(iii) a: $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$. b: $(0,0,\lambda)$ per tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(0,\lambda,1)$ per tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ (gli equilibri non sono isolati, ma formano due rette che si intersecano). c: $(0,0,0)$ e $(-1,\lambda,1)$ per tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) Tutti i punti $(0,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(v) Tutti gli $x \in \mathbb{R}^3$ ortogonali ad a.

(vi) (a) $x = 1$; (b) $x = 0$; (c) $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$; (d) $x = 0, -1, 1$.

(viii) Suggerimento per 2.: bisogna innanzittutto mostrare che, se una soluzione x_t tende ad un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ per $t \to \pm\infty$ allora $\overline{x}$ è necessariamente un equilibrio. Questo poi implica che nessuna soluzione può avere limite diverso da zero o da $\pm\infty$.

Esercizi *1.1.3* (i) La matrice Jacobiana del campo vettoriale nel punto (x, y) è $\begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}$. Dunque la linearizzazione attorno a $(0, 0)$ è $\dot{x} = \alpha x$, $\dot{y} = -\gamma y$ e quella attorno ad $(\alpha/\beta, \gamma/\delta)$ è $\dot{x} = (\alpha - \beta\gamma/\delta)x - \alpha y$, $\dot{y} = \gamma x + (\alpha\delta/\beta - \gamma)y$.

(ii) $\ddot{x} = -x - \dot{x}$ attorno a $(0, 0)$ e $\ddot{x} = x - \dot{x}$ attorno a $(\pi, 0)$.

(iii) (a) $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = 0$ attorno a $(0, 0)$; $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = 2x$ attorno a $(1, -1)$; $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = -2x$ attorno a $(-1, 1)$. (b) $\dot{x} = (\lambda - 1)y$, $\dot{y} = x$, $\dot{z} = x$ attorno a $(0, 0, \lambda)$; $\dot{x} = \lambda z$, $\dot{y} = (1 - \lambda)x$, $\dot{z} = x$ attorno a $(0, \lambda, 1)$.

Esercizi *1.1.4* (i) Suggerimento: L'orbita è diffeomorfa ad un cerchio. Siccome essa non contiene punti di equilibrio, le soluzioni su di essa avanzano in modo monotono. Tutte le soluzioni fanno un giro completo sull'orbita e ritornano al loro punto iniziale. (Se no, dovrebbero avere un punto limite ed allora, come nell'esercizio *1.1.2*.viii, esso sarebbe un equilibrio.) Una volta tornata al punto di partenza, la soluzione ripercorre l'orbita con la stessa legge oraria del giro precedente (invarianza per traslazioni temporali).

Esercizi *1.1.5* (i) (a) $x'_t - x_t = e^{kt}(x'_0 - x_0)$; la separazione cresce esponenzialmente in fretta (per t positivi se $k > 0$, negativi se $k < 0$). (b) Cresce linearmente: $x'_t - x_t = (x'_0 - x_0) + (v'_0 - v_0)t$.

(ii) Denotando $(x^\pm_t, v^\pm_t)$ le due soluzioni, si trova $x^+_t - x^-_t = \frac{\epsilon}{2\omega}(e^{\omega t} - \epsilon^{-\omega t})$ e $v^+_t - v^-_t = \frac{\epsilon}{2}(e^{\omega t} - \epsilon^{-\omega t})$. Per quanto ϵ sia piccolo, dopo un tempo abbastanza lungo le due soluzioni hanno comportamenti completamente diversi: $x^+_t \to +\infty$ e $x^-_t \to -\infty$ per $t \to +\infty$.

Esercizi *1.1.6* (i) $\begin{pmatrix} \cosh \omega t & \frac{1}{\omega}\sinh \omega t \\ \frac{1}{\omega}\sinh \omega t & \cosh \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

(ii) $\Phi^X_t(x_0) = 1 + e^{-t}(x_0 + 1)$.

Esercizi *1.1.7* (ii) $x(t; x_0, t_0) = t^2 - t_0^2 + x_0$.

Esercizi *1.2.1* (i) Ovunque eccetto che nell'origine, che infatti è un insieme di livello singolare (un punto, non una curva).

(ii) È violata nell'origine; l'insieme di livello dell'energia che passa per l'origine ha la forma di un otto: a causa dell'autointersezione non è una sottovarietà.

(iii) Gli insiemi di livello degli integrali primi hanno dimensione zero, cioè sono punti. Dunque le orbite sono punti. Dunque tutti i punti sono equilibri. Dunque $X = 0$.

Esercizi *1.2.2* (ii) $c_1 = -2c_2$.

(iii) Dalla (1.2.2) segue che, lungo ogni soluzione $t \mapsto x_t$, la mappa $t \mapsto f(x_t)$ è non crescente e dunque dovrà sempre essere $f(x_t) \le (x_0)$ per $t > 0$.

(vi) No: l'orbita dovrebbe avere una cuspide e non sarebbe dunque una curva differenziabile.

Esercizi *1.3.1* (ii) $\exp(tA)u = \sum_k \frac{t^k}{k!}A^k u = \sum_k \frac{t^k}{k!}\lambda^k u = \exp(t\lambda)u$.

(v) Se A e B commutano, allora vale la formula binomiale di Newton. Dunque $\exp(A + B) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(A + B)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!}A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{n!m!}A^n B^m = \exp(A)\exp(B)$.

(vi) Basta calcolare $\exp(P^{-1}AP = \sum_k \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k$ osservando che $(P^{-1}AP)^k =$

$(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$. Si trova $\exp(P^{-1}AP) = \sum_k \frac{1}{k!}P^{-1}A^kP = P^{-1}\Big(\sum_k \frac{1}{k!}A^k\Big)P = P^{-1}\exp(A)P$.

(vii) $\|Bx\| = \sqrt{\sum_i |(Bx)_i|^2} \le \sum_i |(Bx)_i| \le \sum_{ij}|B_{ij}x_j| \le n^2(\max|B_{ij}|)\,(\max_i|x_i|) \le n^2(\max|B_{ij}|)\,\|x\|$. Dunque $\|B\|_o \le n^2(\max|B_{ij}|) < \infty$.

Esercizi *1.3.2* (i) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e, per assurdo, $u \in \mathbb{R}^2$ allora $Au \in \mathbb{R}^2$ ma $\lambda u \in \mathbb{C}$.

(iii) Siccome $u_1,\dots,u_n$ sono linearmente indipendenti, la matrice $P = [u_1,\dots,u_n]$ è invertibile. Se e_j denota il j–mo vettore della base canonica di $\mathbb{K}$ (tutte le componenti nulle eccetto la j–ma, $= 1$) allora Pe_j è la j–ma colonna di P, cioè u_j. Dunque $P^{-1}APe_j = P^{-1}Au_j = \lambda_j P^{-1}u_j = \lambda_j e_j$, cioè la j–ma colonna di $P^{-1}AP$ è $\lambda_j e_j$. Viceversa, se P è invertibile e $P^{-1}AP$ è diagonale allora le sue colonne sono linearmente indipendenti e sono autovettori di A.

(v) La dimostrazione si fa per induzione, mostrando che, per ogni $k = 1,\dots,n$, i primi k autovettori sono linearmente indipendenti. Questo è vero per $k = 1$ perchè $u_1 \ne 0$. Mostriamo allora che $u_1,\dots,u_k$ sono linearmente indipendenti allora lo sono anche $u_1,\dots,u_{k+1}$. Per assurdo, supponiamo che $u_1,\dots,u_k$ siano linearmente indipendenti ma che $u_1,\dots,u_{k+1}$ non lo siano. Se così fosse, u_{k+1} sarebbe una combinazione lineare di $u_1,\dots,u_k$: $u_{k+1} = \sum_{j=1}^k c_j u_j$. Ma allora $0 = A(u_{k+1} - \sum_{j=1}^k c_j u_j) = \lambda_{k+1}u_{k+1} - \sum_{j=1}^k c_j\lambda_j u_j = \lambda_{k+1}\sum_{j=1}^k c_j u_j - \sum_{j=1}^k c_j\lambda_j u_j) = \sum_{j=1}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_j)c_j u_j$. Siccome gli atutovalori sono tutti distinti e $u_1,\dots,u_k$ sono linearmente indipendenti questo implicherebbe $c_1 = \ldots = c_k = 0$; dunque $u_{k+1} = 0$, che è falso.]

Esercizi *1.3.3* (i) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda\,\mathrm{tr}\,A + \det A = 0$.

(ii) Il determinante è il prodotto degli autovalori. Cosa assicura la diagonalizzabilità?

(iii) (a) sella; (b) nodo instabile; (c) nodo stabile; (d) un autovalore è nullo, x_0 è un equilibrio.

(iv) Sotto le ipotesi fatte, ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è autovettore di A relativo all'autovalore λ. (In generale, se u_1 ed u_2 sono autovettori di una matrice A relativi allo stesso autovalore, allora anche ogni loro combinazione lineare lo è). Il resto è ovvio e l'integrale generale è $(x_0,t) \mapsto e^t x_0$.

Esercizi *1.3.4* (ii) La matrice ha l'autovalore doppio $\lambda = 0$ e un solo autovettore non nullo. La $\dot y = \lambda y$ dà $y(t) = e^{\lambda t}y_0$. Sostituendo nella $\dot x = \lambda x + by$ si ottiene un'equazione lineare con termine non omogeneo dipendente dal tempo che si sa integrare. Per eseguire il calcolo con la serie esponenziale si calcolino innanzittuto A^2 ed A^3. Da qui, si intuisce l'espressione di A^n, che si prova per induzione.

(iii) (a) Autovalore $\lambda = 1$ doppio, un solo autovettore $(-1,1)$, integrale generale $e^t(x_0 + t(x_0+y_0), y_0 - t(x_0+y_0))$. (b) Autovalore $\lambda = 0$ doppio, un solo autovettore $(-1,1)$, integrale generale $(x_0 + t(x_0+y_0), y_0 - t(x_0+y_0))$.

(iv) Sia P la matrice che realizza il cambio di base, con $P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = u$. Sia $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. La condizione che $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ sia autovettore di $P^{-i}AP$ con autovalore λ dà $a = \lambda$, $c = 0$. La condizione che λ sia l'unico autovalore dà $d = \lambda$. Se fosse $b = 0$ allora la matrice sarebbe multipla dell'identità e dunque avrebbe due autovettori linearmente indipendenti.

Esercizi *1.3.5* (ii) (a) Si trova $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $v = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$. Allora $P = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ e dunque $\exp(At)x_0 = e^{2t}P\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix}\sin t - \cos t\\ \cos t\end{pmatrix}$. La spirale si svolge in senso orario. (b) Adesso $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $v = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$. Allora $P = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1/2\\ -1 & -1/2\end{pmatrix}$ e dunque $\exp(At)x_0 = P\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t + 2\sin t\\ \cos t - 3\sin t\end{pmatrix}$.

(iii) Siccome $x_0 = av+bw = \mathrm{Re}\Big[(a-ib)(v+iw)\Big] = \mathrm{Re}\Big[re^{-i\gamma}(v+iw)\Big]$, usando la (1.3.3) (che come subito si verifica vale anche per autovalori ed autovettori complessi), si trova $\exp(tA)x_0 = \exp(tA)\,\mathrm{Re}\Big[re^{-i\gamma}(v+iw)\Big] = r\,\mathrm{Re}\Big[e^{-i\gamma}\exp(tA)(v+iw)\Big] = r\,\mathrm{Re}\Big[e^{-i\gamma}e^{(\alpha+i\beta)t}(v+iw)\Big] = r\,e^{\alpha t}\,\mathrm{Re}\Big[e^{i(\beta t-\gamma)}(v+iw)\Big] = r\,e^{\alpha t}\,\mathrm{Re}\Big[(\cos(\beta t-\gamma) + i\sin(\beta t-\gamma))(v+iw)\Big]$. Soluzioni di (ii): (a) Si noti che $x_0 = v$; dunque $r = 1$, $\gamma = 0$ ed $\exp(At)x_0 = e^{2t}(v\cos t - w\sin t)$ dà lo stesso risultato di (ii). (b) Adesso $x_0 = \frac{1}{2}v - \frac{3}{2}w$. Dunque $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ e così $r\cos\gamma = \frac{1}{2}$ e $r\sin\gamma = -\frac{3}{2}$; a conti fatti, si trova lo stesso risultato di (ii).

(vi) Ragionare come nella dimostrazione della Proposizione 8.

Esercizi *1.4.1* (i) Derivare $\tilde{v}(x,e)$ oppure ricorrere al teorema della funzione implicita.

(ii) Sviluppare in serie di Taylor attorno ad $\overline{x}$ numeratore e denominatore nella

$$\frac{d\tilde{v}}{dx}(x) \;=\; \pm\sqrt{\frac{1}{2m}}\,\frac{-V'(x)}{\sqrt{e-V(x)}}$$

ricordando che $V'(\overline{x}) = 0$ e che $V(\overline{x}) = e$.

Esercizi *1.4.2* (ii) $A(e) = 2\int_{x_-(e)}^{x_+(e)} \tilde{v}(x,e)dx$. Derivando rispetto ad e si trova ....

Esercizi *1.5.1* (iv) e (v) $x\cdot x\times Ax = x\times x\cdot Ax = \ldots$

Esercizi *1.5.2* (ii) Sí. No.

(iii) Posto $w = V''(\overline{x})$, gli autovalori della linearizzazione sono $-h\pm\sqrt{h^2-w}$. Se $w<0$ essi sono reali positivi: instabilità. Se $w>0$ distinguiamo due casi: se $h^2\geq w$ allora gli autovalori sono reali negativi; se $h^2<w$, invece, gli autovalori sono complessi ma hanno comunque parte reale negativa; in entrambi i casi c'è stabilità asintotica. Infine, nel caso non generico nel quale $w=0$, gli autovalori sono $-2h$ e 0: la presenza di un autovalore nullo non permette di concludere nulla (è in effetti evidente che ciò che fa la differenza è se V abbia un minimo oppure un massimo o una sella).

Esercizi *1.6.1* (iii) Ovviamente non può essere possibile, perchè le soluzioni di $\dot{x} = x^2$ vanno all'infinito in tempo finito e quella dell'equazione lineare $\dot{y} = y$ no: dunque non è possibile che i due flussi siano coniugati. Per mostrarlo: se esistesse un tale cambio di coordinate $y = \mathcal{C}(x)$ allora dovrebbe essere $\dot{y} = \mathcal{C}'(x)\dot{x} = \mathcal{C}'(x)x^2 = y$, cioè $x^2\mathcal{C}'(x) = \mathcal{C}(x)$. Questa equazione ha soluzioni del tipo $\mathcal{C}(x) = c\exp(-1/x)$, con c costante arbitraria, che non sono nè invertibili nè continue su tutto $\mathbb{R}$.

(iv) Basta osservare che se, specificando le condizioni iniziali, indichiamo con $x(t;x_0)$ la soluzione di $\dot{x} = X(x)$ con dato iniziale x_0 e con $x'(t;x_0')$ la soluzione di $\dot{x}' = X'(x')$ con dato iniziale x_0', allora la (1.6.1) è equivalente a $x'\Big(t;\mathcal{C}(x_0)\Big) = \mathcal{C}\Big(x(t;x_0)\Big)$ per tutti i t ed x_0.

Esercizi *1.6.2* (i) Se $\dot{x} = v$ e $\dot{v} = Y(x,v)$ e $(x',v') = (\mathcal{C}(x), \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}(x)v)$ allora $\dot{x}' = \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\dot{x}$ e $\frac{\partial v}{\partial =}$.....

(ii) $\ddot{x} = x$.

Esercizi *1.6.3* (ii) $(x,v)\mapsto\Big(\mathcal{C}(x,t), \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}(x,t)v + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial t}(s,t)\Big)$.

(Versione 2005.1)

Capitolo 2

Sistemi di punti ed equazioni di Lagrange

Le equazioni del moto di un sistema di punti materiali (non soggetti a vincoli) sono le equazioni di Newton per i singoli punti. Se vi sono N punti, esse costituiscono un sistema del secondo ordine in $\mathbb{R}^{3N}$, ovvero un sistema del primo ordine in $\mathbb{R}^{6N}$. Se le particelle interagiscono fra loro, queste equazioni sono accoppiate ed il loro studio può essere molto difficile. È importante allora disporre di tecniche avanzate che ne facilitino l'analisi. Per esempio, in presenza di simmetrie del sistema, è di solito utile usare delle coordinate adattate alle simmetrie; per questo serve un formalismo che permetta l'uso di coordinate qualunque nello spazio delle posizioni $\mathbb{R}^{3N}$ (e magari nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^{6N}$, ma per questo bisognerà aspettare la meccanica Hamiltoniana); si vorrebbe una formulazione che faciliti la ricerca di eventuali integrali primi, etc. Tale formulazione è data dalle cosiddette equazioni di Lagrange, che deriviamo in questo capitolo. Come poi vedremo esse sono anche, sotto opportune ipotesi, le equazioni del moto dei sistemi vincolati. L'interesse delle equazioni di Lagrange è però più generale, perchè esse svolgono un ruolo basilare in Fisica Teorica.

Il capitolo è organizzato nel modo seguente: Innanzittutto richiamiamo molto brevemente le ipotesi di base della Meccanica Classica. Ricordiamo poi le idee di base relative ad un sistema costituito da un solo punto materiale. La terza sezione è dedicata alla descrizione del moto in riferimenti non inerziali.Passiamo quindi ai sistemi di punti ed alle equazioni di Lagrange, che sono il cuore del capitolo.

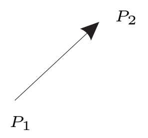
2.1 Sistemi meccanici

A. Nozioni e ipotesi di base. Come si sa dai corsi di Fisica, vi è un'ampia classe di fenomeni, che costituiscono l'oggetto della Meccanica Classica, il cui moto è governato dalle leggi di Newton. La formulazione di tali leggi richiede l'introduzione di concetti quali quelli di spazio, tempo, massa, forza. Siccome il nostro scopo è lo studio delle proprietà dei moti dei sistemi meccanici, non quello delle basi della Meccanica, noi assumeremo qui tali concetti come primitivi. Precisamente, nel modello che facciamo supponiamo che esistano

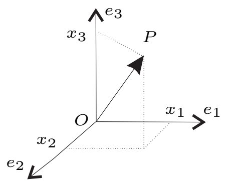
- Dei *punti materiali,* o *particelle*, dotati di massa.
- Uno *spazio* tridimensionale $\mathbb{E}^3$, che supponiamo avere una struttura affine

euclidea, nel quale i punti materiali possono muoversi ("spazio assoluto"; si vedano le Osservazioni più sotto per qualche parola di spiegazione).

Dire che $\mathbb{E}^3$ ha una struttura affine significa che esso è uno spazio affine reale dotato di un prodotto scalare. Precisamente, ad ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in \mathbb{E}^3$ è associato in modo unico un vettore di uno spazio vettoriale reale tridimensionale $\mathbb{V}^3$ "che li congiunge", e che denotiamo indifferentemente P_1P_2 o $P_2 - P_1$. Inoltre, e in questo consiste la struttura euclidea, $\mathbb{V}^3$ è dotato di un prodotto scalare, nel seguito denotato $u \cdot v$. Questo prodotto scalare permette di definire distanze ed angoli in $\mathbb{E}^3$, che sono pertanto intrinsecamente definiti. Osserviamo che l'esistenza del prodotto scalare[1] implica anche l'esistenza di un prodotto vettore.



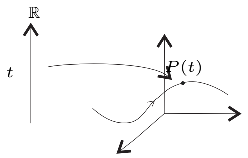
Un *sistema di riferimento* in $\mathbb{E}^3$ è costituito da un punto $O \in \mathbb{E}^3$ e da tre vettori ortonormali di $\mathbb{V}^3$, che denoteremo spesso e_1, e_2, e_3 o e_x, e_y, e_z etc. La scelta di un sistema di riferimento $\Sigma = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ permette di identificare $\mathbb{E}^3$ con $\mathbb{R}^3$: basta associare al punto $P \in \mathbb{E}^3$ il vettore $P - O \in \mathbb{V}^3$ e a questo la terna $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ delle sue componenti nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$,



$$P - O \;=\; \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \,,$$

chiamate le coordinate "affini" o "cartesiane" di P in Σ.

Un *moto* di un punto materiale P è una mappa $\mathbb{R} \ni t \mapsto P(t) \in \mathbb{E}^3$. La *traiettoria* o *orbita* è l'immagine del moto, cioè la curva geometrica tracciata dal punto. La descrizione del moto va effettua relativamente ad un sistema di riferimento Σ. Naturalmente, anche il riferimento può essere in moto, perchè cambiano la sua origine e/o l'orientazione dei suoi assi $\{O(t); e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ (si pensi a un qualunque riferimento terrestre, per esempio).



La *velocità* e l'*accelerazione* relativi a $\Sigma = \{O(t); e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ del moto $t \mapsto P(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) e_i(t)$ sono i vettori di $\mathbb{V}^3$ definiti come

$$v_P^{(\Sigma)}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i(t) e_i(t) \,, \qquad a_P^{(\Sigma)}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i(t) e_i(t) \,, \tag{2.1.1}$$

dove $\dot{x}_i$ e $\ddot{x}_i$ sono le derivate prima e seconda della funzione $t \mapsto x_i(t)$. Quando sarà chiaro in quale sistema di riferimento si calcolano velocità ed accelerazione scriveremo semplicemente v_P ed a_P o anche v ed a.

Un *sistema meccanico* è costituito da un certo numero di punti materiali e dalle *forze* che agiscono su di essi. Si suppone sempre che le forze siano assegnate a priori, come funzioni delle posizioni e delle velocità di tutti i punti materiali che costituiscono il sistema e in certi casi anche del tempo. Dunque, la loro specificazione fa parte della definizione del sistema. Siccome le forze dipendono dal sistema di riferimento Σ nel quale si descrive il moto, nel definire un sistema meccanico si deve specificare anche il sistema di riferimento.

Nel caso di un sistema costituito da un solo punto materiale P di massa m e soggetto, in un riferimento Σ, alla forza

$$F^{\Sigma}(P, v_P^{\Sigma}, t) \in \mathbb{V}^3 \,,$$

si postula che l'equazione del moto in Σ sia l'*equazione di Newton*

$$m a_P^{(\Sigma)} \;=\; F^{\Sigma}\big(P, v_P^{(\Sigma)}, t\big) \,. \tag{2.1.2}$$

[1] insieme all'orientabilità di ogni spazio affine

(Vedremo più avanti, nella sezione 2.3, come determinare la forza agente sul punto, e quindi l'equazione del moto, in ogni altro sistema di riferimento.)

Nel caso di un sistema costituito da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$, ciascuno soggetto alla forza

$$F_i^\Sigma(P_1, \ldots, P_N, v_{P_1}^\Sigma, \ldots, v_{P_N}^\Sigma, t)\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,,$$

nel sistema di riferimento Σ, si postula che l'equazione del moto in Σ sia il sistema delle N equazioni di Newton

$$m_i a_{P_i}^{(\Sigma)} \;=\; F_i^\Sigma\big(P_1, \ldots, P_N, v_{P_1}^{(\Sigma)}, \ldots, v_{P_N}^{(\Sigma)}, t\big)\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,.$$

Come abbiamo detto, il problema della fondatezza di questo approccio è un problema fisico, sul quale la Meccanica non può dire nulla. Lo stesso si deve dire dell'esistenza di sistemi di riferimento "inerziali", sui quali ci limitiamo a fare la seguente osservazione. Sperimentalmente, si trova che le forze che agiscono su un punto materiale in un certo sistema di riferimento sono la somma di forze di due tipi diversi:

- Forze indipendenti dal sistema di riferimento e dovute alle interazioni (gravitazionale, elettromagnetica, etc.) con i restanti punti dell'universo. Queste forze decadono con la distanza fra i punti.
- Forze che invece dipendono dal sistema di riferimento, ma che sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento che traslano con velocità uniforme l'uno rispetto all'altro ("forze d'inerzia).

Un *riferimento inerziale* viene allora definito, sperimentalmente, come un riferimento nel quale un punto materiale "molto lontano" da tutti gli altri, sul quale cioè le forze del primo tipo siano nulle (o molto deboli) si muove (approssimativamente) di moto rettilineo uniforme. Il "principio d'inerzia" può essere riguardato come l'affermazione che esista almeno un sistema di riferimento inerziale.

Nel nostro approccio, noi riguarderemo sempre le forze come specificate a priori: l'assegnazione delle forze conterrà dunque già in sé, caso per caso, l'assunzione sull'inerzialità o meno del riferimento.

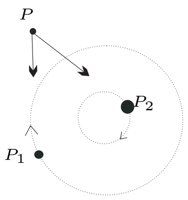
Osservazioni: (i) Da un punto di vista matematico il motivo per cui si assume che lo spazio abbia una struttura euclidea invece che vettoriale è perchè non vi è un'origine privilegiata (per esempio, l'Universo non è geocentrico). Il motivo per cui si riguarda $\mathbb{V}^3$ come uno spazio vettoriale reale invece che come $\mathbb{R}^3$ è, similmente, per sottolineare che non vi è un'unica, intrinseca, scelta di una base. Naturalmente, una volta scelto un sistema di riferimento, sia $\mathbb{E}^3$ che $\mathbb{V}^3$ vengono identificati con lo spazio delle terne reali e tutto va come al solito. Tuttavia, vi sono due motivi per i quali è bene tenere presente la struttura euclidea 'assoluta' dello spazio. Il primo, concettuale, è per sottolineare il fatto che il prodotto scalare è indipendente dal sistema di riferimento. Il secondo, pratico, è che vi sono dei casi (in particolare nello studio della dinamica dei corpi rigidi) nei quali si utilizzano diversi sistemi di riferimento e, a meno che non si distinguano chiaramente i vettori di $\mathbb{V}^3$ dai loro rappresentativi nelle diverse basi, questa situazione è fonte di confusione continua.

(ii) È evidente che questo approccio sottintende molte approssimazioni. L'ipotesi che lo spazio sia euclideo, e dunque piatto, è vera solo approssimativamente in assenza di campi gravitazionali molto intensi, che "curvano lo spazio" dandogli la struttura di una varietà riemanniana. Anche l'equazione di Newton è approssimata, e richiede in particolare velocità piccole rispetto a quella della luce. La stessa nozione di punto materiale è un'astrazione. Inoltre, tutti gli effetti quantistici devono essere trascurabili. Cionondimeno, vi sono molte ed importanti situazioni per le quali la meccanica classica produce una descrizione soddisfacente.

B. Esempi. La nozione di sistema costituito da un solo punto è ovviamente un'astrazione: vuole essere un modello per situazioni sperimentali nelle quali si è interessati al moto di un certo punto materiale e, per esempio poichè esso ha massa trascurabile rispetto a quella di tutti gli altri punti con i quali ha una interazione significativa, si trascura la reazione che esso esercita sugli altri punti dell'Universo.

Un esempio di questa situazione è il moto di una pallina (supposta puntiforme) vicino alla superficie terrestre; se si trascura la accelerazione che la pallina imprime alla terra, e si è interessati ai movimenti della pallina in una regione limitata dello spazio, nella quale la attrazione gravitazionale non varii troppo, allora si modellizza questa situazione come un punto soggetto alla forza peso. L'equazione del moto in un riferimento inerziale è allora $ma = mg$. Naturalmente è più comodo descrivere il moto in un riferimento solidale alla terra, ma questo richiede l'aggiunta di forze d'inerzia, si veda la sezione 2.3.C.

Un altro esempio di questa situazione è il moto di una sonda spaziale fra la terra e luna, o quello di un piccolo asteroide nel campo di forze creato da Giove e dal Sole. Questo è il cosiddetto *problema ristretto dei tre corpi.* Supponiamo che due punti materiali P_1 e P_2 di masse m_1 ed m_2 si muovano su un'orbita circolare attorno al loro centro di massa, che supponiamo in quiete nel riferimento inerziale Σ nel quale lavoriamo. Si consideri poi un punto materiale P di massa $m \ll m_1, m_2$. Denotiamo con x, x_1 ed x_2 i vettori posizione di P, P_1 e P_2 in Σ. Allora i moti $t \mapsto x_1(t)$ e $t \mapsto x_2(t)$ sono noti. Se si trascurano le accelerazioni che P imprime a P_1 ed a P_2, e dunque si pensa che questi due punti continuino a muoversi sulle loro orbite circolari, allora l'equazione del moto di P è



$$m\ddot{x} \;=\; -Gmm_1 \frac{x - x_1(t)}{|x - x_1(t)|^3} - Gmm_2 \frac{x - x_2(t)}{|x - x_2(t)|^3}\,.$$

Dunque, la forza agente su P dipende dal tempo. Si vede qui una delle possibili genesi delle forze dipendenti dal tempo, dovute al fatto che il sistema in considerazione non è isolato.

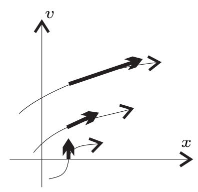
Torneremo ancora sul problema ristretto dei tre corpi, che è uno dei problemi classici della meccanica. Avvertiamo sin d'ora, però, che a differenza di (quasi) tutti gli altri sistemi studiati nel corso, questo problema sarà troppo difficile: in effetti, il problema ristretto dei tre corpi non è integrabile. (Cosa questo significhi risulterà forse più chiaro alla fine del corso.)

2.2 L'equazione di Newton

Una volta scelto il sistema di riferimento Σ, si può riguardare l'equazione di Newton (2.1.2) come un'equazione del secondo ordine per le corrispondenti coordinate $x \in \mathbb{R}^3$:

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

ove f denota il vettore di $\mathbb{R}^3$ delle componenti della forza nella base di Σ. Si può riguardare questa equazione come un'equazione del primo ordine (cioè un sistema dinamico) in $\mathbb{R}^6$:



Equazione del II ordine: il vettore tangente in (x, v) è $(v, f(x))$

$$\dot{x} \;=\; v\,, \qquad \dot{v} \;=\; \frac{1}{m}\, f(x, v, t)\,.$$

Il vettore $(x, v) \in \mathbb{R}^6$ si chiama *atto di moto.* L'equazione di Newton è dunque un sistema dinamico (non autonomo, se f dipende dal tempo) nello *spazio degli atti di moto* $\mathbb{R}^6 \ni (x, v)$.

Lo scopo di questa sezione è di dare un primo sguardo all'equazione di Newton e di richiamare alcune nozioni elementari, in particolare riguardo ai suoi eventuali integrali primi. Come applicazione, daremo un primo sguardo ai moti centrali.

A. Quantità di moto e momento angolare. La *quantità di moto* (o momento lineare, o impulso) di un punto materiale P di massa m nell'atto di moto $(x, \dot{x})$ è definita come

$$p(x, \dot{x}) \;=\; m\dot{x}\,.$$

L'equazione di Newton dà $\dot{p} = f$ e dunque:

- *Se f è nulla, la quantità di moto è costante.* Questo è il caso della particella libera. Si noti che la conservazione di p corrisponde alla conservazione di tre funzioni scalari, le tre componenti di p (in qualunque sistema di coordinate).
- *Se la componente di f nella direzione di un versore fisso $e \in \mathbb{R}^3$ è nulla, allora la componente di p nella direzione di e si conserva:*

  $$f \cdot e = 0 \quad \Longrightarrow \quad p \cdot e = \mathrm{cost}\,.$$

  Esempio: la forza peso $f = mg$. Se l'asse z è diretto come la verticale, cioè $g = |g|e_z$, allora p_x e p_y, e dunque v_x e v_y, si conservano.

Il *momento angolare del punto P rispetto al punto Q* è[2]

$$M_Q \;=\; m(P - Q) \times \dot{x}\,.$$

La *coppia* (o momento, o momento polare) della forza f rispetto al punto Q è

$$N_Q \;=\; (P - Q) \times f$$

(Il punto Q può anche cambiare nel tempo).

Proposizione 13 *(Bilancio del momento angolare) Se $t \mapsto x(t)$ è soluzione dell'equazione di Newton $m\ddot{x} = f$, allora la derivata del momento angolare $t \mapsto M_Q(x(t), \dot{x}(t))$ lungo tale moto soddisfa*

$$\dot{M}_Q \;=\; N_Q - mv_Q \times v_P\,. \tag{2.2.1}$$

In particolare, se il punto Q è fisso, allora $\dot{M}_Q = N_Q$.

Dimostrazione. Basta calcolare le derivate: $\dot{M}_Q = m\frac{d}{dt}\big[(P - Q) \times \dot{x}\big] = m(v_P - v_Q) \times v_P + m(P - Q) \times a_P = -mv_Q \times v_P + (P - Q) \times f$. ■

Esercizi 2.2.1 (i) Mostrare che, a differenza dell'equazione di bilancio della quantità di moto, l'equazione di bilancio del momento angolare *non* è equivalente all'equazione di Newton.

(ii) Scrivere la condizione di indipendenza delle tre componenti del momento angolare.

(iii)* Usando il risultato dell'esercizio precedente, mostrare che le tre componenti del momento angolare sono indipendenti in tutto il sottoinsieme dello spazio degli atti di moto in cui il momento angolare non è nullo. [È lungo, o difficile: provare a farlo solo se si ha piacere per questo tipo di questioni].

[2]Per alleggerire la notazione, omettiamo l'indicazione dell'atto di moto dal quale dipende M_Q.

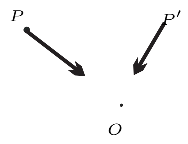
L'importanza del momento angolare è legata al fatto che anch'esso, in certe condizioni, si conserva. Il caso più importante è quello di forze a momento nullo:

- Se il campo di forze ha momento nullo rispetto ad un punto Q in quiete, allora M_Q è costante.
- Se il momento del campo di forze rispetto ad un punto Q in quiete ha componente nulla nella direzione di un versore fisso e, $N_Q \cdot e = 0$, allora la componente $M_Q \cdot e$ del momento angolare nella direzione di e è costante.

Un esempio del secondo caso è offerto dalla forza peso: in tal caso, la componente verticale del momento angolare rispetto a qualunque punto è costante. Il primo caso è molto importante, essendo il caso dei campi centrali.

B. Esempio: forze centrali. Un campo di forze posizionale si dice *centrale* se esiste un punto O (detto centro del campo di forze) tale che la forza in ogni punto P sia parallela a $P - O$, ovvero

$$(P - O) \times f(P) \;=\; 0\,.$$



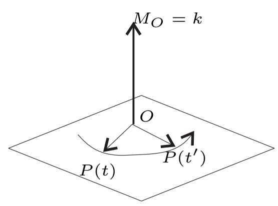
Dunque un campo di forza è centrale, con centro O, se e solo se il suo momento rispetto ad O è nullo: $N_O = 0$. Ne segue che *in un campo centrale, il momento angolare rispetto al centro del campo è costante* (in un riferimento nel quale il centro del campo è in quiete). Il fatto che la forza gravitazionale e quella Coulombiana siano centrali indica l'importanza di questa classe di forze.

La conservazione del momento angolare fornisce delle informazioni importanti sui moti in un campo centrale. Innanzitutto, si ha la seguente

Proposizione 14 *In un campo di forze centrali:*

(i) Ogni moto è piano.

(ii) Se il momento angolare rispetto al centro è nullo, allora il moto è radiale.



Dimostrazione. (i) Sia O il centro del campo e sia $k \in \mathbb{R}^3$ il valore del momento angolare. Se $k \neq 0$, allora il vettore $P(t) - O$ è ad ogni istante ortogonale a k: dunque, appartiene al piano ortogonale a k e contenente O e $P(0)$.

(ii) Il caso $k = 0$ è un po' più delicato, ma meno importante. Indichiamo con e il versore nella direzione $OP(0)$. Il vettore velocità all'istante iniziale, che denotiamo v_0, è parallelo ad e; possiamo allora scrivere $v_0 = \dot r_0 e$ con qualche $\dot r_0 \in \mathbb{R}$. Ci basta mostrare che esiste una soluzione delle equazioni del moto che soddisfa le assegnate condizioni iniziali ed è tale che $OP(t) = r(t)e$ (per l'unicità, questa è allora *la* soluzione). Se $OP(t) = r(t)e$ allora $v = \dot r e$ ed $a = \ddot r e$, cosicché questa è una soluzione delle equazioni del moto con le condizioni iniziali P_0 e $v_0 = \dot r_0 e$ se e solo se, introdotta la funzione scalare $\mathcal{F}$ tale che $f(re) = \mathcal{F}(r)e$, $r(t)$ è soluzione di

$$m\ddot r \;=\; \mathcal{F}(r)$$

con dati iniziali $r(0) = |OP(0)|$ ed $\dot r(0) = \dot r_0$. Per il teorema di esistenza ed unicità, questo problema di Cauchy ha una soluzione $r(t)$ (per t in un intervallo). Questo prova l'asserto. ■

Un momento di riflessione indica che la conservazione del momento angolare non può ridursi soltanto al fatto che il moto sia piano. Infatti, la conservazione di M_O equivale all'esistenza di *tre* integrali primi, cioè le tre componenti di tale vettore, mentre il fatto che il moto sia piano equivale all'esistenza di soli *due* integrali primi (la direzione della normale al piano è costante). Nella prova della proposizione precedente si è usato solo il fatto che la direzione di M_O è costante. Non si è invece ancora usata la conservazione della norma del momento angolare; come adesso mostriamo, questa equivale alla seconda legge di Kepler:

Proposizione 15 *Nel moto centrale, la velocità areolare è costante.*

La "velocità areolare" è definita nel corso della dimostrazione—che essenzialmente si riduce proprio alla sua definizione.

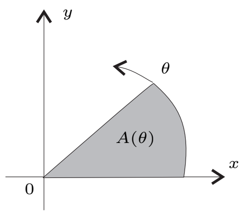
Dimostrazione. Siccome il moto è piano, introduciamo un sistema di coordinate cartesiane $\{O; x, y, z\}$ centrate in O e con il piano xy coincidente con il piano dell'orbita. Introduciamo poi un sistema di coordinate polari (r, θ) nel piano xy, centrate in O, cosicché $x = r\cos\theta$ ed $y = r\sin\theta$. Il momento angolare è allora diretto come l'asse z e si ha $M = M_z e_z$, con

$$M_z \;=\; m(x\dot{y} - y\dot{x}) \;=\; mr^2\dot{\theta}\,, \tag{2.2.2}$$

come subito si verifica usando $\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$ ed $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$. Così, la conservazione del momento angolare implica la conservazione della quantità $r^2\dot{\theta}$. Mostriamo adesso che questa è poprio la velocità areolare.

Supponiamo $M \neq 0$, cosicché $r^2\dot{\theta}$ è costante e diverso da zero, diciamo $r^2\dot{\theta} = c$ con qualche $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Allora $\dot{\theta} = c/r^2$ e così $\dot{\theta}$ è o sempre positivo o sempre negativo. Pertanto, se riguardiamo θ a valori in $\mathbb{R}$ anzichè in $\mathbb{S}^1$, cioè se "contiamo i giri", la funzione $t \mapsto \theta(t)$ è monotona e quindi invertibile: $t = t(\theta)$. Possiamo allora parametrizzare i moti con θ invece che con t: se poniamo $\tilde{r}(\theta) = r(t(\theta))$, la funzione $r = \tilde{r}(\theta)$ dà l'equazione dell'orbita.[3]

Consideriamo allora la regione del piano delimitata dall'asse x, dal raggio vettore di angolo θ e dal tratto di traiettoria compreso fra di essi.[4] La "velocità areolare" è la velocità con cui varia questa area quando θ si muove seguendo il punto materiale. Siccome l'area di questa regione è



$$A(\theta) \;=\; \int_0^\theta d\theta' \int_o^{\tilde{r}(\theta')} r dr \;=\; \frac{1}{2}\int_0^\theta \tilde{r}(\theta')^2 d\theta'$$

(infatti, lo Jacobiano del cambio di coordinate è r), la velocità areolare è

$$\dot{A} \;=\; \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

ed è costante. Questo dimostra la Proposizione se $M_O \neq 0$. Se $M_O = 0$ il moto è rettilineo e la velocità areolare costantemente nulla. ■

L'idea di parametrizzare le traiettorie con l'angolo θ invece che con il tempo, usata in questa dimostrazione, verrà utilizzata anche per determinare le traiettorie del problema di Kepler (sezione 4.1.C.).

Esercizi 2.2.2 (i) Mostrare che in un campo centrale nessun moto con momento angolare diverso da zero passa per il centro del campo.

(ii) Mostrare che se un punto percorre un'orbita chiusa in un campo centrale, allora essa racchiude il centro del campo.

(iii) Mostrare che le prime due leggi di Kepler implicano che la forza gravitazionale è centrale.

[3] Siccome θ adesso varia in $\mathbb{R}$, e non in S^1, il punto può fare un giro completo attorno ad O ed arrivare ad una diversa distanza da O: $\tilde{r}(\theta) \neq \tilde{r}(\theta + 2\pi)$.

[4] Si deve prendere $|\theta| < 2\pi$.

C. Lavoro, energia e potenza. L'importanza delle forze conservative è legata alla proprietà di conservazione dell'energia. Restringiamcoi al caso di forze posizionali ed indipendenti dal tempo, $f = f(x)$.

Definizione: *Un campo di forze posizionali ed indipendente dal tempo $f(x)$ si dice* conservativo *se esiste una funzione $V(x)$, detta* energia potenziale*, tale che $f = -\mathrm{grad}V$.*

Osservazioni: (i) È noto dall'Analisi che la conservatività di un campo vettoriale $f : U \to \mathbb{R}^3$, ove U è un aperto di $\mathbb{R}^3$, può essere anche caratterizzata in termini della 1–forma differenziale $\sum_{i=1}^{3} f_i(x)dx_i$, che in Meccanica si chiama *forma lavoro*:

- La forma lavoro è esatta, uguale cioè a $-dV$ per qualche funzione $V(x)$.
- L'integrale della forma lavoro lungo un qualunque cammino chiuso contenuto in U è nullo.
- L'integrale della forma lavoro lungo un qualunque cammino contenuto in U dipende solo dagli estremi di integrazione.

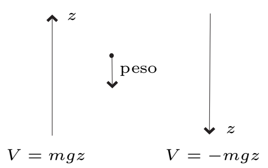
Una condizione necessaria (sufficiente in semplicemente connessi) per la conservatività è che sia ovunque $\mathrm{rot}f(x) = 0$. Infatti, questa è la condizione di chiusura della forma lavoro (che ne implica l'esattezza solo in semplicemente connessi).

(ii) Ovviamente, l'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva. Non sottolineeremo questo aspetto.

Esempi: *(i) Forza peso.* In un sistema di coordinate cartesiane $\{x, y, z\}$ con l'asse z verticale ascendente, la forza peso è

$$f(x, y, z) = -mge_z$$

ed ha dunque l'energia potenziale



$$V(x, y, z) = mgz\,.$$

(Attenzione: negli esercizi, a volte l'asse z è verticale discendente; allora $f(x, y, z) = mge_z$ e $V(x, y, z) = -mgz$.)

(ii) Forze centrali. Diremo che una forza centrale è *a simmetria sferica* se la sua norma dipende solo dalla distanza dal centro: in un sistema di coordinate cartesiane con origine nel centro del campo si ha

$$f(x) = \mathcal{F}(|x|)\,\frac{x}{|x|}$$

ove f è una funzione $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Qualunque forza centrale a simmetria sferica è conservativa: l'energia potenziale è

$$V(x) = -\int_{r_0}^{|x|} \mathcal{F}(r)dr \tag{2.2.3}$$

ove l'estremo di integrazione $r_0 > 0$ è arbitrario (un suo cambiamento si traduce nell'aggiunta di una costante a V). Infatti

$$\mathrm{grad}V(x) = -\left[\frac{d}{dr}\int_{r_0}^{r} \mathcal{F}(r')dr'\right]_{r=|x|} \mathrm{grad}|x| = -\mathcal{F}(|x|)\frac{x}{|x|}$$

perchè $\mathrm{grad}|x| = x/|x|$. Per esempio, l'energia potenziale delle forze elastica e gravitazionale sono

$$f(x) = -kx \implies V(x) = \tfrac{1}{2}k|x|^2$$
$$f(x) = -\frac{k}{|x|^2}\,\frac{x}{|x|} \implies V(x) = -\frac{k}{|x|}\,.$$

Esercizi 2.2.3 (i)* Mostrare che una forza centrale è conservativa se e solo se è a simmetria sferica.

(ii) ("Razzetto") Si introducano in $\mathbb{R}^3$ delle coordinate cilindriche (r, θ, z) e si decomponga un campo di forze posizionale f nella base locale delle coordinate polari: $f = f_r e_r + f_\theta e_\theta + f_z e_z$. Mostrare che, se la funzione $f_\theta(r, \theta)$ è ovunque positiva, allora la forza f non è conservativa.

Si chiama *energia cinetica* del punto di massa m nell'atto di moto $(x, \dot{x})$ la quantità $\frac{1}{2} m|\dot{x}|^2$.

Proposizione 16 *Se le forze agenti su un punto materiale sono conservative con energia potenziale $V(x)$, allora l'*energia totale

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m|\dot{x}|^2 + V(x)$$

è un integrale primo dell'equazione di Newton.

Dimostrazione. Sia $t \mapsto x_t$ una soluzione di $m\ddot{x} = -\mathrm{grad}V(x)$. Allora $\frac{d}{dt}E(x_t, \dot{x}_t) = m\dot{x}_t \cdot \ddot{x}_t + \mathrm{grad}V(x_t) \cdot \dot{x}_t = 0$. ■

Se le forze dipendendono anche dal tempo e dalla velocità in generale non vi è un integrale dell'energia. Vi è tuttavia un'importante eccezione, costituita dalle forze *a potenza nulla*, che non compiono lavoro.

Definizione: *La* potenza *della forza $f(x, \dot{x}, t)$ all'istante t nell'atto di moto $(x, \dot{x})$ è la quantità*

$$\Pi(x, \dot{x}, t) = f(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{x}\,.$$

Una forza è a potenza nulla *se, ad ogni istante, la sua potenza è nulla su ogni atto di moto:*

$$\Pi(x, \dot{x}, t) = 0 \qquad \forall x\,,\ \dot{x}\,,\ t\,.$$

È evidente che una forza è a potenza nulla se e solo se essa è, in ogni atto di moto e ad ogni istante, ortogonale alla velocità. Importanti esempi sono costituiti dalla forza di Lorentz $f(x, v, t) = e\, v \times B(x, t)$ e dalla forza di Coriolis, che sarà introdotta nella sezione 2.3. Ora, del tutto in generale, la derivata lungo i moti dell'energia cinetica è la potenza:

$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m|\dot{x}|^2\Big) = m\,\dot{x} \cdot \ddot{x} = f \cdot \dot{x} = \Pi\,;$$

si conclude pertanto che *se su un punto materiale agiscono solo forze a potenza nulla, allora la sua energia cinetica è costante.*

Esercizi 2.2.4 (i) Mostrare che, se su un punto materiale agisce la forza

$$f(x, \dot{x}, t) = f_0(x) + f_1(x, \dot{x}, t)$$

con f_0 conservativa ed f_1 a potenza nulla, allora la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di f_0 è costante.

(ii) Il *lavoro* di un campo di forze $f(x, \dot{x}, t)$ lungo un moto $t \mapsto x(t)$, fra gli istanti t_1 e t_2, è definito come l'integrale

$$L(x(\,\cdot\,);\, t_1, t_2) = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} f\Big(x(t), \dot{x}(t)\Big) \cdot dx$$

Mostrare che il lavoro uguaglia l'integrale della potenza $\Pi(x(t), \dot{x}(t), t)$ fra gli istanti t_1 e t_2. Dedurne la legge di conservazione dell'energia totale per forze conservative.

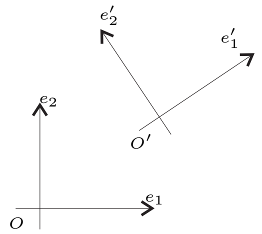
(iii) Si supponga che una forza $f(x, t)$, posizionale e dipendente dal tempo, sia 'conservativa ad ogni istante fissato': esista cioè una funzione $V(x, t)$ tale che $f(x, t) = -\mathrm{grad}_x V(x, t)$. Come varia lungo i moti la funzione $E(x, \dot{x}, t) := \frac{1}{2} m|\dot{x}|^2 + V(x, t)$?

2.3 Le equazioni del moto in sistemi di riferimento in moto

In questa sezione stabiliamo come si scrivono le equazioni del moto di un punto materiale in riferimenti non inerziali. Questo porta all'introduzione del concetto di velocità angolare, che sarà poi necessaria anche per lo studio dei corpi rigidi. Dal punto di vista dinamico emergono le forze di inerzia, fra le quali quella di Coriolis, delle quali discutiamo un certo numero di conseguenze.

A. Velocità angolare. È sufficiente studiare il problema della descrizione del moto di un punto materiale P in un sistema di riferimento non inerziale. A tal fine, supponiamo di conoscere l'equazione del moto di P in un certo riferimento $\Sigma = \{O; e_1, e_2, e_3\}$, ossia

$$ma^{\Sigma} \;=\; F^{\Sigma}(x, v^{\Sigma}, t)$$



con una certa forza F^{Σ}, e ci prefiggiamo di scriverla in un altro sistema di riferimento $\Sigma' = \{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ che si muove relativamente a Σ in modo noto: si conoscono cioè, in funzione del tempo, la posizione di O' e l'orientazione degli assi e_1', e_2', e_3' relativamente a Σ. La prima è specificata dal vettore $x_{O'} \in \mathbb{R}^3$ delle coordinate in Σ di $O' - O$, e la seconda dall'operatore ortogonale $\mathcal{R}$ tale che

$$e_i' \;=\; \mathcal{R}^{-1} e_i \,, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Per scrivere l'equazione del moto in Σ' abbiamo bisogno di esprimere v^{Σ} ed a^{Σ} in termini di $v^{\Sigma'}$ ed $a^{\Sigma'}$, e questo significa determinare la relazione fra derivate temporali di funzioni vettoriali fatte rispetto a diversi sistemi di riferimento.

Ora, se $t \mapsto u(t) \in \mathbb{V}^3$ è una funzione vettoriale ed indichiamo con $u_i(t)$ ed $u_i'(t)$ le componenti di $u(t)$ nelle due basi, ad ogni istante abbiamo

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{3} u_i \, e_i \;=\; \sum_{i=1}^{3} u_i' \, e_i' \,.$$

Per definizione, le derivate temporali di u in Σ ed in Σ' sono

$$\frac{du}{dt}\Big|_{\Sigma} \;:=\; \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i \, e_i \qquad \text{e} \qquad \frac{du}{dt}\Big|_{\Sigma'} \;:=\; \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i' \, e_i' \tag{2.3.1}$$

ove $\dot{u}_i$ ed $\dot{u}_i'$ sono le derivate delle due funzioni scalari $t \mapsto u(t) \cdot e_i(t)$ e $t \mapsto u(t) \cdot e_i'(t)$, che non dipendono dal sistema di riferimento perchè, in virtù della struttura euclidea dello spazio, il prodotto scalare è definito intrinsecamente.[5]

Cominciamo con il determinare le derivate temporali dei versori di base di Σ' fatte rispetto a Σ, cioè, il caso speciale $u = e_i'$. Questo porta all'introduzione della velocità angolare:

Proposizione 17 (Velocità angolare) *Dati due sistemi di riferimento Σ e Σ', per ogni t esiste un vettore $\omega(t) \in \mathbb{V}^3$ tale che*

$$\frac{de_i'}{dt}\Big|_{\Sigma} \;=\; \omega \times e_i' \,, \qquad i = 1, 2, 3 \,. \tag{2.3.2}$$

Il vettore $\omega(t)$ si chiama velocità angolare di Σ' rispetto a Σ all'istante t.

[5] Qui riguardiamo sia e_i che e_i' come funzioni del tempo perchè potrebbe accadere che entrambi i sistemi di riferimento si muovano relativamente allo 'spazio assoluto'.

Dimostrazione. Possiamo provare la (2.3.2) in una qualunque base di $\mathbb{V}^3$, per esempio la $\{e_1, e_2, e_3\}$. Cominciamo con lo scrivere i vettori di $\mathbb{R}^3$ rappresentativi dei vettori di $\mathbb{V}^3$ in questa base (questa è la parte noiosa della dimostrazione). Per distinguere bene fra i diversi oggetti, denotiamo con le lettere maiuscole i rappresentativi dei vettori di $\mathbb{V}^3$: $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ se $u = \sum_{i=1}^3 u_i e_i \in \mathbb{V}^3$. Allora ovviamente $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, etc. Poi:

- Le tre componenti del rappresentativo E_i' di e_i' sono i tre prodotti scalari $e_i' \cdot e_j := R_{ji}$. Dunque
$$E_i' = \begin{pmatrix} R_{1i} \\ R_{2i} \\ R_{3i} \end{pmatrix} = RE_i$$
ove R è la matrice 3×3 di componenti R_{ij}. Siccome le due basi $\{E_i\}$ ed $\{E_i'\}$ sono ortonormali la matrice R è ortogonale, cioè $R^T R = \mathbf{1}$.
- In base alla definizione (2.3.1), le componenti in Σ del vettore $\frac{de_i'}{dt}\Big|_\Sigma$ sono le derivate temporali delle componenti di E_i'. Dunque, il suo rappresentativo è $\dot{E}_i'$.

Calcoliamo allora $\dot{E}_i'$ (questa è la parte "concettuale" della dimostrazione). Lungo un moto, la matrice R dipende dal tempo mentre i vettori $E_j \in \mathbb{R}^3$ sono costanti e così
$$\begin{aligned} \dot{E}_i' &= \dot{R}E_i \\ &= \dot{R}R^T R E_i \qquad [\text{perchè } R^T R = \mathbf{1}] \\ &= \dot{R}R^T E_i' \,. \end{aligned}$$

Qui, $\dot{R}R^T$ è una matrice 3×3. Facciamo le seguenti osservazioni:

(1) $\dot{R}R^T$ *è antisimmetrica.* Infatti, derivando la $RR^T = \mathbf{1}$, che vale ad ogni istante, si ha
$$0 = \frac{d}{dt}\left[RR^T\right] = \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T \,.$$

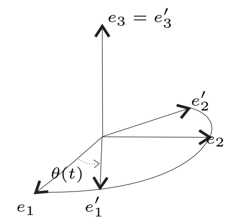
(2) *Per ogni matrice $\hat{W}$ antisimmetrica e 3×3 esiste un unico vettore $w \in \mathbb{R}^3$ tale che*
$$\hat{W}U = W \times U \qquad \forall U \in \mathbb{R}^3 \,.$$
Infatti, la matrice $\hat{W}$ ed il vettore W sono legati dalla
$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \iff \hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.3.3}$$

Si conclude allora che, ad ogni istante, esiste un vettore $\Omega \in \mathbb{R}^3$ tale che
$$\dot{E}_i' = \Omega \times E_i'$$
e questo dimostra la (2.3.2) con $\omega = \sum_i \Omega_i e_i$ (perchè il rappresentativo di un prodotto vettore è il prodotto vettore dei rappresentativi[6]). ■

---

[6] perchè?

Esempio: Le tre formule (2.3.2) (che sono chiamate formule di Poisson) possono essere usate per calcolare la velocità angolare. Supponiamo ad esempio che i due riferimenti Σ e Σ' abbiano l'origine ed il terzo asse in comune. Sia $\theta(t)$ l'angolo fra e_1 ed e_1' all'istante t, orientato in accordo con la regola del cavatappi. Allora



$$e_1' \;=\; e_1\cos\theta + e_2\sin\theta\,, \qquad e_2' \;=\; -e_1\sin\theta + e_2\cos\theta\,, \qquad e_3' \;=\; e_3\,.$$

Dunque

$$\dot e_1' \;=\; \dot\theta e_2'\,, \qquad \dot e_2' \;=\; -\dot\theta e_1'\,, \qquad \dot e_3' \;=\; 0\,.$$

Confrontando con $\dot e_i' = \omega \times e_i'$, $i = 1, 2, 3$, si conclude che la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ è

$$\omega \;=\; \dot\theta\, e_3\,. \tag{2.3.4}$$

Esercizi 2.3.1 (i) Mostrare che, ad ogni istante t, il vettore velocità angolare di un riferimento rispetto ad un altro è unico.

(ii) Mostrare che la (2.3.2) è equivalente alla

$$\omega \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} e_i' \times \left.\frac{de_i'}{dt}\right|_\Sigma . \tag{2.3.5}$$

Usare questa espressione per calcolare la velocità angolare dell'Esempio precedente.

Come immediata conseguenza della Proposizione 17 possiamo dedurre la relazione fra le derivate temporali di una funzione vettoriale:

Proposizione 18 *Qualunque sia la funzione vettoriale $t \mapsto u(t) \in \mathbb{V}^3$ si ha*

$$\boxed{\left.\frac{du}{dt}\right|_\Sigma \;=\; \left.\frac{du}{dt}\right|_{\Sigma'} \;+\; \omega\times u} \tag{2.3.6}$$

ove ω è la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ.

Dimostrazione. Calcoliamo la derivata di u rispetto a Σ usando l'espressione $u = \sum_i u_i' e_i'$. Naturalmente bisogna tenere conto del fatto che anche i vettori e_i' non sono costanti rispetto a Σ:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{du}{dt}\right|_\Sigma &= \sum_{i=1}^{3}\dot u_i'\, e_i' \;+\; \sum_{i=1}^{3} u_i' \left.\frac{de_i'}{dt}\right|_\Sigma \\
&= \left.\frac{du}{dt}\right|_{\Sigma'} \;+\; \sum_{i=1}^{3} u_i'\, \omega\times e_i' \qquad \text{[per (2.3.1) e (2.3.2)]} \\
&= \left.\frac{du}{dt}\right|_{\Sigma'} \;+\; \omega\times\sum_{i=1}^{3} u_i'\, e_i'
\end{aligned}$$

che dà la (2.3.6). ■

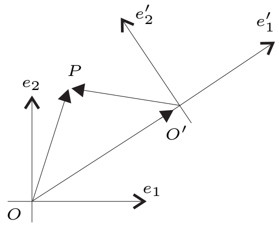
Osservazione: Secondo l'uguaglianza (2.3.6), se due riferimenti ruotano l'uno rispetto all'altro (nel senso preciso che la loro velocità angolare è diversa da zero) allora le derivate temporali di uno stesso vettore sono in generale diverse. Vi è però un'eccezione: la (2.3.6) implica che la derivata temporale del vettore velocità angolare è la stessa nei due riferimenti:

$$\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_\Sigma \;=\; \left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{\Sigma'}\,;$$

scriveremo allora semplicemente $\dot\omega$.

Esercizi 2.3.2 Si considerino tre riferimenti Σ, Σ' e Σ'' e si supponga che Σ' abbia velocità angolare ω' rispetto a Σ e che Σ'' abbia velocità angolare ω'' rispetto a Σ'. Mostrare che la velocità angolare ω di Σ'' rispetto a Σ è uguale a $\omega' + \omega''$.

B. Equazioni del moto in riferimenti diversi. Possiamo adesso confrontare le velocità v^Σ e $v^{\Sigma'}$ e le accelerazioni a^Σ e $a^{\Sigma'}$ di un punto materiale relative a due diversi sistemi di riferimento Σ e Σ'. Per alleggerire la notazione, scriveremo v ed a invece di v^Σ ed a^Σ e v' ed a' invece di $v^{\Sigma'}$ ed $a^{\Sigma'}$.



Proposizione 19 *Velocità ed accelerazioni nei due riferimenti sono legate dalle relazioni*

$$\begin{aligned} v &= v' + v^T && (2.3.7)\\ a &= a' + a^T + a^C\,, && (2.3.8)\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} v^T &= v_{O'} + \omega \times O'P \\ a^T &= a_{O'} + \omega \times \big[\omega \times O'P\big] + \dot\omega \times O'P \\ a^C &= 2\,\omega \times v' \end{aligned}$$

ove ω è la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ e $v_{O'}$ ed $a_{O'}$ sono la velocità e l'accelerazione di O' in Σ.

Le grandezze v^T ed a^T sono indipendenti dal moto del punto P e si chiamano, rispettivamente, *velocità di trascinamento* ed *accelerazione di trascinamento* (sono la velocità e l'accelerazione rispetto a Σ che il punto P avrebbe se, essendo in quiete in Σ', fosse da questo trascinato). La quantità a^C, che è nulla se P è in quiete rispetto a Σ', è l'*accelerazione di Coriolis.* L'uguaglianza (2.3.8) è chiamata a volte "teorema di Coriolis".

Dimostrazione. Derivando rispetto al tempo nel riferimento Σ entrambi i membri dell'identità

$$OP \;=\; OO' \;+\; O'P$$

ed osservando che

$$v \;=\; \frac{dOP}{dt}\Big|_\Sigma\,, \qquad v_{O'} \;=\; \frac{dOO'}{dt}\Big|_\Sigma \qquad \text{e} \quad v' \;=\; \frac{dO'P}{dt}\Big|_{\Sigma'}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} v &= \frac{dOO'}{dt}\Big|_\Sigma + \frac{dO'P}{dt}\Big|_\Sigma \\ &= v_{O'} \;+\; \frac{dO'P}{dt}\Big|_{\Sigma'} \;+\; \omega \times O'P \\ &= v_{O'} \;+\; v' \;+\; \omega \times O'P \end{aligned}$$

che prova $v = v' + v^T$. (Nella seconda riga si è ovviamente usata la (2.3.6)). Siccome

$$a \;=\; \frac{dv}{dt}\Big|_\Sigma\,, \qquad a_{O'} \;=\; \frac{dv_{O'}}{dt}\Big|_\Sigma \qquad \text{ed} \quad a' \;=\; \frac{dv'}{dt}\Big|_{\Sigma'}$$

derivando relativamente a Σ i due membri di $v = v_{O'} + v' + \omega \times O'P$ abbiamo

$$a \;=\; a_{O'} \;+\; \frac{dv'}{dt}\Big|_\Sigma \;+\; \frac{d\big(\omega \times O'P\big)}{dt}\Big|_\Sigma\,.$$

Calcoliamo gli ultimi due termini usando la (2.3.6):

$$\begin{aligned} \frac{dv'}{dt}\Big|_{\Sigma} &= \frac{dv'}{dt}\Big|_{\Sigma'} + \omega \times v' = a' + \omega \times v' \\ \frac{d(\omega \times O'P)}{dt}\Big|_{\Sigma} &= \frac{d\omega}{dt}\Big|_{\Sigma} \times O'P + \omega \times \frac{dO'P}{dt}\Big|_{\Sigma} \\ &= \dot{\omega} \times O'P + \omega \times \big(v' + \omega \times O'P\big) \end{aligned}$$

Mettendo insieme i diversi pezzi si trova la (2.3.8). ■

Usando le formule di trasformazione di velocità ed accelerazione (2.3.7) e (2.3.8), possiamo ora confrontare le equazioni del moto di un punto materiale in due riferimenti Σ e Σ'. Come prima, indichiamo con v ed a velocità ed accelerazione del punto rispetto a Σ e con v' ed a' quelle rispetto a Σ'.

Proposizione 20 *Supponiamo che il moto $t \mapsto OP(t)$ di un punto materiale in un riferimento $\Sigma = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ soddisfi l'equazione di Newton*

$$ma = F(OP, v, t)\,. \tag{2.3.9}$$

Sia $\Sigma' = \{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ un altro riferimento, in moto rispetto a Σ con accelerazione di trascinamento a^T ed accelerazione di Coriolis α^C. Allora, in Σ', il moto $t \mapsto O'P(t)$ del punto materiale soddisfa l'equazione

$$ma' = F(O'P + OO', v' + v^T, t) - ma^T - ma^C\,. \tag{2.3.10}$$

Dimostrazione. Basta scrivere a, OP e v in termini di a', OP' e v'. ■

Così, il passaggio ad un sistema di riferimento in moto introduce delle forze aggiuntive, la *forza di trascinamento* $-ma^T$ e la *forza di Coriolis* $-ma^C$. Queste forze sono chiamate "forze apparenti" o "forze d'inerzia". Il termine $\omega \times [\omega \times x']$ che compare nella forza di trascinamento si chiama *forza centrifuga.*

Osservazioni: (i) Se due sistemi di riferimento traslano di moto rettilineo uniforme con velocità relativa costante V, allora la legge di trasformazione delle velocità (2.3.7) diventa

$$v = v' + V$$

e si chiama *formula di Galilei.* Siccome in queste condizioni $a = a'$, la Proposizione 20 mostra che le equazioni del moto di un sistema meccanico sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Questa affermazione costituisce il cosiddetto *pincipio di invarianza galileiana.* In particolare, se esiste un sistema di riferimento inerziale, allora ogni altro sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso è pure inerziale.

(ii) Nel passaggio dalla (2.3.9) alla (2.3.10) si è tacitamente assunto che il campo di forza F resti invariato, cosicché la forza nel nuovo riferimento è quella nel vecchio (scritta nelle coordinate giuste) più le forze d'inerzia. Quest'ipotesi, di natura Fisica, costituisce il cosiddetto la *principio di invarianza galileiana*, la veridicità del quale può solo essere dimostrata sperimentalmente. In effetti, è importante avvertire che questo principio *non* è vero in generale, perchè non è soddisfatto dalla forze elettromagnetiche (si veda un esercizio più sotto). Che questo avvenga, si capisce già pensando che una particella carica crea solamente un campo elettrico in un riferimento nel quale essa è in quiete, ma anche un campo magnetico in un riferimento nel quale essa è in moto. La soluzione di questi problemi ha mostrato che la Meccanica Classica è solo approssimativamente vera, ed ha condotto alla formulazione di una teoria più generale (e "più vera"). Questa teoria è la Relatività Ristretta, della quale la Meccanica

Classica è una approssimazione—buona, se le velocità delle particelle sono piccole rispetto a quella della luce.

Esercizi 2.3.3 (i) Mostrare che la forza centrifuga è uguale $-m|\omega|^2 x_\perp$, ove $x_\perp$ è la proiezione del vettore x' sul piano ortogonale ad ω.

(ii) Mostrare che la forza centrifuga $-m\omega \times (\omega \times x')$ è conservativa con energia potenziale $-\frac{1}{2}\, m|\omega \times x'|^2$.

(iii) Mostrare che se Σ e Σ' sono due riferimenti inerziali, allora necessariamente essi traslano con velocità costante l'uno rispetto all'altro (cioè $\omega = 0$ ed $a_{O'} = 0$).

(iv) Siano Σ e Σ' due sistemi di riferimento inerziali e siano $x(t)$ ed $x'(t)$ le coordinate di un punto P in questi due riferimenti (definite come nella sezione 1.1.A: $OP = \sum_i x_i e_i$, $O'P = \sum_i x'_i e'_i$). Mostrare che

$$x'(t) \;=\; R\,x(t) + v_0 t + x_0$$

con qualche $R \in \mathrm{SO}(3)$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ e $v_0 \in \mathbb{R}^3$ indipendenti da t. (Questo è un caso particolare di "trasformazione di Galilei": il caso generale permette anche una traslazione dell'origine dei tempi usati dai due osservatori).

(v) La forza agente su una particella di carica elettrica e che si muove con velocità v in un campo magnetico B è la forza di Lorentz $ev \times B$. Si supponga allora che un punto materiale si muova in un riferimento Σ secondo l'equazione

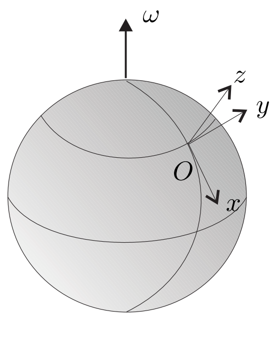
$$ma \;=\; ev \times B$$

con B costante. Quale è l'equazione del moto in un altro riferimento Σ' che trasla con velocità costante v^T rispetto a Σ? Mostrare che non si può scriverla come l'equazione del moto di un punto soggetto alla forza di Lorentz creata da un campo magnetico B'. (In effetti, compare anche un campo elettrico – una situazione spiegata dalla relatività ristretta).

(vi) *Dinamica in una giostra.* Supponiamo che il riferimento $\Sigma = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ abbia l'origine O e l'asse e_3 fermi rispetto ad un riferimento inerziale e ruoti, rispetto a tale riferimento, con velocità angolare costante $\omega = \Omega e_3$. Scrivere le equazioni del moto in Σ di un punto materiale sul quale non agisce alcuna forza nel riferimento inerziale.

C. Esempi: dinamica in un riferimento terrestre. Siamo interessati alla descrizione dei fenomeni meccanici in un riferimento $\Sigma = \{O; e_x, e_y, e_z\}$ solidale alla superficie della terra. (Attenzione: abbiamo tolto l'apice!). Facciamo le seguenti assunzioni:

- Il moto del sole rispetto ad un riferimento inerziale è trascurabile. (La velocità di questo moto è alta, ma le sue variazioni sono piccole).
- Il moto di rivoluzione della terra attorno al sole è trascurabile. (La forza centrifuga dovuta alla rivoluzione terrestre *non* è affatto trascurabile ma, per moti vicini alla superficie terrestre, è approssimativamente bilanciata dall'attrazione gravitazionale del sole). Dunque, pensiamo che il centro della terra C sia in quiete in un riferimento inerziale.
- La rotazione della terra ha velocità angolare costante ω rispetto ad un riferimento inerziale.



Sotto queste ipotesi (che sono ragionevoli per moti che abbiano luogo vicino alla superficie terrestre e che non durino troppo a lungo) l'accelerazione di trascinamento si riduce a

$$a^T \;=\; a_O + \omega \times [\omega \times (P - O)]$$

ove ω è la velocità angolare della terra. Siccome in questa approssimazione ogni punto solidale alla terra compie un moto circolare uniforme con velocità angolare ω si ha $a_0 = \omega \times (\omega \times (O - C))$, ove C è il centro della terra. Dunque,

$$a^T \;=\; \omega \times \Big[\omega \times [(P - O) + (O - C)]\Big]\,.$$

Supponiamo ora di essere interessati a moti che si svolgono vicino alla superficie terrestre e prendiamo l'origine O del riferimento sulla superficie terrestre. Il termine $P - O$ è allora molto piccolo rispetto a $C - O$ e lo trascureremo, cosicché la forza di trascinamento è

$$ma^T \;=\; m\omega \times \Big[\omega \times (O - C)\Big] \tag{2.3.11}$$

ed è allora costante. Se R è il raggio della terra e λ la latitudine di O, tale forza ha modulo $R|\omega|^2 \cos\lambda$ ed è diretta ortogonalmente all'asse terrestre. In tutte le esperienze, l'effetto di questa forza forza centrifuga si somma all'attrazione gravitazionale terrestre, provocando una diminuzione dell'accelerazione di gravità ed una sua rotazione. Si può allora semplicemente inglobare la forza centrifuga (2.3.11) nella forza peso, convenendo di indicare con g l'accelerazione risultante, e riguardare la direzione della risultante di queste due forze, che è la direzione del filo a piombo, come la verticale locale. In queste approssimazioni, e con questa convenzione su g, l'equazione del moto di un punto materiale soggetto solo alla forza peso è

$$a \;=\; g - 2\,\omega \times v\,. \tag{2.3.12}$$

L'accelerazione di Coriolis presente in questa equazione può avere effetti anche molto importanti. Studiamo alcuni casi.

Caduta dei gravi. L'effetto della rotazione terrestre sul moto di caduta di un punto è di solito molto piccolo, raramente osservabile, ma è un utile esercizio calcolarlo. Se si suppone che il punto sia lasciato cadere dall'altezza h con velocità nulla, si deve studiare l'equazione (2.3.12) con le condizioni iniziali

$$x_0 = he_z\,, \qquad v_0 = 0\,.$$

Si può procedere in due modi:

1) Perturbativamente, con un'integrazione approssimata, basata sull'idea che la accelerazione di Coriolis è piccola rispetto a g. Si veda BGG, sezione 2.6.5.

2) L'equazione (2.3.12) è lineare, e la si può integrare esattamente. Indichiamo il procedimento (lasciando qualche conto come esercizio). Usiamo un sistema di coordinate con l'asse z diretto come la verticale locale, l'asse x tangente al meridiano e diretto da nord a sud, e l'asse y tangente al parallelo, verso Est. Scriviamo dappertutto s per $\sin\lambda$ e c per $\cos\lambda$, ove λ è la latitudine. Nelle coordinate scelte si ha

$$g \;=\; (0, 0, -|g|) \quad \text{ed} \quad \omega \;=\; (-c\,|\omega|, 0, s\,|\omega|)\,.$$

Nel seguito, per brevità, scriviamo g invece di $|g|$ ed ω invece di $|\omega|$. Scritte in coordinate, le equazioni del moto sono allora

$$\ddot{x} \;=\; 2\omega s\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} \;=\; -2\omega s\dot{x} - 2\omega c\dot{z}\,, \qquad \ddot{z} \;=\; -g + 2\omega c\dot{y}\,, \tag{2.3.13}$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = y(0) = 0\,, \qquad z(0) = h, \qquad \dot{x}(0) \;=\; \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0\,.$$

La prima e l'ultima equzione (2.3.13) si possono integrare una volta, ottenendo

$$\dot{x}(t) \;=\; 2\omega s y(t)\,, \qquad \dot{z}(t) = -gt + 2\omega c y(t)\,. \tag{2.3.14}$$

Sostituendo queste espressioni nella seconda (2.3.13), questa diviene

$$\ddot{y} = -4\omega^2 y + 2\omega c g t\,.$$

Questa equazione lineare non omogenea ha l'integrale generale

$$y(t) \;=\; A\cos(2\omega t) + B\sin(2\omega t) + \frac{cg}{2\omega}t$$

dove A e B sono costanti arbitrarie da determinare imponendo le condizioni iniziali; si trova così

$$y(t) \;=\; -\frac{cg}{4\omega^2}\Big[\sin(2\omega t) - 2\omega t\Big]\,. \tag{2.3.15}$$

Sostituendo questa espressione nelle (2.3.14) ed integrando, tenendo ancora una volta conto delle condizioni iniziali, si trovano infine le

$$x(t) = -\frac{csg}{4\omega^2}\Big[1-\cos(2\omega t)-\frac{1}{2}(2\omega t)^2\Big] \tag{2.3.16}$$

$$z(t) = h-\frac{1}{2}gt^2-\frac{c^2g}{4\omega^2}\Big[1-\cos(2\omega t)-\frac{1}{2}(2\omega t)^2\Big] \tag{2.3.17}$$

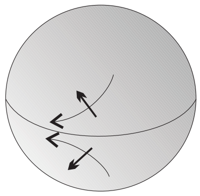
che completano la soluzione.

Esercizi 2.3.4 (i) Per quali velocità la forza di Coriolis è superiore alla forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre (ed inglobata nella gravità locale)? (Basta una stima).

(ii) Perchè nel moto di caduta di un grave vicino alla superficie terrestre non si osservano le oscillazioni sinusoidali previste dalle (2.3.15)–(2.3.17)?

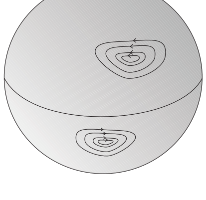
(iii) Se $\omega t \ll 1$, si può sviluppare in serie di Taylor la soluzione (2.3.15)–(2.3.17). Che relazione c'è fra questo sviluppo e la soluzione approssimata ottenuta in BGG, sezione 2.6.5? Perchè?

(iv) Nel 1903 furono eseguiti degli esperimenti di caduta dei gravi nel Pantheon di Parigi per misurare gli effetti della rotazione terrestre. La deviazione verso Est misurata, mediando su 72 prove, fu di 7.6 mm, contro circa 8 mm teorici. Quanto è alto il Pantheon?



Moti tangenti alla superficie terrestre – Fenomeni atmosferici. Si vede subito, con la regola della mano destra, che se un punto materiale si muove sulla superficie terrestre (cioè con velocità ad essa tangente) allora la componente della forza di Coriolis tangente alla superficie terrestre è diretta verso destra (nel senso del moto) se il punto si muove nell'emisfero settentrionale, verso sinistra nell'emisfero meridionale.

Pur essendo relativamente debole, per moti di velocità, diciamo, di qualche decina o anche centinaio di metri al secondo, l'effetto della forza di Coriolis può però accumularsi nel caso di moti che hanno luogo su lunghe distanze. Si produce in questo modo una deviazione verso destra, o verso sinistra, a seconda dell'emisfero, che può avere effetti importantissimi. Questo avviene, in particolare, nel caso della circolazione atmosferica (venti) ed oceanica (correnti e maree) su larga scala, che è infatti pesantemente influenzata dalla forza di Coriolis.



Cicloni ed Anticicloni. Una trattazione dettagliata dei fenomeni atmosferici esula dal nostro corso perchè si tratta di fuidodinamica. Tuttavia, può essere opportuno fare qualche esempio. Basta sapere che il moto orizzontale, nell'atmosfera, è determinato dalle differenze di pressione: la forza agente su una particella d'aria è la somma di $-\rho\,\mathrm{grad}p$ e della forza di Coriolis. Allora, configurazioni stazionarie (cioè con un campo di velocità che, in ogni punto, non cambia nel tempo) sono possibili quando $-\mathrm{grad}p$ è parallelo ed opposto a $\omega \times v$. Poichè $\mathrm{grad}p$ è ortogonale alle isobare, questo può avvenire solo se v è tangente ad esse. Questa situazione di equilibrio è effettivamente incontrata in cicloni ed anticicloni. Un ciclone si verifica attorno ad un minimo della pressione: le isobare sono chiuse, e la forza $-\rho\,\mathrm{grad}p$ è diretta verso il minimo. Pertanto, questa forza può essere bilanciata dalla forza di Coriolis se la circolazione è antioraria nell'emisfero nord, oraria in quello sud. Un anticiclone ha luogo attorno ad un massimo della pressione, e così è percorso in senso inverso.

Alisei. Uno sguardo ad una carta geografica che mostra la direzione degli alisei è sufficiente per rendersi conto dell'importanza della forza di Coriolis. (Vedere per esempio la voce "Alisei" sulla Enciclopedia della Scienza e della Tecnica (EST), Mondadori.)

Pendolo di Focault: si veda BGG, sezione 2.6.6.

Esercizi 2.3.5 Perchè i cicloni possono avere effetti distruttivi mentre questo non accade per gli anticicloni?

2.4 Sistemi di punti. Equazioni di Lagrange

A. Sistemi di punti. Consideriamo adesso un sistema costituito da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$. Siano x_h il vettore posizione e $\dot{x}_h$ la velocità del punto P_h in un certo sistema di riferimento nel quale descriviamo il sistema. Le equazioni del moto sono le N equazioni di Newton

$$m_h \ddot{x}_h \;=\; f_h(x_1, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, t)\,, \qquad h = 1, \ldots, 3N \tag{2.4.1}$$

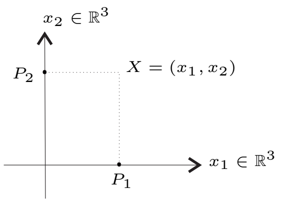
ove $f_h(x_1, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, t)$ è la forza che agisce sul punto h–mo nel riferimento considerato.

Chiameremo *configurazione* del sistema il vettore

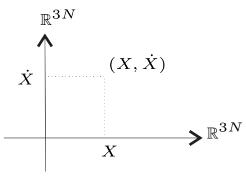
$$X \;=\; (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N}\,,$$

(le prime tre componenti di X sono le componenti di x_1, le seconde tre sono le componenti di x_2, etc), *velocità* del sistema il vettore

$$\dot{X} \;=\; (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}\,,$$



Spazio delle configurazioni



Spazio degli atti di moto

ed *atto di moto* del sistema il vettore

$$(X, \dot{X}) \in \mathbb{R}^{6N}\,.$$

Corrispondentemente, parleremo di *spazio delle configurazioni* $\mathbb{R}^{3N} \ni X$ e di *spazio degli atti di moto* $\mathbb{R}^{6N} \ni (X, \dot{X})$. La dimensione $n = 3N$ dello spazio delle configurazioni è il *numero dei gradi di libertà* del sistema.[7]

Siccome le equazioni del moto sono un'equazione del secondo ordine per il vettore configurazione $X \in \mathbb{R}^{3N}$, ovvero del primo ordine per il vettore atto di moto $(X, \dot{X})$, si capisce che gli spazi delle configurazioni e degli atti di moto svolgono un ruolo naturale nello studio del sistema.

Al fine di scrivere in modo compatto le equazioni del moto in questi spazi introduciamo inoltre il vettore 'forza'

$$F \;=\; (f_1, \ldots, f_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

e la matrice delle masse, diagonale $3N \times 3N$,

$$M \;=\; \mathrm{diag}\,(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \ldots, m_N, m_N, m_N)$$

(tre repliche di ogni massa). Allora, il sistema (2.4.1) si scrive

$$M \ddot{X} \;=\; F(X, \dot{X}, t) \tag{2.4.2}$$

ovvero, in componenti, $M_\alpha \ddot{X}_\alpha = F_\alpha(X, \dot{X}, t)$, $\alpha = 1, \ldots, 3N$.

B. Coordinate lagrangiane. Come si è detto, vorremmo poter usare delle coordinate qualunque sullo spazio delle configurazioni (o su suoi sottoinsiemi).

Ricordiamo che un sistema di coordinate in un aperto $\tilde{U}$ dello spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^{3N}$ è un diffeomorfismo

$$\tilde{X} \;:\; U \;\to\; \tilde{U}\,, \qquad q \;\mapsto\; \tilde{X}(q) = \big(\tilde{x}_1(q), \ldots, \tilde{x}_N(q)\big)$$

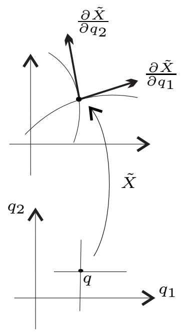
[7] Il motivo per il quale usiamo entrambi i simboli, $3N$ ed n, è per poter adattare quanto più possibile della presente trattazione al caso dei sistemi vincolati, studiati nel prossimo capitolo, nel quale $n < 3N$.

ove U è un aperto in $\mathbb{R}^n$. (Si ricordi che $n = 3N$). Le 'coordinate' di un punto $X \in \tilde{U}$ sono la n–upla $q = (q_1, \dots, q_n)$ tale che $X = \tilde{X}(q)$. Per distinguerle dalle coordinate cartesiane $X = (X_1, \dots, X_{3N})$, in meccanica esse sono tradizionalmente chiamate *coordinate generalizzate* o *coordinate lagrangiane*.

Ricordiamo che se $\tilde{X} : U \to \tilde{U}$ è un diffeomorfismo allora la sua matrice Jacobiana è invertibile:

$$\det\Big(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q)\Big) \neq 0 \qquad \forall q \in U\,.$$

Grazie a questo, l'introduzione di un sistema di coordinate sullo spazio delle configurazioni permette di introdurne anche sullo spazio degli atti di moto. Questo si può vedere in due modi equivalenti:



1) Infatti, l'invertibilità della matrice Jacobiana significa che le sue n colonne, cioè i vettori

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}(q)\,,\; \dots\,,\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}(q)$$

sono linearmente indipendenti e dunque, in ogni punto, possono essere usati come base per lo spazio dei vettori velocità: l'atto di moto di coordinate $(q, w) = (q_1, \dots, q_n, w_1, \dots, w_n)$ è allora

$$\Big(\tilde{X}(q), \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q) w_i\Big)\,.$$

Per brevità di notazione scriveremo

$$\tilde{W}(q, w) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q) w_i \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q) w \tag{2.4.3}$$

(nell'ultima espressione è sottinteso che il prodotto fra la matrice $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}$ ed il vettore w è quello righe per colonne).

2) Consideriamo una curva $t \mapsto X^t \in \tilde{U}$. La rappresentativa di questa curva nelle coordinate q è la curva $t \mapsto q^t$ tale che $\tilde{X}(q^t) = X^t\ \forall t$. (Essa è univocamente definita perchè $\tilde{X}$ è biunivoca). Le velocità $\dot{X}^t$ e $\dot{q}^t$ delle due curve solo legate dalla

$$\dot{X}^t \;=\; \frac{d}{dt}\tilde{X}(q_t) \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q_t)\dot{q}_t \;=\; \tilde{W}(q_t, \dot{q}_t)\,. \tag{2.4.4}$$

(Volendo, si può riguardare questa operazione come il 'sollevamento' agli spazi tangenti del cambio di coordinate: si veda la sezione 1.6.B).

In meccanica è tradizione denotare le coordinate per le velocità $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$; esse si chiamano 'velocità generalizzate'. Dunque, l'atto di moto di coordinate $(q, \dot{q})$ è $\big(\tilde{X}(q)\,,\ \tilde{W}(q, \dot{q})\big)$.

Osservazioni: (i) Il motivo soggiacente l'uso di $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}$ come vettori di base per lo spazio delle "velocità" è il seguente. Questi vettori sono le derivate delle n 'curve coordinate'

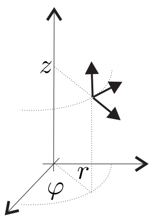
$$\lambda \mapsto (q_1 + \lambda, q_2, \dots, q_n)\,,\; \dots\,,\; \lambda \mapsto (q_1, q_2, \dots, q_n + \lambda)\,.$$

Come si sa, le derivate di curve a valori in $\tilde{U}$ sono vettori tangenti ad $\tilde{U}$. Dunque, per ogni q, $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}(q), \dots, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}(q)$ vanno pensati come vettori tangenti a $\tilde{U}$ in $\tilde{X}(q)$. In ogni punto di $\tilde{U}$, essi costituiscono dunque una base per lo spazio tangente ad $\tilde{U}$.

(ii) I vettori $\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial\tilde{X}}{\partial q_n}$ sono mutualmente ortogonali se e solo se le curve coordinate si intersecano ortogonalmente; in questo caso si parla di coordinate ortogonali.

(iii) Secondo la (2.4.4), per calcolare $\tilde{W}(q,\dot{q})$, ovvero per esprimere la velocità in funzione delle coordinate e delle velocità generalizzate $(q,\dot{q})$, si può semplicemente scrivere la parametrizzazione $q \mapsto \tilde{X}(q)$ e, pensando che q sia funzione di t, derivarla rispetto a t.

Esempio: Scriviamo le equazioni del moto di un punto materiale soggetto ad un campo di forze $f(x,y,z)$ usando coordinate cilindriche (r,φ,z). In questo caso



$$\tilde{X}(r,\varphi,z) \;=\; (r\cos\varphi,\, r\sin\varphi,\, z)$$

ed i vettori tangenti alle curve coordinate sono

$$\frac{\partial\tilde{X}}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,, \qquad \frac{\partial\tilde{X}}{\partial\varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)\,, \qquad \frac{\partial\tilde{X}}{\partial z} = (0,0,1)\,.$$

Dunque, la velocità del punto nell'atto di moto di coordinate $(r,\varphi,z,\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z})$ è

$$\tilde{W}(r,\varphi,z,\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z}) \;=\; \dot{r}\frac{\partial\tilde{X}}{\partial r} + \dot{\varphi}\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\varphi} + \dot{z}\frac{\partial\tilde{X}}{\partial z} \;=\; \Big(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,\, \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi,\, \dot{z}\Big)\,.$$

(Si osservi che si può ottenere questa espressione semplicemente pensando di derivare la $t \mapsto \tilde{X}(r_t,\varphi_t,z_t)$ lungo un moto $t \mapsto (r_t,\varphi_t,z_t)$.)

Per ottenere le equazioni del moto in coordinate cilindriche dovremmo ancora esprimere le accelerazioni $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$ in termini delle nuove coordinate e delle loro derivate e sostituire queste espressioni nelle equazioni di Newton

$$m\ddot{x} \;=\; f_x\,, \qquad m\ddot{y} \;=\; f_y\,, \qquad m\ddot{z} \;=\; f_z\,.$$

C'è però anche un'altra possibilità, appena diversa, che come vedremo è quella che porta alle equazioni di Lagrange: si proiettano le equazioni di Newton sulla base costituita dai tre vettori $\frac{\partial\tilde{X}}{\partial r}, \frac{\partial\tilde{X}}{\partial\varphi}, \frac{\partial\tilde{X}}{\partial z}$. Per semplificare appena i conti possiamo equivalentemente utilizzare i versori (normalizzati ad uno) tangenti alle curve coordinate, cioè

$$e_r = \frac{\partial\tilde{X}}{\partial r}\,, \qquad e_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{X}}{\partial r}\,, \qquad e_z = \frac{\partial\tilde{X}}{\partial z}\,.$$

La velocità del punto in un moto è allora $\dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi + \dot{z}e_z$. Derivando ancora, ed osservando che

$$\dot{e}_r = \dot{\varphi}\,e_\varphi\,, \qquad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\,e_r\,, \qquad \dot{e}_z = 0\,,$$

si trova che la sua accelerazione è

$$\ddot{X} \;=\; (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})e_\varphi + \ddot{z}e_z\,.$$

Se scomponiamo la forza $f = (f_x, f_y, f_z)$ sulla base e_r, e_φ, e_z,

$$f \;=\; f_r e_r + f_\varphi e_\varphi + f_z e_z$$

ove $f_r = f\cdot e_r = f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi$ e ove $f_\varphi = f\cdot e_\varphi = -f_x\sin\varphi + f_y\cos\varphi$, abbiamo infine

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f_r\,, \qquad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = f_\varphi\,, \qquad m\ddot{z} = f_z\,. \tag{2.4.5}$$

Esercizi 2.4.1 (i)* Verificare che $(q,\dot{q}) \;\mapsto\; (\tilde{X}(q), \tilde{W}(q,\dot{q}))$ è un sistema di coordinate in $\tilde{U}\times\mathbb{R}^{3N}$.

C. L'energia cinetica. Come vedremo, per scrivere le equazioni di Lagrange è necessario determinare l'energia cinetica del sistema, cioè la somma delle energie cinetiche dei suoi punti, scritta in funzione delle coordinate lagrangiane $(q,\dot{q})$. Si ha

Proposizione 21 *L'energia cinetica del sistema nell'atto di moto determinato da* $(q, \dot{q})$ *è*

$$T(q,\dot{q}) \;=\; \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A(q)\dot{q} \tag{2.4.6}$$

ove

$$A(q) \;=\; \Big[\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}(q)\Big]^T M\,\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}(q) \tag{2.4.7}$$

è una matrice $n\times n$ *simmetrica e definita positiva.*

Dimostrazione. L'energia cinetica del sistema nell'atto di moto $(X, \dot{X}) = (x_1, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N)$ è

$$\frac{1}{2}\,m_1|\dot{x}_1|^2 + \ldots + \frac{1}{2}\,m_N|\dot{x}_N|^2 \;=\; \frac{1}{2}\sum_\alpha M_\alpha \dot{X}_\alpha^2 \;=\; \frac{1}{2}\,\dot{X}\cdot M\dot{X}\,.$$

Dunque l'energia cinetica nell'atto di moto determinato da $(q, \dot{q})$ è

$$\begin{aligned} T(q,\dot{q}) \;&=\; \frac{1}{2}\,\tilde{W}(q,\dot{q})\cdot M\tilde{W}(q,\dot{q}) \\ &=\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}(q)\dot{q}\cdot M\,\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}(q)\dot{q} \\ &=\; \frac{1}{2}\,\dot{q}\cdot\Big[\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}(q)\Big]^T M\,\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}(q)\,\dot{q}\,. \end{aligned}$$

La matrice A è simmetrica perchè M lo è. Dire che la matrice A è definita positiva significa che $u\cdot Au > 0$ per tutti i vettori $u\in\mathbb{R}^n$, $u\neq 0$. Il calcolo appena fatto mostra che

$$u\cdot A(q)u \;=\; \tilde{W}(q,u)\cdot M\tilde{W}(q,u)$$

e questa quantità è > 0 se $u\neq 0$. Infatti, $\tilde{W}(q,u) = \frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}(q)u \neq 0$ se $u\neq 0$ (dato che $\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}$ è non singolare) e la matrice diagonale M è definita positiva (tutte le masse sono positive). ■

La matrice $A(q)$ si chiama *matrice cinetica* del sistema.

Osservazione: L'espressione (2.4.6) dell'energia cinetica è utile soprattutto per gli sviluppi formali. Per il calcolo esplicito dell'energia cinetica conviene in realtà procedere osservando che $T = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^N m_h|\dot{x}_h|^2$. La velocità della h–mo punto nell'atto di moto di coordinate $(q,\dot{q})$ è $\frac{\partial\tilde{x}_h}{\partial q}(q)\dot{q}$ e dunque

$$T(q,\dot{q}) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{h=1}^N m_h\Big|\frac{\partial\tilde{x}_h}{\partial q}(q)\dot{q}\Big|^2\,.$$

In pratica, basta dunque scrivere le velocità dei singoli punti materiali costituenti il sistema in funzione delle q e $\dot{q}$, ciò che si fa derivando le $\tilde{x}_h(q)$.

Esempi: (i) Consideriamo un punto materiale in $\mathbb{R}^3$ ed usiamo coordinate cilindriche. L'energia cinetica in coordinate cartesiane è

$$\tilde{T}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\,.$$

L'espressione dell'energia cinetica in un qualunque altro sistema di coordinate $q = (q_1,q_2,q_3) \mapsto (\tilde{x}(q),\tilde{y}(q),\tilde{z}(q))$ si ottiene esprimendo le velocità $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ in termini delle q e delle $\dot{q}$:

$$\dot{x} = \frac{\partial\tilde{x}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\tilde{x}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial\tilde{x}}{\partial q_3}\dot{q}_3$$

etc. Per esempio, in coordinate cilindriche (r,φ,z) si ha $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ e dunque

$$\dot{x} \;=\; \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\,, \qquad \dot{y} \;=\; \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\,, \qquad \dot{z} \;=\; \dot{z}\,.$$

Pertanto

$$T(r,\varphi,z,\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z}) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\,. \tag{2.4.8}$$

Si noti che la matrice cinetica è

$$A(r,\theta) \;=\; \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

(Volendo, l'espressione di T si può anche ottenere dall'espressione $v = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi + \dot{z}e_z$ della velocità, si veda l'esempio precedente, tenendo conto che i tre versori coordinati e_r, e_φ ed e_z sono ortogonali).

(ii) Verificare che l'energia cinetica di un punto materiale in coordinate sferiche è

$$T(r,\phi,\theta,\dot{r},\dot{\varphi},\dot{\theta}) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2)$$

(iii) Consideriamo un sistema costituito da due punti materiali di masse m_1 ed m_2. Denotiamo $r_1 = (x_1,y_1,z_1)$ e $r_2 = (x_2,y_2,z_2)$ i loro vettori posizione. Come coordinate nello spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^6$ usiamo il vettore posizione relativa e la posizione del centro di massa:

$$r = r_1 - r_2\,, \qquad R = \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{M} \qquad (M = m_1 + m_2)\,.$$

L'atto di moto di coordinate $(r,R,\dot{r},\dot{R})$ è allora

$$(r_1,r_2,\dot{r}_1,\dot{r}_2) = \Big(R + \frac{m_2}{M}r, R - \frac{m_1}{M}r, \dot{R} + \frac{m_2}{M}\dot{r}, \dot{R} - \frac{m_1}{M}\dot{r}\Big)\,.$$

Dunque, l'energia cinetica è

$$\frac{1}{2}\,m_1|\dot{r}_1|^2 + \frac{1}{2}\,m_2|\dot{r}_2|^2 \;=\; \frac{1}{2}\,m_1|\dot{R} + \frac{m_2}{M}\dot{r}|^2 + \frac{1}{2}\,m_2|\dot{R} - \frac{m_1}{M}\dot{r}|^2 \;=\; \frac{1}{2}\,M|\dot{R}|^2 + \frac{1}{2}\,\mu|\dot{r}|^2$$

ove $\mu = m_1m_2/M$ è la cosiddetta massa ridotta.

D. Le equazioni di Lagrange. Come accennato, le equazioni di Lagrange non sono altro che le equazioni di Newton scritte in funzione delle nuove coordinate e proiettate sulla base costituita dai vettori $\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q_n}$. In esse compaiono dunque le componenti in questa base del vettore forza $F = (f_1,\ldots,f_N)$: le cosiddette *componenti lagrangiane della forza,* o *forze generalizzate,*

$$\mathcal{Q}_i(q,\dot{q},t) \;:=\; F\big(\tilde{X}(q),\tilde{W}(q,\dot{q},t)\big)\,\cdot\,\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q_i}(q)\,, \qquad i = 1,\ldots,n\,.$$

Il nome forze generalizzate vuole sottolineare il fatto che ciascuna componente $\mathcal{Q}_i$ ha le dimensioni di una forza solo se la coordinata q_i ha le dimensioni di una lunghezza. Se la corrispondente coordinata lagrangiana è un angolo, per esempio, $\mathcal{Q}_i$ ha le dimensioni del momneto di una forza. Non insistiamo qui sul calcolo delle $\mathcal{Q}_i$ sia perchè incontreremo svariati esempi in seguito sia perchè, come vedremo nella sezione 2.4, se le forze sono conservative allora il loro calcolo si semplifica notevolmente.

Possiamo ora dedurre le equazioni di Lagrange:

Proposizione 22 *Sia $\tilde{X} : U \to \tilde{U}$ un sistema di coordinate in un aperto $\tilde{U}$ dello spazio delle configurazioni. Una curva $t \mapsto X^t \in \tilde{U}$ soddisfa $M\ddot{X}^t =$*

$F(X^t, \dot{X}^t, t)$ se e solo se la sua rappresentativa $t \mapsto q^t \in U$, definita da $X^t = \tilde{X}(q^t)$, soddisfa le "equazioni di Lagrange"

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(q^t, \dot{q}^t)\Big] - \frac{\partial T}{\partial q_i}(q^t, \dot{q}^t) \;=\; \mathcal{Q}_i\big(q^t, \dot{q}^t, t\big)\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2.4.9}$$

Queste sono equazioni del secondo ordine in $(q_1, \ldots, q_n)$ che possono essere messe in forma normale.

Dimostrazione. Nel corso della dimostrazione dovremo confrontare le funzioni X^t, $\tilde{X}(q^t)$ e le loro derivate. Notiamo allora che si ha, per ogni t:

$$\dot{X}^t = \frac{d}{dt}\big[X(q^t)\big] = \tilde{W}(q^t, \dot{q}^t)\,, \qquad \ddot{X}^t = \frac{d}{dt}\tilde{W}(q^t, \dot{q}^t) \tag{2.4.10}$$

ove, lo si ricordi, $\tilde{W}(q, \dot{q}) = \sum_j \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}(q)\dot{q}_j$; la prima uguaglianza segue da $X^t = \tilde{X}(q^t)$, la seconda non è altro che la (2.4.4) e la terza segue dalle prime due.

Per l'indipendenza lineare dei vettori $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}$, la $M\ddot{X}^t = F(X^t, \dot{X}^t, t)$ è equivalente alle n equazioni

$$\big[M\ddot{X}^t - F(X^t, \dot{X}^t, t)\big] \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q^t) \;=\; 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n$$

ovvero

$$M\ddot{X}^t \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q^t) \;=\; \mathcal{Q}_i(q^t, \dot{q}^t, t)\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Per provare che $t \mapsto q^t$ soddisfa le equazioni di Lagrange basta allora mostrare che per ogni $i = 1, \ldots, n$ e per ogni t risulta

$$M\ddot{X}^t \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q^t) \;=\; \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(q^t, \dot{q}^t)\Big] - \frac{\partial T}{\partial q_i}(q^t, \dot{q}^t)\,. \tag{2.4.11}$$

Calcoliamo dunque i due termini al secondo membro di questa equazione. Siccome M è simmetrica, abbiamo

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}(q, \dot{q}) \;=\; \frac{\partial}{\partial q_i}\Big[\frac{1}{2}\,M\tilde{W}(q, \dot{q}) \cdot \tilde{W}(q, \dot{q})\Big] \;=\; M\tilde{W}(q, \dot{q}) \cdot \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_i}(q, \dot{q})\,.$$

Similmente, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = M\,\tilde{W} \cdot \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \dot{q}_i}$. Osservando che

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \dot{q}_i} \;=\; \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}\dot{q}_j\big] \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}$$

troviamo dunque

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) \;=\; M\,\tilde{W}(q, \dot{q}) \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q)\,.$$

Calcoliamo ora questa espressione lungo la soluzione $t \mapsto q^t$ e deriviamola:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(q^t, \dot{q}^t)\Big] \;&=\; \frac{d}{dt}\Big[M\,\tilde{W}(q^t, \dot{q}^t) \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q^t)\Big] \\ &=\; M\ddot{X}^t \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q^t) + M\tilde{W}(q^t, \dot{q}^t) \cdot \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q^t)\Big]\end{aligned}$$

ove abbiamo usato la terza uguaglianza (2.4.10). Si osservi ora che

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q_i}(q^t)\Big] \;=\; \frac{\partial}{\partial q_i}\Big[\frac{d}{dt}\tilde{X}(q^t)\Big] \;=\; \frac{\partial\tilde{W}}{\partial q_i}(q^t,\dot{q}^t)\,.$$

ove la seconda uguaglianza segue ancora dalle (2.4.10). Concludiamo dunque

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(q^t,\dot{q}^t)\Big] \;=\; M\ddot{X}^t\cdot\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q_i}(q^t) + M\tilde{W}(q^t,\dot{q}^t)\cdot\frac{\partial\tilde{W}}{\partial q_i}(q^t,\dot{q}^t)\,.$$

Insieme all'espressione per $\frac{\partial T}{\partial q_i}$, questa prova la (2.4.11).

Dimostriamo infine che le equazioni di Lagrange si possono scrivere in forma normale. Per questo usiamo l'espressione (2.4.6) dell'energia cinetica, che dà

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \;=\; A\dot{q}$$

e dunque, lungo una curva $t\mapsto q^t$ (che omettiamo di indicare),

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \;=\; A\,\ddot{q} \;+\; c$$

ove c è un termine che dipende da q e $\dot{q}$ ma non da $\ddot{q}$ (la sua espressione esplicita si può desumere dagli esercizi). Quindi le equazioni di Lagrange hanno la forma

$$A\ddot{q} = \mathcal{Q} + \frac{\partial T}{\partial q} - c\,.$$

Siccome le funzioni a destra dell'uguale non contengono $\ddot{q}$ e la matrice A è invertibile, esse possono essere messe in forma normale: $\ddot{q} = A^{-1}\big[\mathcal{Q}+\frac{\partial T}{\partial q}-c\big]$. ■

Osservazioni: (i) Di solito, le equazioni di Lagrange si scrivono nella forma, simbolica,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \;=\; \mathcal{Q}_i\,, \qquad i=1,\ldots,n\,. \tag{2.4.12}$$

Naturalmente, come è reso evidente dalla notazione usata nella (2.4.9), qui si deve intendere che la derivata temporale "$\frac{d}{dt}$" va calcolata come se la funzione $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ fosse valutata lungo una curva $t\mapsto q_t$, ovvero

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \;=\; \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\ddot{q}_j \;+\; \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial q_j}\dot{q}_j\,.$$

(ii) Se le coordinate q sono definite solo localmente può avvenire che il moto $t\mapsto q_t$ esca dal dominio coordinato U ad un istante $t<\infty$. Se questo capita, si deve scegliere un altro sistema di coordinate locali e seguire il moto usando le equazioni di Lagrange scritte in queste coordinate.

Esempio: Scriviamo le equazioni di Lagrange di un punto di massa m soggetto a forze $f(x,y,z)$, usando coordinate cilindriche (r,φ,z). L'energia cinetica è data dalla (2.4.8), $T=\frac{1}{2}\,m\,(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$. Dunque

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} &= \frac{d}{dt}m\dot{r} \;=\; m\ddot{r}\,, & \frac{\partial T}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) \;=\; m(r^2\ddot{\varphi}+2r\dot{r}\dot{\varphi})\,, & \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} &= \frac{d}{dt}m\dot{z} \;=\; m\ddot{z}\,, & \frac{\partial T}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

Dunque, le equazioni di Lagrange sono

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \mathcal{Q}_r\,, \qquad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = \mathcal{Q}_\varphi\,, \qquad m\ddot{z} = \mathcal{Q}_z\,.$$

Si confronti con (2.4.5), tenendo conto che $\mathcal{Q}_r = f_r$, $\mathcal{Q}_\varphi = rf_\varphi$ e $\mathcal{Q}_z = f_z$.

Si osservi che la seconda equazione di Lagrange, quella per la coordinata φ, si può scrivere anche

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \;=\; 0$$

ed è chiaramente una legge di conservazione: così, il metodo Lagrangiano produce "facilmente" degli integrali primi; questa situazione verrà studiata nel capitolo 4.

Esercizi 2.4.2 (i)* Mostrare che se $T = \frac{1}{2}\,\dot{q}\cdot A(q)\dot{q}$ allora le equazioni di Lagrange sono

$$\sum_{j=1}^{n}\left[A_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_j\dot{q}_k\right] \;-\; \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k \;=\; \mathcal{Q}_i$$

E. Coordinate dipendenti dal tempo. Consideriamo adesso, molto rapidamente, il caso di coordinate dipendenti dal tempo. Esso ha un certo interesse perchè, per esempio, l'uso di coordinate rotanti è abbastanza frequente.

Un 'sistema di coordinate dipendente dal tempo' è una mappa

$$\tilde{X}\;:\;U\times\mathbb{R}\;\to\;\tilde{U}\,, \qquad (q,t)\mapsto\tilde{X}(q,t)\,,$$

che dipende differenziabilmente da t ed è tale che, per ogni t fissato, la mappa

$$\tilde{X}(\cdot,t)\;:\;\tilde{U}\;\to\;U$$

è un diffeomorfismo (e dunque definisce coordinate su $\tilde{U}$).[8]

La principale differenza rispetto al caso delle usuali coordinate risiede nella parametrizzazione degli atti di moto. Infatti, la velocità di un moto $t\mapsto X_t = \tilde{X}(q_t,t)$ è

$$\dot{X}_t \;=\; \frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}(q_t,t)\dot{q}_t + \frac{\partial\tilde{X}}{\partial t}(q_t,t)\,.$$

Dunque, la velocità del sistema nell'atto di moto determinato dalle coordinate $(q,\dot{q})$ all'istante t è

$$\tilde{W}(q,\dot{q},t) \;:=\; \frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}(q,t)\dot{q} + \frac{\partial\tilde{X}}{\partial t}(q,t)\,. \tag{2.4.13}$$

(La si confronti con la (2.4.3): la velocità del sistema dipende adesso e dalla velocità con cui cambiano le sue coordinate e dalla velocità con la quale cambia la parametrizzazione).

Corrispondentemente, in coordinate dipendenti dal tempo, cambia anche l'espressione dell'energia cinetica:

Proposizione 23 *L'energia cinetica di un sistema in coordinate dipendenti dal tempo è*

$$T(q,\dot{q},t) \;=\; T_2(q,\dot{q},t) \;+\; T_1(q,\dot{q},t) \;+\; T_0(q,t) \tag{2.4.14}$$

ove

$$T_2(q,\dot{q},t) \;=\; \frac{1}{2}\,\dot{q}\cdot A(q,t)\dot{q}$$

[8]Volendo, si può vedere anche la sezione 1.6.C.

con $A = \left[\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\right]^T M \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}$ *simmetrica e definita positiva,*

$$T_1(q, \dot{q}, t) \;=\; b(q,t) \cdot \dot{q}$$

ove b *è un vettore* n*–dimensionale, e* T_0 *è una funzione (indipendente dalle* $\dot{q}$*).*

Dimostrazione. Usando l'espressione (2.4.13) di $\tilde{W}$ si trova

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M\tilde{W} \cdot \tilde{W} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}\Big) \cdot M\Big(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\dot{q} \cdot M\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \cdot M\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\dot{q} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \cdot M\,\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2}\,\dot{q} \cdot A\dot{q} + b \cdot \dot{q} + T_0 \end{aligned}$$

ove A è come sopra, le componenti di b sono

$$b_i \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \cdot M\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}$$

e la funzione T_0 è data da

$$T_0 \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \cdot M\,\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}\,.$$

■

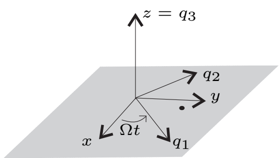
Esattamente come nel caso delle coordinate indipendenti dal tempo, si dimostra che anche in coordinate dipendenti dal tempo le equazioni di Newton $M\ddot{X} = F$ sono le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \;=\; \mathcal{Q}_i\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2.4.15}$$

L'unica differenza è che l'energia cinetica ha ora l'espressione (2.4.14). I pochissimi cambiamenti della dimostrazione della Proposizione 22 sono lasciati come esercizio. Anche adesso, la scrittura (2.4.15) è simbolica: si deve intendere

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j \;+\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j \;+\; \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t}\,.$$

Il primo termine a destra dell'= non è altro che la componente i–ma di $A(q,t)\ddot{q}$: la positiva definitezza della matrice cinetica assicura dunque che anche in questo caso le equazioni di Lagrange si possono mettere in forma normale.



Esempio: Dinamica in una giostra. Consideriamo un punto materiale sul quale non agisce alcuna forza in un sistema di riferimento $\{0; e_x, e_y, e_z\}$. Descriviamone però il moto in un sistema di coordinate $q = (q_1, q_2, q_3)$ che ruota con velocità angolare costante Ω attorno all'asse z. Allora

$$\tilde{X}(q,t) \;=\; \Big(q_1 \cos\Omega t - q_2 \sin\Omega t, q_2 \cos\Omega t + q_1 \sin\Omega t, q_3\Big)\,.$$

Allora

$$\tilde{W}(q,\dot{q},t) \;=\; \Big(c\dot{q}_1 - s\dot{q}_2 - \Omega s q_1 - \Omega c q_2, c\dot{q}_2 + s\dot{q}_1 - \Omega s q_2 + \Omega c q_1, \dot{q}_3)$$

ove $c = \cos(\Omega t)$ ed $s = \sin(\Omega t)$. L'energia cinetica $\frac{1}{2}\, m|\tilde{W}(q,\dot{q},t)|^2$ è dunque

$$T(q,\dot{q},t) \;=\; \frac{1}{2}\, m\Big[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \Omega^2(q_1^2+q_2^2) + 2\Omega(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)\Big]\,.$$

A conti fatti, le equazioni di Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = 0$ sono

$$m\ddot{q}_1 \;=\; m\Omega^2 q_1 + 2m\Omega\dot{q}_2\,, \qquad m\ddot{q}_2 \;=\; m\Omega^2 q_2 - 2m\Omega\dot{q}_1\,, \qquad m\ddot{q}_3 \;=\; 0\,. \qquad (2.4.16)$$

Si confronti questo risultato con il risultato dell'esercizio *2.3.3.vi.* Il passaggio a coordinate rotanti produce dunque dei termini, nelle equazioni del moto, che rappresentanto le forze di inerzia: la forza centrifuga $m\Omega^2(q_1,q_2,0)$ e la forza di Coriolis $2m\Omega(\dot{q}_2,-\dot{q}_1,0)$.

Esercizi 2.4.3 (i)* Mostrare che se l'energia cinetica T ha la forma (2.4.6) allora

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \;=\; \sum_{j=1}^n \Big[A_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_j\dot{q}_k + \frac{\partial b_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial A_{ij}}{\partial t}\dot{q}_j + \frac{\partial b_i}{\partial t}\Big]$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k \;+\; \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial q_i}\dot{q}_j \;+\; \frac{\partial T_0}{\partial q_i}\,.$$

2.5 La Lagrangiana

A. Forze conservative. Le equazioni di Lagrange si possono scrivere in una forma più semplice, e particolarmente importante, nel caso in cui le componenti lagrangiane della sollecitazione $\mathcal{Q}_i$ siano posizionali e conservative. Con questo, intendiamo dire che le $\mathcal{Q}_i$ non dipendono dalle $\dot{q}$ ed esiste una funzione $V(q,t)$, chiamata *energia potenziale*, tale che

$$\mathcal{Q}_i(q,t) \;=\; -\frac{\partial V}{\partial q_i}(q,t)\,, \qquad i=1,\ldots,n\,. \qquad (2.5.1)$$

Proposizione 24 *Le equazioni di Lagrange per un sistema di energia cinetica $T(q,\dot{q},t)$ e soggetto a forze posizionali e conservative di energia potenziale $V(q,t)$ si scrivono*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \;=\; 0\,, \qquad i=1,\ldots,n \qquad (2.5.2)$$

ove

$$L(q,\dot{q},t) \;:=\; T(q,\dot{q},t) \;-\; V(q,t)\,.$$

Dimostrazione. Siccome V non dipende dalle $\dot{q}$ si ha $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$ e conseguentemente $\mathcal{Q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q}$. ■

La funzione L si chiama *Lagrangiana* del sistema. La possibiltà di scrivere le equazioni di Lagrange per mezzo di una Lagrangiana, nella forma (2.5.2), è molto importante: come vedremo nel capitolo 4, per esse valgono molte proprietà che non valgono invece per il caso generale (2.4.12). In termini pratici, si vede che per scrivere le equazioni del moto di un sistema soggetto a forze conservative è sufficiente conoscerne l'energia cinetica e quella potenziale, scritte in funzione delle coordinate lagrangiane.

È immediato verificare che le componenti lagrangiane delle forze sono posizionali e conservative se e solo se lo è la forza $F = (f_1, \ldots, f_N)$, nel senso che esiste una funzione $\tilde{V}(X,t)$ tale che

$$F_\alpha(X,t) \;=\; -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial X_\alpha}(X,t)\,, \qquad \alpha = 1, \ldots, 3N\,, \tag{2.5.3}$$

ed in tal caso si ha

$$V(q,t) \;=\; \tilde{V}(\tilde{X}(q,t),t)\,.$$

(Infatti $\frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_\alpha \frac{\partial \tilde{V}}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \tilde{X}_\alpha}{\partial q_i} = -\sum_\alpha F_\alpha \frac{\partial \tilde{X}_\alpha}{\partial q_i} = -\mathcal{Q}_i$; il viceversa si dimostra scambiando i ruoli delle coordinate X e q). La (2.5.3) equivale al fatto che le forze che agiscono sulle singole particelle soddisfano

$$f_h(x_1, \ldots, x_N, t) \;=\; -\big(\mathrm{grad}_{x_h} \tilde{V}\big)(x_1, \ldots, x_N, t)\,. \tag{2.5.4}$$

Dunque, l'energia potenziale V o $\tilde{V}$ definita dalla (2.5.1) o (2.5.4) è l'energia potenziale di *tutte* le forze che agiscono sui punti del sistema, e come tale va calcolata; si vedano gli esempi più sotto.

Osservazione: Di solito, nei problemi che si studiano, l'energia potenziale non dipende dal tempo. Questo caso è importante perchè, come vedremo, porta alla conservazione dell'energia. Tuttavia, forze che derivano da un'energia potenziale dipendente dal tempo si incontrano frequentemente e sono fisicamente importanti: si pensi, per esempio, ad un una particella carica in un campo elettrico variabile, oppure semplicemente ad un sistema conservativo descritto in coordinate dipendenti dal tempo. Il fatto che situazioni di questo tipo si possano descrivere per mezzo di una Lagrangiana è dunque importante.

Esempio: forze interne ed esterne. In molte situazioni, le forze che agiscono su un sistema di punti materiali sono di due tipi: 'interne' ed 'esterne'. Le prime sono dovute all'interazione fra i punti che costituiscono il sistema e le seconde, ovviamente, alla loro interazione con oggetti che non si considerano parte del sistema. Il calcolo dell'energia potenziale delle forze interne va fatto con un po' di attenzione. Discutiamo i due casi separatamente.

(i) *Forze esterne.* Supponiamo che la forza f_h che agisce su ciascun punto P_h del sistema sia funzione solo della posizione di tale punto: $f_h = f(x_h)$. Supponiamo inoltre che ciascuna di queste forze sia conservativa, nel senso usuale della sezione 2.2.C: esiste una funzione $\tilde{V}_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che

$$f_h(x_h) \;=\; -\mathrm{grad}\tilde{V}_h(x_h)\,.$$

Allora le forze $(f_1, \ldots, f_N)$ agenti sul sistema sono conservative con energia potenziale $\tilde{V}(q) = \sum_{h=1}^N \tilde{V}_h(x_h)$ e, in un qualunque sistema di coordinate Lagrangiane $\tilde{X}(q) = (\tilde{x}_1(q), \ldots, \tilde{x}_N(q))$, l'energia potenziale è

$$V(q) = \sum_{h=1}^N \tilde{V}_h(\tilde{x}_h(q))\,.$$

Dunque, nel caso di forze esterne, per calcolare l'energia potenziale basta sommare le energie potenziali delle singole forze ed esprimerle in termini delle coordinate lagrangiane.

(ii) *Forze interne.* Un caso frequente (forze gravitazionali, forze coulombiane) è quello nel quale i punti del sistema interagiscono l'un con l'altro con forze di interazione 'a coppia'. Precisamente, supponiamo che ogni punto P_k eserciti una forza f_{hk} su ogni altro punto P_h e che queste forze:

- dipendano solo dalla posizione relativa $x_{hk} = x_h - x_k$ dei due punti: $f_{hk} = f_{hk}(x_{hk})$;

- siano conservative, nel senso che per ogni coppia di punti distinti P_h e P_k esista una funzione $\tilde{V}_{hk} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che
$$f_{hk} \;=\; -\mathrm{grad}\tilde{V}_{hk}$$
(dunque $f_{hk}(x_{hk})$ è il gradiente di $\tilde{V}_{hk}$ valutato in $x_h - x_k$);
- soddisfino il principio di azione e reazione, cioè $f_{hk}(x_{hk}) = -f_{kh}(x_{kh})$. Siccome $x_{hk} = -x_{kh}$ questo equivale (a meno di costanti additive) a
$$\tilde{V}_{hk}(x) = \tilde{V}_{kh}(-x)\,. \tag{2.5.5}$$

Per comodità di scrittura poniamo $f_{hh} = 0$ e $V_{hh} = 0$. Allora la forza agente sul punto P_h è
$$f_h(x_1, \ldots, x_N) \;=\; \sum_{k=1}^{N} f_{hk}(x_h - x_k)$$
ed è immediato verificare che si ha $f_h = -\mathrm{grad}_{x_h}\tilde{V}$ con
$$\tilde{V}(x_1, \ldots, x_N) \;:=\; \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{N} V_{hk}(x_h - x_k) \;=\; \sum_{h<k=1}^{N} V_{hk}(x_h - x_k)\,.$$
In un qualunque sistema di coordinate lagrangiane si ha poi $V(q) = \tilde{V}(\tilde{x}_1(q), \ldots, \tilde{x}_N(q))$. In questo caso, dunque, le forze sono conservative con un'energia potenziale $\tilde{V}$ che *non* è la somma di N termini V_h interpretabili ciascuno come energia potenziale delle forze che agiscono su un singolo punto. Nell'espressione di V, ciascun termine $V_{hk}(x_h - x_k)$ contribuisce sia alla forza che agisce su P_h che a quella che agisce su P_k, per derivazione una volta rispetto ad x_h ed una volta rispetto ad x_k.

Esercizi 2.5.1 (i) Scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange del problema di Kepler (punto materiale soggetto a forza $-kx/|x|^3$, $x \in \mathbb{R}^3$) usando coordinate polari sferiche (r, φ, θ).

(ii) Stesso, ma in coordinate cilindriche (ρ, φ, z).

(iii) *Problema dei due corpi.* Scrivere la Lagrangiana di due punti P_1 e P_2 interagenti gravitazionalmente, usando le coordinate cartesiane $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ed $r_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dei due punti. Scrivere l'equazione di Lagrange per la coordinata x_1.

(iv) Scrivere la Lagrangiana del problema precedente usando le coordinate $r = r_1 - r_2$ ed $R = (m_1 r_1 + m_2 r_2)/(m_1 + m_2)$.

B. Potenziali generalizzati. La classe di sistemi meccanici per i quali le equazioni di Lagrange si possono scrivere per mezzo di una Lagrangiana è un po', ma significativamente, più ampia dei sistemi soggetti a forze posizionali conservative. Infatti essa include anche certi importanti tipi di forze dipendenti, seppure in modo speciale, dalla velocità: la *forza di Coriolis* agente su una particella in un riferimento non inerziale e la *forza di Lorentz* che agisce su una particella carica in un campo magnetico.

Se le forze generalizzate $\mathcal{Q}$ dipendono anche dalle velocità non si può naturalmente richiedere che si abbia $\mathcal{Q}(q, \dot{q}, t) = -\frac{\partial V}{\partial q}(q, \dot{q}, t)$ con una funzione $V = V(q, \dot{q}, t)$ e poi prendere $L = T - V$, perchè il termine $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ produrrebbe altri termini oltre a $\mathcal{Q}$.

Si possono invece ovviamente scrivere le equazioni di Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \mathcal{Q}$ nella forma $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ con $L = T - V$ se esiste una funzione $V(q, \dot{q}, t)$, chiamata *potenziale generalizzato*, tale che
$$\mathcal{Q} \;=\; \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q}\,. \tag{2.5.6}$$

Qui la scrittura al secondo membro ha l'usuale significato simbolico, cioè

$$\mathcal{Q}_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j}\ddot q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot q_i \partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot q_i \partial t} - \frac{\partial V}{\partial q_i}\,. \tag{2.5.7}$$

Questo fatto è completamente ovvio: ma è importante perchè, come si è detto, è alla base della trattazione Lagrangiana di casi molto importanti.

Naturalmente, non tutte le forze dipendenti dalle velocità sono derivabili da un potenziale generalizzato. In effetti, la dipendenza dalle velocità di $\mathcal{Q}$ e dunque del suo potenziale generalizzato V deve essere piuttosto speciale. Per vederlo basta osservare che nell'espressione (2.5.7) di $\mathcal{Q}$ non possono essere presenti termini in $\ddot q$, perchè le forze non dipendono dalle $\ddot q$. Di conseguenza, il potenziale generalizzato deve essere tale che $\frac{\partial^2 V}{\partial \dot q \partial \dot q}\ddot q = 0$. Precisando questa situazione si trova

Proposizione 25 *Se $\mathcal{Q}(q,\dot q,t)$ ha potenziale generalizzato $V(q,\dot q,t)$ allora*
i. V è affine (lineare non omogenea) nelle velocità generalizzate:

$$V(q,\dot q,t) \;=\; V_0(q,t) \;+\; V_1(q,\dot q,t)$$

con V_0 indipendente da $\dot q$ e V_1 lineare in $\dot q$.
ii. Se, inoltre, V non dipende dal tempo allora

$$\mathcal{Q}(q,\dot q) \;=\; -\frac{\partial V_0}{\partial q}(q) \;+\; \Omega(q)\dot q \tag{2.5.8}$$

ove Ω è una matrice $n\times n$ antisimmetrica.

Dimostrazione. (i) La condizione $\frac{\partial^2 V}{\partial \dot q \partial \dot q} = 0$ implica che $\frac{\partial V}{\partial \dot q}$ è indipendente da $\dot q$. Dunque $\frac{\partial V}{\partial \dot q} = \beta(q,t)$ per qualche β. Integrando si trova $V = \dot q\cdot\beta + V_0$, con β e V_0 indipendenti da $\dot q$. (Si è tacitamente usato qui il fatto che le $\dot q$ appartengono a tutto $\mathbb{R}^n$, che è semplicemente connesso.)

(ii) Eseguendo le derivate si trova la (2.5.8) con Ω di componenti $\Omega_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \beta_j}{\partial q_i}$. ■

Se $\Omega(q)$ è una matrice antisimmetrica, allora la forza generalizzata $\Omega(q)\dot q$ si chiama *girostatica*, o *giroscopica.* Come vedremo, una proprietà importante delle forze girostatiche è che esse, pur dipendendo dalla velocità, non dissipano energia. Dunque, forze dissipative non possono comunque rientrare in questa trattazione.

Esempio: Forza di Coriolis. La forza di Coriolis agente su una particella di massa m in un riferimento $\Sigma = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ rotante con velocità angolare ω rispetto agli spazi inerziali è $-2m\omega\times v$, ove v è la velocità relativa a Σ. Se usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane in Σ, che denotiamo $q = (q_1, q_2, q_3)$, allora la forza di Coriolis è $-2m\omega\times\dot q$. È facile verificare che, se ω è costante, allora essa ammette il potenziale generalizzato

$$V(q,\dot q) \;=\; m\omega\times\dot q\cdot q\,. \tag{2.5.9}$$

Infatti $\frac{\partial V}{\partial q_i} = m(\omega\times\dot q)_i$; d'altra parte si può anche scrivere V nella forma $mq\times\omega\cdot\dot q$ e dunque $\frac{\partial V}{\partial \dot q_i} = m(q\times\omega)_i$ e così $\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_i} = -m(\omega\times\dot q)_i$. Si noti che V si può anche scrivere nella forma $-m\omega\cdot q\times\dot q$, facile da ricordare: è il prodotto scalare di velocità angolare e momento angolare, cambiato di segno.

Il fatto che la forza di Coriolis sia derivabile da un potenziale generalizzato non dovrebbe sorprendere: nella sezione 2.4.E si è infatti visto che, in un sistema di coordinate rotanti, la particella è descritta da una Lagrangiana, con l'energia cinetica contenente termini T_1 e T_0. Nella descrizione presente, il potenziale generalizzato (2.5.9) non è altro che $-T_1$.

Osservazione: In ambito lagrangiano un sistema di punti in un riferimento non inerziale si può descrivere in due modi:
- tenendo conto delle forze di inerzia che agiscono sul sistema;
- descrivendo il sistema in un riferimento inerziale, ma per mezzo di un sistema di coordinate dipendenti dal tempo (solidali al riferimento non inerziale).

I due procedimenti conducono naturalmente alle stesse equazioni di Lagrange (anche se non necessariamente alla stessa Lagrangiana, si veda il capitolo 4). La differenza sta solo nell'origine dei diversi termini: nel primo caso essi provengono dalle forze, nel secondo dai termini T_0 e T_1 dell'energia cinetica. Come regola generale, è di solito più semplice scegliere la seconda via, perchè evita la scrittura delle forze di inerzia.

Esercizi 2.5.2 (i) Mostrare che la forza centrifuga $-m\omega\times(\omega\times q)$, $q\in\mathbb{R}^3$, ammette l'energia potenziale $-\frac{1}{2}m|\omega\times q|^2$.

(ii) *Dinamica in una giostra.* Supponiamo che il riferimento $\Sigma=\{O;e_1,e_2,e_3\}$ abbia l'origine O e l'asse e_3 fermi rispetto ad un riferimento inerziale e ruoti, rispetto a tale riferimento, con velocità angolare costante $\omega=\Omega e_3$. Scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange, nel riferimento Σ, usando le coordinate cartesiane $q=(q_1,q_2,q_3)$ in Σ. Confrontare il risultato con quelli dell'esercizio *2.3.3.vi* e dell'esempio della sezione 2.4.E.

(iii)* Generalizzare il punto (ii) della Proposizione 25, determinando l'espressione della forza generalizzata $\mathcal{Q}$ che deriva da un potenziale generalizzato che dipende anche dal tempo.

(iv) Determinare un potenziale generalizzato per la forza d'inerzia complessiva $-ma^T-ma^C$ data nella Proposizione 19, senza assumere che ω sia costante. [Non farlo, se non si è studiata tale sezione.]

C. Particella carica in campo elettromagnetico. Trattiamo qui in dettaglio il caso della forza di Lorentz, che è ovviamente di grande importanza per la Fisica.

La forza agente su una particella di carica elettrica e posta in un campo elettrico $E(x,t)$ ed in un campo magnetico $B(x,t)$ è la forza di Lorentz

$$f(x,v,t) \;=\; e\big[E(x,t)+v\times B(x,t)\big] \tag{2.5.10}$$

Vedremo adesso che questa forza è derivabile da un potenziale generalizzato che si esprime per mezzo dei potenziali scalare $\phi(x,t)$ e vettore $A(x,t)$ del campo elettromagnetico. Come si sa, essi sono legati ad E e B dalle relazioni

$$E \;=\; -\mathrm{grad}\phi-\frac{\partial A}{\partial t}\,, \qquad B \;=\; \mathrm{rot}A$$

(che seguono subito dalle due equazioni di Maxwell $\mathrm{div}B=0$, $\frac{\partial B}{\partial t}+\mathrm{rot}E=0$).

Proposizione 26 *In coordinate cartesiane $x=(x_1,x_2,x_3)$, le equazioni del moto di una particella in un campo elettromagnetico sono le equazioni di Lagrange con Lagrangiana*

$$L(x,\dot{x},t) \;=\; \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2-e\left[\phi(x,t)-\dot{x}\cdot A(x,t)\right]. \tag{2.5.11}$$

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che la forza di Lorentz ammette il potenziale generalizzato

$$V(x, \dot{x}, t) \;=\; e\left[\phi(x,t) - \dot{x}\cdot A(x,t)\right] .$$

In termini dei potenziali scalare e vettore, la forza di Lorentz si scrive

$$f \;=\; e\left[-\,\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial A}{\partial t} + \dot{x}\times \mathrm{rot}A\right] .$$

L'ultimo termine si può anche scrivere

$$\dot{x}\times\mathrm{rot}A \;=\; \dot{x}\times(\nabla\times A) \;=\; \nabla(\dot{x}\cdot A) - (\dot{x}\cdot\nabla)A$$

ove l'operatore differenziale $\dot{x}\cdot\nabla$ sta per $\sum_{j=1}^{3}\dot{x}_j\frac{\partial}{\partial x_j}$. (Questa identità è analoga all'identità algebrica $a\times(b\times c) = b(a\cdot c) - (a\cdot b)c$; per convincersi della sua validità basta verificarne una componente: farlo per esercizio). Dunque, la componente i–ma della forza di Lorentz è

$$f_i \;=\; e\Big[-\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \;+\; \frac{\partial}{\partial x_i}(\dot{x}\cdot A) - \sum_{j=1}^{3}\dot{x}_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\Big] .$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_i} &= e\Big[\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\dot{x}\cdot A)\Big]\\ \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial V}{\partial\dot{x}_i}\Big] &= \frac{d}{dt}\big[-eA_i\big] \;=\; -e\Big[\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t}\Big]\end{aligned}$$

e dunque $f = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}$. ■

Esercizi 2.5.3 Mostrare che se il campo magnetico B è costante allora $A = \frac{1}{2}\,B\times x$ e dunque $V_1 = \frac{1}{2}\,e\dot{x}\cdot B\times x$.

2.6 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi

Esercizi *2.2.1* (i) $\frac{d}{dt}(x\times v) = N(x,v)$ è un'equazione del secondo ordine per $x(t)$ che non può essere messa in forma normale perchè il nucleo dell'operatore di prodotto vettore per un assegnato vettore, $u\mapsto a\times u$, ...

(ii) Il rango della matrice Jacobiana

$$\frac{\partial(M_1,M_2,M_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)} \;=\; m\begin{pmatrix} 0 & \dot{x}_3 & -\dot{x}_2 & 0 & -x_3 & x_2\\ -\dot{x}_3 & 0 & \dot{x}_1 & x_3 & 0 & -x_1\\ \dot{x}_2 & -\dot{x}_1 & 0 & -x_2 & x_1 & 0\end{pmatrix}$$

deve essere 3.

(iii) Si deve verificare che il rango della matrice scritta in (ii) è 3 laddove $M\neq 0$. Una via (laboriosa se fatta a mano, volendo si può farlo con un programma di calcolo simbolico) è calcolare tutti i diciotto minori di questa matrice: essi uguagliano tutti i possibili prodotti delle tre componenti di M per le tre coordinate e per le tre componenti della velocità. Una via alternativa, e più elegante, è quella di calcolare il rango come dimensione dell'immagine della matrice. A tal fine si osservi che la matrice Jacobiana ha la struttura a blocchi

$$\frac{\partial(M_1,M_2,M_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)} \;=\; m\,[\hat{x}\,,\,-\hat{\dot{x}}]$$

ove $\hat{x}$ e $\hat{\dot{x}}$ sono le matrici antisimmetriche 3×3 tali che

$$\hat{x}u \;=\; \dot{x} \times u\,, \qquad \hat{\dot{x}}u \;=\; x \times u \qquad \forall u \in \mathbb{R}^3$$

(si veda la prova della Proposizione 17 nella sezione 2.3.A). Pertanto, siccome ogni vettore di $\mathbb{R}^6$ si può scrivere come $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ con $u, v \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$\frac{\partial(M_1, M_2, M_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \;=\; m\,(x \times u - \dot{x} \times v)\,.$$

Consideriamo allora il sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$S(x, \dot{x}) \;=\; \{x \times u - \dot{x} \times v \;:\; u, v \in \mathbb{R}^3\}\,.$$

Se x ed $\dot{x}$ sono entrambi nulli, allora S ha dimensione zero; se essi sono paralleli, S ha dimensione due (perchè coincide col sottospazio ortogonale ad x e ad $\dot{x}$. Un momento di riflessione, e un disegno, mostrano che, se x ed $\dot{x}$ non sono nè nulli nè paralleli, allora $S(x, \dot{x})$ ha dimensione tre.

Esercizi *2.2.3* (i) Si può fare in diversi modi. Per esempio, $\mathrm{rot} f \frac{x}{|x|} = \mathrm{grad}\mathcal{F}(|x|) \frac{x}{|x|} + f \mathrm{rot} \frac{x}{|x|}$. Così, l'annullarsi del rotore implica che $\mathrm{grad}\mathcal{F}(x)$ è ovunque parallelo ad x. Dunque, le equipotenziali di f ....

Esercizi *2.3.1* (i) Se ω ed ω' soddisfano entrambi le (2.3.2), sottraendo membro a membro ....

(ii) Si veda BGG, sezione 2.6.2

Esercizi *2.3.2* Le tre velocità angolari ω', ω'' ed ω sono definite dalle condizioni

$$\left.\frac{de_i'}{dt}\right|_{\Sigma} = \omega' \times e_i'\,, \qquad \left.\frac{de_i''}{dt}\right|_{\Sigma'} = \omega'' \times e_i''\,, \qquad \left.\frac{de_i''}{dt}\right|_{\Sigma} = \omega \times e_i'' \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

D'altra parte, la (2.3.6) applicata ad $u = e_i''$ da (siccome la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ è adesso ω')

$$\left.\frac{de_i''}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{de_i''}{dt}\right|_{\Sigma'} + \omega' \times e_i''\,.$$

Esercizi *2.3.3* (v) L'equazione del moto in Σ' è $ma' \;=\; e(v' + v^T) \times B$ e non si può scriverla nella forma $ma' = ev' \times B'$ perchè, al solito, il prodotto vettore non è invertibile.

(vi) Le uniche forze di inerzia sono la forza centrifuga $m\Omega^2(x_1, x_2, 0)$ e quella di Coriolis, che è $-2m\omega \times \dot{x} = (2m\Omega\dot{x}_2, -2m\Omega\dot{x}_1, 0)$. Dunque $m\ddot{x}_1 = m\Omega^2 x_1 + 2m\Omega\dot{x}_2$, $m\ddot{x}_2 = m\Omega^2 x_2 - 2m\Omega\dot{x}_1$, $m\ddot{x}_3 \;=\; 0$.

Esercizi *2.3.4* (ii) La soluzione esatta perde ogni significato dopo il tempo t al quale il grave urta la terra. In esperienze normali, il tempo di caduta t è tale che $\omega t \ll 1$. Espandendo la soluzione in serie, si trova la soluzione "approssimata" di BGG.

(iii) La risposta alla prima domanda è già stata data in (ii). Quella alla seconda è: teorema di dipendenza continua dai parametri.

Esercizi *2.3.5* La stazionarietà del flusso richiede l'equilibrio, oltre che del gradiente di pressione e della forza di Coriolis, anche della forza centrifuga dovuta alla rotazione del fluido. Nella circolazione ciclonica antioraria, forza di Coriolis e forza centrifuga puntano entrambe verso l'esterno del ciclone e $-\rho\,\mathrm{grad}p$ verso l'interno; dunque, vi possono essere situazioni stazionarie con gradiente di pressione e velocità comunque grandi. Invece, nell'anticiclone orario, solo la forza di Coriolis punta verso l'interno e deve compensare $-\rho\,\mathrm{grad}p$ e la forza centrifuga; siccome Coriolis cresce linearmente con la velocità e la centrifuga quadraticamente, si può avere equilibrio solo per velocità non troppo alte: se la velocità cresce, l'anticiclone si "scioglie". Per una trattazione matematica del fenomeno si vedano le Note sui Sistemi Dinamici di F. Cardin (Corso di Laurea in Matematica).

Esercizi *2.5.1* (i) L'energia potenziale è $\tilde{V}(x) = -k/|x|$. Dunque $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + k/r$.
(ii) $L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + k/\sqrt{\rho^2 + z^2}$
(iii) $L = \frac{1}{2}m_1|\dot{x}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{x}_2|^2 + k/|x_2 - x_1|$.

Esercizi *2.5.2* (ii) Siccome $\omega = (0, 0, \Omega)$, l'energia potenziale della forza centrifuga è $-\frac{1}{2}m\Omega^2(q_1^2 + q_2^2)$ e il potenziale generalizzato della forza di Coriolis è $-m\Omega(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)$. Dunque $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2}m\Omega^2(q_1^2 + q_2^2) + m\Omega(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)$.
(iii) Scriviamo $V(q, \dot{q}, t) = V_0(q, t) + \dot{q}\cdot\beta(q, t)$. Allora $\mathcal{Q}(q, \dot{q}, t) = -\frac{\partial V_0}{\partial q}(q, t) + \frac{\partial \beta}{\partial t}(q, t) + \Omega(q, t)\dot{q}$ con Ω come nella Proposizione 25.

(Versione 2005.1)

Capitolo 3

Sistemi vincolati

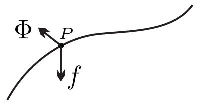
Vi è una vasta classe di sistemi meccanici che sfuggono alla descrizione data nel capitolo precedente, dedicato ai sistemi di punti materiali interagenti. Un pendolo, per esempio, è una pallina appesa ad un filo o ad una sbarretta rigida, molto leggeri ma praticamente inestensibili, e con un estremo fissato. La trattazione di questo sistema all'interno del quadro teorico del capitolo precedente richiederebbe la descrizione del filo, o della sbarretta, come costituiti da moltissimi punti interagenti fra di loro—uno studio molto complicato, ancor'oggi proibitivo.[1] Un'altra possibilità sarebbe quella di descrivere il filo, o la sbarretta, come un mezzo continuo elastico; questo porterebbe verso la Meccanica dei Continui, che naturalmente è più difficile di quella dei sistemi discreti, e sarebbe inoltre in un certo senso "sprecata" in un problema nel quale si vuole che il materiale sia così rigido da non deformarsi affatto. Per studiare questi problemi, allora, fin dai tempi di Newton è stato sviluppato un approccio alternativo, fenomenologico, basato sull'idea che in molte situazioni sperimentali lo stato del filo o della sbarretta non sia alterato sensibilmente dalla presenza della pallina e che essi si comportino come "vincoli".

Questo capitolo è dedicato ad uno studio dei sistemi vincolati. Vi è una classe di vincoli (i cosiddetti vincoli olonomi ideali) per i quali è possibile una trattazione completa e che, inoltre, rientra nella formulazione Lagrangiana. Questo rende possibile allargare enormemente l'ambito di applicazione della Meccanica Classica: si pensi, per esempio, che un punto appoggiato ad una superficie rigida viene descritto come sistema vincolato; e che un corpo rigido (una trottola o un satellite artificiale, per esempio, ma anche la terra in quelle situazioni in cui le maree non sono importanti) è modellizzato come un sistema di punti materiali soggetti al "vincolo" di mantenere costanti le loro distanze mutue.

L'analisi di questo capitolo poggia su alcune proprietà elementari delle *sottovarietà* (ipersuperfici regolari) di uno spazio vettoriale. Anche se tutto questo è noto dai corsi di Analisi, un breve compendio è contenuto nella sezione di richiami 3.8.

[1] E forse neppure possibile, almeno in questi termini, perchè le molecole *non* seguono le leggi della meccanica Newtoniana, ma della meccanica quantistica.

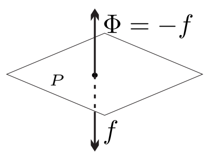
3.1 Esempio: punto materiale su curva liscia



Cominciamo con lo studio di un esempio semplice, ma illuminante, quello di un punto materiale vincolato ad una guida curvilinea, e soggetto ad un campo di forza assegnato $f(x, v)$. Dire che il punto è vincolato alla curva significa che, *qualunque sia il campo di forze* f, il punto non può abbandonare la curva e si muove lungo di essa.

La prima osservazione da fare è che il moto vincolato è compatibile con la legge di Newton solo se si ammette che la curva eserciti delle forze sul punto materiale. Precisamente, se il punto materiale si muove con la legge oraria $t \mapsto x^t$, allora, ad ogni istante t, il vincolo deve esercitare sul punto una forza Φ^t tale che

$$m\ddot{x}^t \;=\; f(x^t, \dot{x}^t) + \Phi^t \,. \tag{3.1.1}$$



Questa forza è chiamata *reazione vincolare;* in contrasto, la forza ordinaria $f(x, \dot{x})$ che agisce sul punto è chiamata *forza attiva.* La seconda osservazione è che la reazione vincolare non è una forza ordinaria, cioè un campo di forze assegnato a priori come funzione di posizione e velocità. Infatti, essa dipende anche dalla forza attiva $f(x, v)$ agente sul punto materiale.[2] Per esempio, se il punto è in quiete in una certa posizione x_0 della curva, allora $\Phi^t = f(x_0, 0)$ per ogni t (se la forza è il peso, la curva deve sopportare il peso del punto).

In altre parole, se si vuole salvare la validità delle equazioni di Newton, bisogna pensare che il vincolo sia una specie di "diavoletto" (infinitamente potente!) che ad ogni istante esercita sul punto materiale esattamente quella forza (comunque grande) che è necessaria perchè la sua traiettoria coincida con la curva. È evidente che si tratta di una astrazione volta a modellizzare situazioni in cui, per esempio, un corpo che si può pensare puntiforme (per esempio, un anellino) si muove lungo una guida abbastanza rigida da non flettere percettibilmente a causa del peso del punto e delle forze d'inerzia da esso esercitate: minime deformazioni della guida producono forze di richiamo molto intense. Il problema se questa modellizzazione abbia senso — conduca cioè a risultati in accordo con l'esperienza — è in definitiva un problema fisico, o ingegneristico, da esaminare caso per caso.

Ci focalizziamo qui sugli aspetti matematici della questione. Il problema è che la reazione vincolare non è nota a priori: è un'incognita del problema, non un dato. Dunque, in questi termini, l'equazione (3.1.1) non è un'equazione differenziale ordinaria. In effetti, la formulazione esatta del problema è:

Noti la curva ed il campo di forze
è possibile determinare il moto e le reazioni vincolari?

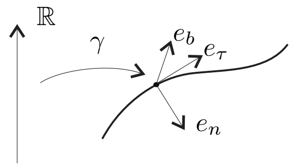
Posto in termini così generali, il problema è evidentemente indeterminato. Per esempio, se la guida è liscia (non esercita attrito) oppure scabra, il moto del punto è completamente diverso. Per avere una risposta affermativa alla domanda precedente è allora necessario fare delle ipotesi sulle reazioni vincolari.

Per esaminare questo problema, sia

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad s \mapsto \gamma(s)$$

l'equazione della curva, ove s è il cosiddetto "parametro d'arco": fra tutte le possibili parametrizzazioni della curva, questa è definita dal fatto che il vettore

[2]Come si sa dal corso di fisica, si ammette che le forze ordinarie soddisfino il "principio di sovrapposizione" o "regola del parallelogramma": oltre a decretarne il carattere vettoriale, questo principio esprime l'indipendenza delle forze.



tangente $\frac{d\gamma}{ds}(s)$ ha norma unitaria:

$$\left|\frac{d\gamma}{ds}(s)\right| = 1 \qquad \forall s \in \mathbb{R}\,.$$

Vogliamo scrivere l'equazione del moto (3.1.1), in ogni punto della curva, nella "base di Frenet" costituita dal versore tangente $e_\tau(s)$, dal versore normale principale $e_n(s)$ e dal versore binormale $e_b(s)$ alla curva. Questi tre versori sono definiti come

$$e_\tau = \frac{d\gamma}{ds}\,, \qquad e_n = \rho\,\frac{de_\tau}{ds}\,, \qquad e_b = e_\tau \times e_n\,,$$

dove la funzione $\rho(s)$ serve a normalizzare la norma di e_n, cioè

$$\rho(s) := \left|\frac{de_\tau}{ds}(s)\right|^{-1},$$

e si chiama "raggio di curvatura principale" della curva. (La base di Frenet è definita in modo unico e dipende in modo regolare dal punto se $\frac{de_\tau}{ds}$ non si annulla mai, se cioè la curvatura $1/\rho$ è ovunque non nulla. Assumiamo sia così.)

Se il punto si muove lungo la curva con la legge oraria $t \mapsto s^t$, la sua posizione all'istante t è $x^t = \gamma(s^t)$. Allora, la sua velocità è data da

$$\dot{x}^t = \frac{d\gamma}{ds}(s^t)\,\dot{s}^t = \dot{s}^t\,e_\tau(s^t) \tag{3.1.2}$$

e dunque la sua accelerazione è

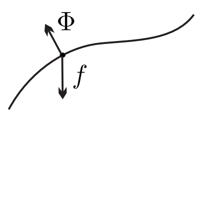
$$\begin{aligned}\ddot{x}^t &= \ddot{s}^t\,e_\tau(s^t) + \dot{s}^t\,\frac{d}{dt}\big[e_\tau(s^t)\big]\\ &= \ddot{s}^t\,e_\tau(s^t) + (\dot{s}^t)^2\,\frac{de_\tau}{ds}(s^t)\\ &= \ddot{s}^t\,e_\tau(s^t) + \frac{(\dot{s}^t)^2}{\rho}\,e_n(s^t)\,.\end{aligned}$$

Se allora denotiamo con $f_\tau(s,\dot{s})$, $f_n(s,\dot{s})$ ed $f_b(s,\dot{s})$ le componenti della forza attiva (valutata nell'atto di moto di coordinate $s,\dot{s}$, cioè $f(x(s),\dot{s}e_\tau(s))$) e con Φ_τ, Φ_n ed Φ_b le componenti della reazione vincolare nella base $\{e_\tau, e_n, e_b\}$, l'equazione di Newton (3.1.1) diviene

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= f_\tau(s,\dot{s}) + \Phi_\tau\\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho(s)} &= f_n(s,\dot{s}) + \Phi_n\\ 0 &= f_b(s,\dot{s}) + \Phi_b\,.\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Si capisce allora che vi è almeno un caso speciale in cui è possibile determinare moto e reazioni vincolari. Questo è il caso in cui il vincolo sia *liscio*, non eserciti cioè alcun attrito, nel senso che, qualunque siano la forza attiva f e l'atto di moto del punto, la componente tangente della reazione vincolare sia nulla:

$$\Phi_\tau = 0\,.$$



In questo caso, la componente tangente dell'equazione del moto si riduce a

$$m\ddot{s} = f_\tau(s,\dot{s})$$

ed è dunque un'equazione differenziale del secondo ordine per il moto $t \mapsto s^t$. Assegnate le condizioni iniziali $(x^0, \dot{x}^0)$, e dunque s^0 ed $\dot{s}^0$, questa equazione determina univocamente il moto $t \mapsto s^t$. Una volta nota questa funzione, le restanti due equazioni (3.1.3) forniscono la reazione vincolare espletata dal vincolo, ad ogni istante, sul moto in considerazione:

$$\begin{aligned} \Phi_n^t &= m\frac{(\dot{s}^t)^2}{\rho(s^t)} - f_n(s^t, \dot{s}^t) \\ \Phi_b^t &= -f_b(s^t, \dot{s}^t)\,. \end{aligned}$$

Si noti anche che la componente tangente dell'equazione di Newton $m\ddot{s} = f_\tau(s, \dot{s})$ si può scrivere come l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = f_\tau$$

con energia cinetica

$$T(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} m\dot{s}^2\,.$$

Questa non è altro che l'energia cinetica $\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2$ del punto ristretta agli atti di moto tangenti alla curva, per i quali $\dot{x} = \dot{s}e_\tau$.

La situazione incontrata qui è il prototipo di una situazione più generale, quella dei *vincoli olonomi ideali*, che discuteremo nelle prossime sezioni. Ricapitoliamone gli elementi essenziali:

- Se si assume che la reazione vincolare sia normale al vincolo, allora la componente tangente dell'equazione di Newton è un'equazione del secondo ordine per la coordinata s, nella quale non compare la reazione vincolare.
- Tale equazione è l'equazione di Lagrange, scritta usando una coordinata sul vincolo, con energia cinetica data dalla restrizione dell'energia cinetica agli atti di moto "vincolati".
- Una volta determinato il moto, le componenti dell'equazione di Newton nelle direzioni normali al vincolo permettono di determinare la reazione vincolare su quel moto.

Osservazioni: (i) Se si suppone che la componente tangente della reazione vincolare sia una qualunque funzione nota di posizione e velocità, $\Phi_\tau = \mathcal{F}(s, \dot{s})$, allora l'equazione tangente è ancora un'equazione differenziale ordinaria $m\ddot{s} = f_\tau(s) + \mathcal{F}(s, \dot{s})$ e tutto va come prima. Si capisce da questo fatto che, come si è anticipato prima, senza alcuna ipotesi sulle reazioni vincolari il problema del moto vincolato è indeterminato.

(ii) Naturalmente per la descrizione del moto è possibile usare una qualunque coordinata sulla curva. La scelta del parametro d'arco fatta qui serve solo a semplificare l'analisi. Si vedrà poi come scrivere la componente tangente dell'equazione del moto usando altre coordinate.

Esercizi 3.1.1 (i) Determinare il parametro d'arco e la base di Frenet per un cerchio di raggio R.

(ii) Un pendolo è un punto materiale vincolato in modo liscio ad una circonferenza e soggetto alla forza peso. Scrivere l'equazione della circonferenza nella forma $x(\theta) = R\sin\theta e_1 - R\cos\theta e_3$ (e_3 è la verticale ascendente ed R è il raggio della circonferenza). Mostrare che l'equazione tangente da

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta$$

e che la reazione vincolare è data da

$$\Phi_n = mR\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\,, \qquad \Phi_b = 0\,.$$

Mostrare anche che, detta E è l'energia totale del moto, $\Phi_n = \frac{2E}{R} + 3mgR\cos\theta$.

(iii) Nello studio dei ritratti in fase dei sistemi conservativi ad un grado di libertà (sezione 1.4) si è suggerito che per capire come sono fatte le orbite si può immaginare di far scivolare un punto materiale pesante sul grafico dell'energia potenziale. Giustificare questa affermazione: assegnata l'energia potenziale $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinare una curva liscia appartenente ad un piano verticale tale che l'equazione del moto di un punto ad essa vincolato è $m\ddot{s} = -V'(s)$.

(iv) La "legge di Coulomb" per l'attrito esercitato da una superficie su un punto materiale in moto su di essa postula che la componente della reazione vincolare tangente alla superficie sia legata alla componente normale dalla relazione

$$\Phi_t \;=\; -k|\Phi_n|\frac{v}{|v|}$$

ove la costante adimensionale k è il cosiddetto "coefficiente di attrito dinamico. (Se il punto è in quiete, la situazione è diversa.) Nel caso di una guida curvilinea scabra, questa legge diviene

$$\Phi_t \;=\; -k\,\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|}\,\sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_b^2}\,. \tag{3.1.4}$$

Si mostri che in quest'ultimo caso si ottiene un'equazione differenziale per $t \mapsto s^t$ e che si possono determinare le reazioni vincolari.

(v)* Un punto materiale di massa m è vincolato ad un cerchio scabro di raggio R a riposo in un riferimento inerziale. Si supponga che l'unica forza agente sul punto sia la reazione vincolare e che questa soddisfi la legge di Coulomb (3.1.4). Determinare i moti e la reazione vincolare, assumendo che la velocità iniziale non sia nulla. Discutere il limite $k \to 0$.

3.2 Vincoli olonomi ideali (fissi)

A. Introduzione. Come nel capitolo precedente, consideriamo un sistema costituito da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$ e, usando la stessa notazione usata là, descriviamolo nello spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^{3N} \ni X = (x_1, \ldots, x_N)$ e nello spazio degli atti di moto $\mathbb{R}^{6N} \ni (X, \dot{X})$. In termini generali, *un vincolo è una restrizione sugli atti di moto $(x_h, \dot{x}_h)$ consentiti ai singoli punti, che si traduce nel fatto che l'atto di moto $(X, \dot{X})$ del sistema è ristretto ad un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{6N}$.*

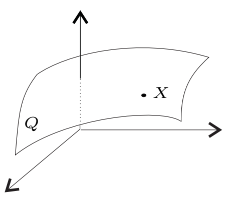
Noi qui considereremo solo il caso semplice dei vincoli cosiddetti *olonomi.* In sostanza, un vincolo olonomo nasce come una limitazione sulle *posizioni x_h* dei singoli punti materiali: la *configurazione* $X = (x_1, \ldots, x_N)$ del sistema deve dunque appartenere ad un sottoinsieme Q dello spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^{3N}$. Per esempio, i punti materiali potrebbero dover appartenere ad una curva o ad una superficie. Naturalmente, un vincolo di questo tipo si traduce anche in una limitazione sulle velocità dei punti materiali, e dunque sugli atti di moto del sistema: nel caso di un punto vincolato ad una curva o ad una superficie, per esempio, la velocità deve essere tangente alla curva o alla superficie (si pensi alla (3.1.2)).

Un vincolo di questo tipo può essere sia *fisso* (cioè indipendente dal tempo: per esempio un pendolo, cioè un punto vincolato ad un cerchio) che *mobile* (dipendente dal tempo: un pendolo di lunghezza variabile, un pendolo rotante attorno ad un asse verticale, etc.). Procedendo in modo simile a quanto fatto per i sistemi di coordinate nel capitolo precedente, considereremo innanzittutto il caso indipendente dal tempo e faremo poi l'estensione.

Osservazioni: (i) Vi sono almeno due situazioni sperimentali di tipo molto diverso che si possono modellizzare per mezzo di vincoli di posizione, o 'olonomi': il vincolo può essere 'unilatero' (come quando i punti non possono attraversare una parete, o nel caso dell'appoggio di un punto su una superficie) o 'bilatero' (per es. appartenenza ad una curva o a una superficie). Si capisce che la descrizione matematica dei vincoli unilateri è difficile: se un punto rimbalza su una parete i sui moti non sono differenziabili e non è dunque possibile una descrizione basata solo su equazioni differenziali. Per questo, ci limiteremo al caso di vincoli 'bilateri'. La formalizzazione matematica di questa idea richiede, naturalmente, delle condizioni di regolarità sul sottoinsieme Q dello spazio delle configurazioni al quale il sistema deve appartenere: precisamente, si dovrà richiedere che esso sia una sottovarietà dello spazio delle configurazioni.

(ii) Vi è anche un'altra classe di vincoli, quella dei cosiddetti vincoli *anolonomi.* I vincoli anolonomi hanno proprietà molto diverse da quelli olonomi, anche se sulle prime la distinzione fra di essi può apparire sottile o poco chiara. Nel caso dei vincoli olonomi la limitazione sulle velocità è, per così dire, figlia di quella sulle posizioni. Un vincolo anolonomo nasce invece primariamente come una limitazione sulle *velocità* dei punti del sistema, più che sulle loro posizioni. Per capire l'origine della questione, un po' informalmente, si pensi ad un punto vincolato ad un piano: il vincolo è olonomo e il punto, ovunque si trovi, può avere *qualunque* velocità parallela al piano. Un'automobile su questo piano, invece, non può avere qualunque velocità parallela al piano: sono possibili solo velocità che appartengono ad un certo angolo (l'angolo di sterzo, centrato sull'asse dell'auto). Questo vincolo sulle velocità non restringe però in alcun modo le posizioni permesse all'auto: con un po' di manovre, che rispettano il vincolo sulla velocità, l'auto può essere portata ovunque. Situazioni di questo tipo si incontrano anche in sistemi più semplici: per esempio, se una sfera "rotola senza strisciare" su un piano scabro, allora il punto della sfera che tocca il piano deve avere velocità nulla (se no, ci sarebbe strisciamento). Come nel caso dell'automobile, anche se è meno evidente, questo vincolo sulle velocità non si traduce in un vincolo sulle configurazioni. La descrizione dei sistemi anolonomi è molto più difficile di quella dei sistemi olonomi—oggi non si possiede ancora una reale comprensione di questi sistemi. Torneremo brevemente sui vincoli anolonomi, proprio in relazione al rotolamento dei corpi rigidi, nella sezione 3.7.

B. Vincoli olonomi. Varietà delle configurazioni. Formalizziamo innanzittutto la definizione di vincolo olonomo, restringendoci inizialmente al caso di vincoli fissi.



Definizione: *Un sistema di N punti è soggetto ad un* vincolo olonomo fisso *se il vettore configurazione del sistema $X = (x_1, \dots, x_N)$ è ristretto ad appartenere ad una sottovarietà Q di $\mathbb{R}^{3N}$. Questa sottovarietà si chiama* varietà delle configurazioni *del sistema. Se n è la dimensione di Q, si dice che il sistema ha n* gradi di libertà.[3]

Un *sistema olonomo* è un sistema di punti materiali soggetti ad un vincolo olonomo. Si noti che il caso di un sistema di punti materiali senza vincoli può essere riguardato come un sistema olonomo con varietà delle configurazioni tutto $\mathbb{R}^{3N}$.

La varietà delle configurazioni può essere descritta in due modi:

1. Come insieme di livello di $r = 3N - n$ funzioni indipendenti, cioè con equazioni del tipo
$$\Psi_1(X) = 0\,, \ \dots\,, \ \Psi_r(X) = 0\,. \tag{3.2.1}$$
La condizione di 'indipendenza' delle funzioni $\Psi_1, \dots, \Psi_r : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ è che la matrice Jacobiana
$$\frac{\partial(\Psi_1, \dots, \Psi_r)}{\partial(X_1, \dots, X_{3N})}(X) \tag{3.2.2}$$

[3]Per precisione, questo è un vincolo olonomo, *bilatero* e fisso. Noi non facciamo questa distinzione perchè non considereremo mai vincoli unilateri.

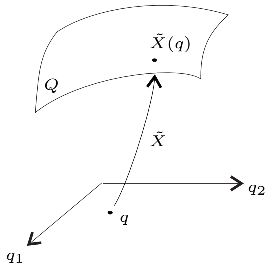
abbia ovunque rango r laddove $\Psi_1(X) = 0, \dots, \Psi_r(X) = 0$. Naturalmente, si può equivalentemente considerare la singola mappa $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_r) : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^r$. La condizione di indipendenza si scrive allora

$$\text{rango}\Big(\frac{\partial \Psi}{\partial X}(X)\Big) \;=\; r \qquad \forall X \in \mathbb{R}^{3N} \text{ t.c. } \Psi(X) = 0 \tag{3.2.3}$$

e significa che $\Psi : Q \to \mathbb{R}^r$ è una sommersione.

2. Per mezzo di coordinate. Ricordiamo che un 'sistema di coordinate locali' su una varietà (o 'parametrizzazione locale' di una varietà) n–dimensionale $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$ è una mappa differenziabile e biunivoca

$$\tilde{X} : U \to \tilde{U} \subset Q\,, \qquad q \mapsto \tilde{X}(q)\,,$$



da un aperto U di $\mathbb{R}^n$ ad un aperto[4] $\tilde{U}$ di Q la cui matrice Jacobiana soddisfa

$$\text{rango}\Big(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q)\Big) \;=\; n \qquad \forall q \in U\,.$$

Le coordinate $(q_1, \dots, q_n)$ sono chiamate *coordinate generalizzate,* o *coordinate lagrangiane.*

La descrizione lagrangiana dei moti vincolati viene fatta per lo più per mezzo della loro descrizione in coordinate. Cioè, invece di studiare il moto $t \mapsto X^t \in Q$ se ne studia la rappresetazione $t \mapsto q^t$ nelle coordinate scelte, che è definita da $X^t = \tilde{X}(q^t)$.

Esempi: 1. Un punto materiale vincolato ad una curva fissa. La varietà delle configurazioni è la curva stessa. Il sistema ha un grado di libertà. Come coordinata lagrangiana si può usare una qualunque coordinata curvilinea, in particolare il "parametro d'arco" usato nella sezione 1. Se la curva è chiusa, si può anche usare una coordinata angolare (nel senso della sezione di richiami 3.8).

2 Un punto vincolato ad una superficie. La varietà delle configurazioni è la superficie stessa. Il sistema ha due gradi di libertà.

3. Due punti vincolati ad una curva. Supponiamo che due punti P_1 e P_2 siano vincolati ad appartenere all'asse e_1 di una base di $\mathbb{R}^3$. In termini del vettore configurazione $X = (X_1, \dots, X_6) \in \mathbb{R}^6$, l'equazione del vincolo è $X_2 = X_3 = X_5 = X_6 = 0$ e la varietà delle configurazioni è dunque

$$\begin{aligned} Q \;&=\; \{(X_1, \dots, X_6) \in \mathbb{R}^6 \;:\; X_2 = X_3 = X_5 = X_6 = 0\} \\ &\approx\; \{(X_1, X_4) \in \mathbb{R}^2\} \;=\; \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

cioè un piano. In realtà, se si vuole che i due punti non si urtino ("incompenetrabilità) si deve rimuovere da $\mathbb{R}^6$ anche il sottoinsieme ove $P_1 = P_2$, cosicché

$$Q \;\approx\; \{(X_1, X_4) \in \mathbb{R}^2 \;:\; X_1 \neq X_4\}$$

è un piano privato della diagonale.

4. Due punti materiali vincolati rigidamente: "manubrio. Supponiamo che due punti P_1 e P_2 siano vincolati a mantenere la loro distanza l costante (come se fossero congiunti da una sbarretta rigida che dobbiamo supporre priva di massa, perchè se no farebbe parte del sistema). Se indichiamo (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) le coordinate cartesiane dei due punti allora l'equazione del vincolo si può scrivere $\Psi(x_1, \dots, z_2) = 0$ con

$$\Psi(x_1, \dots, z_2) \;=\; (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2\,.$$

Lo Jacobiano della funzione $\Psi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ è

$$\frac{\partial \Psi}{\partial(x_1, \dots, z_2)} \;=\; 2\Big(x_1 - x_2,\; y_1 - y_2,\; z_1 - z_2,\; x_2 - x_1,\; y_2 - y_1,\; z_2 - z_1\Big)$$

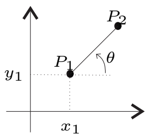
[4]Un aperto in Q è l'intersezione di un aperto di $\mathbb{R}^{3N}$ con Q.

e, se $l > 0$, ha chiaramente almeno una componente non nulla laddove $\Psi = 0$. Così, il vincolo è olonomo. Siccome $N = 2$ ed $r = 1$, il sistema ha 5 gradi di libertà.

[Questo ultimo fatto risulta peraltro ovvio se si pensa che, per determinare le posizioni dei due punti è sufficiente conoscere le tre coordinate cartesiane di un qualunque punto della sbarretta (per esempio P_1) e servono poi due coordinate per determinare l'orientazione della sbarretta (fissato P_1, P_2 sta su una sfera di centro P_1). Questo argomento intuitivo suggerisce che la varietà delle configurazioni sia $\mathbb{R}^3 \times S^2$; si vedano gli esercizi.]

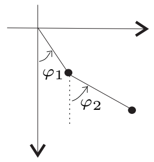
5. "Manubrio vincolato ad un piano. Supponiamo che il manubrio dell'esempio precedente sia vincolato ad appartenere al piano $z = 0$. Le equazioni del vincolo sono

$$z_1 \;=\; 0\,, \qquad z_2 \;=\; 0\,, \qquad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 \;=\; 0$$



e la varietà delle configurazioni è diffeomorfa ad $\mathbb{R}^2 \times S^1$. (Perchè?) Come coordinate Lagrangiane si possono usare le coordinate (x, y) del primo punto e l'angolo θ fra l'asse x e P_1P_2. La parametrizzazione della varietà vincolare è allora

$$\begin{aligned} x_1 &= x & y_1 &= y & z_1 &= 0 \\ x_2 &= x + l\cos\theta & y_2 &= y + l\sin\theta & z_2 &= 0\,. \end{aligned}$$



7. Pendolo doppio. Un pendolo doppio è costituito da un pendolo appeso ad un altro pendolo. Se entrambi i pendoli sono libertà. La configurazione del sistema è determinata vincolati ad un piano, allora il sistema ha due gradi di dall'assegnazione di un angolo $\varphi_1 \in S^1$ che fissa la posizione del punto superiore e di un angolo $\varphi_2 \in S^1$ che fissa la posizione di quello inferiore, cioè dall'assegnazione di un punto (φ_1, φ_2) sul toro bidimensionale $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. (Disegnando il cerchio inferiore ortogonalmente a quello superiore e trasportandolo lungo di esso si ottiene proprio la superficie di una ciambella.)

8. Pendolo sferico. Fin qui, per "pendolo" abbiamo inteso un punto vincolato in modo liscio ad un cerchio e soggetto alla forza di gravità. A volte si realizza un pendolo vincolando un punto materiale ad avere distanza l fissata da un punto fisso dello spazio, ma lasciandolo libero di muoversi nello spazio. In questo caso, la varietà delle configurazioni è una sfera di raggio l. Se si usano coordinate sferiche (θ, φ) su di essa allora la parametrizzazione è

$$(\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times S^1 \;\mapsto\; (l\sin\theta\cos\varphi\,,\; l\sin\theta\sin\varphi\,,\; l\cos\theta) \;\in\; \mathbb{R}^3\,.$$

Naturalmente, questa è solo una parametrizzazione locale, perchè non è definita nei due poli (ove $\theta = 0, \pi$).

Esercizi 3.2.1 (i) Quanti gradi di libertà ha un sistema di due punti materiali vincolati ad una superficie di $\mathbb{R}^3$? Qual è la varietà delle configurazioni?

(ii) Mostrare che la varietà delle configurazioni del manubrio dell'esempio 4 è diffeomorfa ad $\mathbb{R}^3 \times S^2$.

(iii) Nell'esempio 4, si usino come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane (x, y, z) del primo punto e coordinate sferiche $(\theta, \phi) \in (0, \pi) \times S^1$ sulla sfera S^2. Scrivere la parametrizzazione $X = \tilde{X}(x, y, z, \theta, \phi)$.

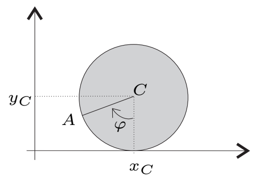
C. Esempio: Rotolamento di un disco su una rotaia.[5] Vi sono dei casi un po' speciali di vincoli che nascono sulle velocità ma che sono comunque olonomi. Illustriamo qui questa situazione su un esempio semplice (che si incontra negli esercizi); torneremo poi sulla questione quando parleremo dei vincoli anolonomi, nella sezione 3.6.

[5]Questo argomento richiede qualche conoscenza elementare sui corpi rigidi. Il lettore che ne fosse sprovvisto può posticiparne lo studio a dopo lo studio dei corpi rigidi, nella sezione 3.5.

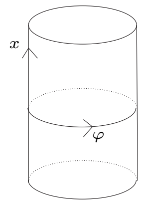
Inevitabilmente, a questo stadio dello sviluppo della teoria, la trattazione di questo esempio non può essere completamente rigorosa. Il motivo è che non abbiamo ancora introdotto la nozione di 'corpo rigido'. Usiamo allora questo esempio come un'occasione per dare un primo sguardo, informale, all'argomento.

Consideriamo una lamina piana a forma di disco. Possiamo immaginare che essa sia costituita da un gran numero di punti materiali, le distanze fra i quali non variano. Si capisce che, almeno se il numero dei punti è finito, questa è una generalizzazione piuttosto ovvia dell'esempio del 'manubrietto' e che questo vincolo di 'rigidità' produca un sistema olonomo.

Supponiamo ora che questo disco sia ulteriormente vincolato ad appartenere ad un piano. È evidente che per determinare la posizione di ciascuno dei suoi punti, cioè la configurazione del sistema, è sufficiente conoscere la posizione di uno di essi e l'angolo fra una semiretta solidale al disco ed una semiretta solidale al piano. Per esempio, scelto un sistema di coordinate cartesiane (x, y) sul piano, potremmo assegnare le coordinate (x_C, y_C) del centro del disco e l'angolo (orario, per esempio) fra il semiasse negativo delle y ed un certo raggio CA del disco, scelto una volta per tutte. Si riconosce così che la varietà delle configurazioni è $\mathbb{R}^2 \times S^1$, con coordinate (x_C, y_C, φ).



Introduciamo adesso un ulteriore vincolo: supponiamo che il disco debba avere un punto in contatto con l'asse delle x, che pensiamo come una guida rettilinea.[6] La configurazione del sistema è allora determinata dall'assegnazione della coordinata x del punto di contatto, cioè x_C, e dall'angolo φ precedentemente introdotto. Dunque, la varietà delle configurazioni è ora



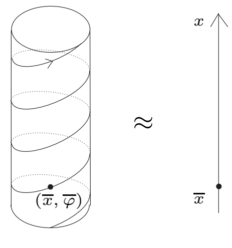
$$\mathbb{R} \times S^1 \ \ni \ (x, \varphi)$$

ed è un cilindro.

Introduciamo infine il vincolo di *puro rotolamento:* supponiamo che l'asse x sia (infinitamente) scabro, cosicchè il disco non possa strisciare su di esso. Questo vincolo si esprime in modo preciso richiedendo che il punto del disco in contatto con la guida abbia velocità nulla. Si riconosce facilmente che questo vincolo, che è stato imposto come vincolo sulle velocità dei punti del sistema, è in realtà olonomo. È innanzittutto evidente che esso pone delle limitazioni alle configurazioni del sistema, che non può più trovarsi in qualunque punto del cilindro $\mathbb{R} \times S^1 \ni (x, \varphi)$. Infatti, se $(\overline{s}, \overline{\varphi})$ è una configurazione del sistema (per esempio, quella nella quale il sistema è stato realizzato dallo sperimentatore, poggiando il disco sulla guida) allora ogni altra configurazione (x, φ) è ad essa legata dalla

$$x - \overline{x} \ = \ R(\varphi - \overline{\varphi}) \,,$$

ove R è il raggio del disco. Questo si vede subito immaginando di far rotolare il disco sulla guida: in assenza di strisciamento, il punto di contatto deve tracciare un arco sul disco ed un segmento sulla retta della stessa lunghezza. Questa è l'equazione di una retta che si avvolge sul cilindro.[7] Così, il vincolo di rotolamento è in realtà un vincolo olonomo: il sistema ha un grado di libertà e varietà delle configurazioni $\mathbb{R}$. Come coordinata sulla varietà delle configurazioni si può prendere x, oppure una funzione di x. (*Attenzione:* se come coordinata si prende φ, bisogna pensarla a valori in tutto $\mathbb{R}$, non più sul cerchio; φ e $\varphi + 2\pi$ individuano *distinte* configurazioni del sistema.)



[6]A rigore, perchè questo abbia senso, si dovrebbe assumere che il disco sia costituito da un continuo di punti. Però, la trattazione di sistemi costituiti da infiniti punti va al di là degli obiettivi di questo corso. Non approfondiremo dunque questo aspetto.

[7]Questo è appena impreciso: nella parametrizzazione del cilindro, $\varphi \in S^1$ e dunque la formula precedente parametrizza solo un tratto di questa retta. Per parametrizzarla tutta, si dovrebbe usare s come coordinata e scrivere invece

$$\varphi = \frac{x}{R} + \text{cost} \quad (\text{mod} 2\pi)$$

che è chiaramente una funzione non invertibile globalmente. È il solito problema che si incontra con gli angoli.

Osservazioni. (i) Questo è un caso molto speciale, in cui gioca un ruolo essenziale il fatto che, prima dell'introduzione del vincolo di rotolamento, il sistema ha solo due gradi di libertà. Se il disco rotolasse senza strisciare su un piano, per esempio, il sistema non sarebbe olonomo. In generale, il vincolo di rotolamento non è olonomo. Si veda la sezione 3.7.

(ii) Nella letteratura, vincoli di questo tipo, che nascono non–olonomi ma sono equivalenti a vincoli olonomi, vengono considerati a volte olonomi ed altre volte non–olonomi; in questo secondo caso, vengono chiamati non–olonomomi 'integrabili'.

D. Atti di moto vincolati. Naturalmente, per descrivere la dinamica di un sistema vincolato dobbiamo prenderne in considerazione anche gli atti di moto. Se Q è la varietà delle configurazioni, allora un moto vincolato è una curva $t \mapsto X^t \in Q$. Di conseguenza, ad ogni istante t, la sua velocità $\dot{X}^t$ è un vettore tangente a Q:[8]

$$\dot{X}^t \in T_{X^t}Q\,.$$

Per rappresentare gli atti di moto, abbiamo dunque bisogno di introdurre delle coordinate anche sugli spazi tangenti. Vi è una scelta standard per tali coordinate, che discende dalla scelta delle coordinate su Q. Infatti, la condizione sul rango della matrice $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}$ significa che le sue colonne, cioè gli n vettori

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}(q)\,, \ldots\,, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}(q) \;\in\; \mathbb{R}^{3N}\,,$$

sono ovunque linearmente indipendenti. Questi vettori sono le derivate delle n 'curve coordinate' su Q

$$\lambda \mapsto \tilde{X}(q_1+\lambda, q_2, \ldots, q_n),\; \ldots,\; \lambda \mapsto \tilde{X}(q_1, q_2, \ldots, q_n+\lambda)\,.$$

Dunque, per ogni $q \in U$, essi sono vettori tangenti a Q in $\tilde{X}(q)$:

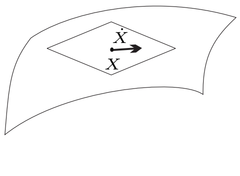
$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}(q)\,, \ldots\,, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}(q) \;\in\; T_{\tilde{X}(q)}Q\,.$$

Siccome gli spazi tangenti a Q hanno dimensione n, i vettori $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}(q)$, ..., $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}(q)$ ne sono una base (a volte chiamati *base naturale*). Di conseguenza, un sistema di coordinate q su Q induce delle coordinate anche sugli spazi tangenti a Q: il vettore tangente a Q nel punto $\tilde{X}(q)$ che ha coordinate $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ è il vettore

$$\tilde{W}(q,\dot{q}) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q) \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q)\dot{q} \;\in\; T_{\tilde{X}(q)}Q\,. \tag{3.2.4}$$

Le coordinate $\dot{q}$ sono chiamate *velocità generalizzate* o *lagrangiane.* Possiamo ora esprimere la velocità di un moto vincolato $t \mapsto X^t$ in coordinate $(q,\dot{q})$: se $X^t = \tilde{X}(q^t)$ allora

$$\frac{dX^t}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}\big[\tilde{X}(q^t)\big] \;=\; \tilde{W}(q^t,\dot{q}^t) \;\in\; T_{\tilde{X}(q^t)}Q\,.$$



Si osservi che gli atti di moto $(X,\dot{X}) \in \mathbb{R}^{6N}$ del sistema devono appartenere al sottoinsieme TQ dello spazio degli atti di moto costituito da tutti i punti $(X,\dot{X})$ tali che $X \in Q$ e $\dot{X}$ è tangente a Q in X:

$$TQ \;:=\; \{(X,\dot{X}) \in \mathbb{R}^{6N} \;:\; X \in Q\,,\; \dot{X} \in T_XQ\}\,.$$

[8]Per la nozione di spazio tangente e per qualche spiegazione si veda la sezione di richiami 3.8.

Questo sottoinsieme si chiama *fibrato tangente* della varietà Q. Si può cercare di raffigurarlo mentalmente come la varietà Q con attaccati tutti i suoi spazi tangenti, ed immersa nello spazio degli atti di moto, di dimensione doppia, non più in quello delle configurazioni.

Osservazione: Siccome ogni spazio tangente è uno spazio vettoriale n–dimensionale, ed è dunque isomorfo ad $\mathbb{R}^n$, si potrebbe pensare che TQ sia il prodotto cartesiano di Q ed $\mathbb{R}^n$. Questo è vero solo in casi semplici. Per esempio, se $Q = U$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ allora ovviamente $TU = U \times \mathbb{R}^n$; questo è esattamente quanto si è fatto nel passare dallo spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^{3N}$ a quello degli atti di moto $\mathbb{R}^{6N}$ per un sistema non vincolato. Un altro esempio è quello di un cerchio C: il suo fibrato tangente è anch'esso il prodotto $C \times \mathbb{R}$, un cilindro (si veda la sezione 3.8). Nel seguito noi non avremo bisogno di considerare casi più complicati di questi. Il motivo è che, se si introducono coordinate locali $\tilde{X} : U \to \tilde{U}$ su Q, allora ci si restringe di fatto a lavorare nell'aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ e, come abbiamo appena detto, TU è allora il prodotto di U e di $\mathbb{R}^n$, con coordinate $(q, \dot{q})$.

Per questo motivo la nozione di fibrato tangente, e più in generale tutto l'aspetto globale, serviranno nel seguito più come riferimento concettuale che come effettivo strumento di calcolo. In effetti, adotteremo ovunque un punto di vista locale, lavorando all'interno di un sistema di coordinate. Tuttavia, è utile tenere presente l'aspetto globale, almeno come idea geometrica soggiacente tutto il lavoro analitico.

Osserviamo infine che TQ non è solo un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{6N}$, ma una sua sottovarietà di dimensione $2n$, sulle quali si possono usare come coordinate locali le $(q, \dot{q})$. (Si veda la sezione 3.9).

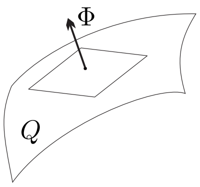
Esercizi 3.2.2 (i) Determinare i vettori della base naturale nel caso di un cerchio parametrizzato con l'angolo.

(ii) Stessa domanda, per una sfera parametrizzata con coordinate sferiche.

E. "Idealità" dei vincoli. Finora abbiamo considerato i vincoli solo da un punto di vista puramente geometrico. Prendiamo adesso in considerazione le reazioni vincolari. Consideriamo un sistema olonomo costituito da N punti $P_1, \ldots, P_N$ le cui coordinate cartesiane in un certo sistema di riferimento sono $(x_1, \ldots, x_N)$. Supponiamo che su ogni punto P_h agisca una forza 'attiva' $f_h(x_1, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, t)$ ed una reazione vincolare ϕ_h. Allora le equazioni del moto sono

$$m_h \ddot{x}_h \;=\; f_h + \phi_h \,, \qquad h = 1, \ldots N \,. \tag{3.2.5}$$

La nozione di vincolo ideale, che come si è detto generalizza quella di curva o superficie liscia, fa riferimento alle proprietà delle reazioni vincolari $\phi_1, \ldots, \phi_N$ che il vincolo può espletare sui punti del sistema, caratterizzate per mezzo del vettore $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N) \in \mathbb{R}^{3N}$:



Definizione: *Un vincolo olonomo con varietà delle configurazioni Q è* ideale *se le reazioni vincolari che esso può espletare sul sistema quando questi si trova in una qualunque configurazione $X \in Q$ sono* tutti e soli[9] *i vettori $\Phi \in \mathbb{R}^{3N}$ ortogonali a $T_X Q$:*

$$\Phi \cdot V \;=\; 0 \qquad \forall V \in T_X Q \,. \tag{3.2.6}$$

Attenzione: nella definizione, l'"ortogonalità" è quella fra vettori dello spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^{3N} \ni X$, *non* dello spazio tridimensionale nel quale i punti materiali si muovono. Le due cose coincidono se il sistema è costituito

[9] Il ruolo del 'tutti' sarà chiaro quando si mostrerà che le equazioni del moto sono le equazioni di Lagrange.

da un solo punto materiale, ma possono essere completamente scollegate l'una dall'altra se $N > 1$; si vedano qui sotto gli esempi dei vincoli di rigidità e di puro rotolamento.

Naturalmente, non tutti i vincoli olonomi sono ideali (si pensi alla curva scabra), ma vi è un'ampia classe di vincoli olonomi che sono ideali.

Esempi: 1. Punto materiale vincolato a curva liscia, sia fissa che mobile.

2. Punto vincolato a superficie "liscia. Diciamo che una superficie è liscia se le componenti della reazione vincolare tangenti alla superficie sono nulle.

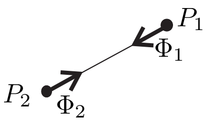
3. Il pendolo. Supponiamo che il pendolo sia realizzato congiungendo un punto materiale P ad un punto fisso per mezzo di una sbarretta rigida di massa trascurabile e libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per l'estremo fisso. Siccome la velocità del punto P è ortogonale alla sbarretta, il vincolo è ideale se la forza esercitata dalla sbarretta sul punto P è parallela alla sbarretta stessa (cioè se la sbarretta non esercita una coppia: questo è proprio quel che avviene se non c'è attrito).

4. Due punti vincolati rigidamente (manubrio). Questo è l'esempio già considerato nella sezione C. Indichiamo con $r_1 \in \mathbb{R}^3$ ed $r_2 \in \mathbb{R}^3$ i vettori posizione dei due punti, cosicché la configurazione del sistema è $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^6$. La condizione di idealità significa che la reazione vincolare $\Phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^6$ deve essere ortogonale alla varietà delle configurazioni $Q \approx \mathbb{R}^3 \times S^2$, che ha dimensione cinque ed è definita da $\Psi(r_1, r_2) = 0$ con

$$\Psi(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|^2 - l^2 .$$

Di conseguenza, il sottospazio di $\mathbb{R}^6$ ortogonale allo spazio tangente a Q in un suo punto (r_1, r_2) ha dimensione uno e consiste di tutti i vettori paralleli al gradiente di Ψ in quel punto, che vale

$$l^{-1}(r_1 - r_2, r_2 - r_1) .$$



Dunque, $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ è ortogonale a $T_{(r_1,r_2)}Q$ se e solo se i due vettori ϕ_1 e ϕ_2 sono diretti come la congiungente i due punti P_1 e P_2 e sono uguali e opposti:

$$\phi_1 = -\phi_2 \; || \; r_1 - r_2 . \tag{3.2.7}$$

Il vincolo è dunque ideale se le reazioni vincolari sui due punti sono tutte e sole quelle che soddisfano (3.2.7).

[Queste ipotesi sembrano ragionevoli se, per esempio, si vuole modellizzare un sistema costituito da due masse unite da una sbarretta molto rigida, molto resistente a trazione e compressione, e di massa molto piccola. Ma, lo sottolineiamo, nell'ambito di questo approccio, nel quale non facciamo un modello della sbarra, non vi è modo di *dimostrare* che queste ipotesi siano verificate. Il fatto se un dato dispositivo produca un vincolo che è ben descritto come ideale è una questione di ovvio interesse per le applicazioni, che altrettanto ovviamente ha aspetti delicati, ma che esula dal nostro approccio. (Torneremo molto brevemente su questo punto nelle osservazioni della sezione 3.2.F).]

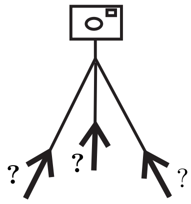
5. Puro rotolamento. Nel puro rotolamento del disco su una guida, considerato nella sezione 3.2.C, vi è ad ogni istante un solo punto di contatto fra la guida (il dispositivo che realizza il vincolo) ed il disco (il sistema). Di conseguenza, ad ogni istante, il vincolo esercita una reazione vincolare ϕ solo sul punto P del disco che è in contatto con la guida. Dunque $\Phi \cdot \dot{X} = \phi \cdot v_P = 0$ perchè la velocità di P è nulla. Dunque il vincolo è ideale.

Esercizi 3.2.3 (i) Mostrare che un sistema di due punti vincolati ad una curva liscia è ideale.

F. Qualche considerazione sui vincoli. Aggiungiamo alcune osservazioni sulla definizione di vincolo olonomo, di idealità dei vincoli e, più in generale, sulla descrizione che ne abbiamo dato.

(i) L'introduzione di tipo assiomatico dei vincoli fatta qui può (giustamente) apparire insoddisfacente. L'idea soggiacente l'introduzione delle nozioni di vincolo e reazione vincolare è che vi siano dei dispositivi meccanici le cui diverse parti microscopiche (molecole, reticolo cristallino, ...) esercitano l'una sull'altra forze di richiamo molto intense, capaci di conferire una sostanziale "rigidità" al dispositivo. Ci si può allora domandare se si possa arrivare a definire i vincoli con un procedimento di limite, nelle quali queste forze divengano via via più intense. Questo problema, chiamato della "realizzazione" dei vincoli, ha grande interesse concettuale ed ha una risposta (sostanzialmente) positiva. Una prima analisi di questo problema, che è matematicamente un po' delicato, si trova sul testo di G. Gallavotti *Meccanica Elementare* (Boringhieri).

(ii) Si tenga presente che si sono definite solo le reazioni vincolari esercitate su ciascun punto del sistema. Se, come avviene in molti casi, il vincolo è realizzato fisicamente con diverse componenti collegate fra loro (aste, ...), il modello di vincoli sviluppato qui non permette in alcun modo di stabilire quale parte della reazione vincolare sia supportata da ciascuna componente. Come esempio si consideri una macchina fotografica (il sistema meccanico) appoggiata ad un treppiede (il dispositivo che realizza il vincolo). Lo stelo centrale del treppiede esercita una reazione vincolare sul punto della macchina fotografica al quale è attaccato. (Se la macchina fotografica è a riposo, questa reazione vincolare ne eguaglia il peso). Non è però possibile stabilire, all'interno del modello di vincoli fatto qui, quale parte della reazione vincolare sia esercitata da ciascuna delle tre gambe–ovvero dal punto del pavimento sulla quale la gamba del treppiede poggia.



Questo tipo di problemi ha ovviamente grande importanza ingegneristica. Per dargli una risposta bisogna necessariamente modificare il modello. Una possibilità è quella di includere le diverse parti del treppiede nel sistema: questo vuol dire dattribuirgli un po' di massa e modellizzarle, per esempio, come aste rigide vincolate l'una all'altra; il numero dei gradi di libertà cresce, il problema si complica, ma almeno in linea di principio ha una soluzione. Un'altra possibilità, molto ragionevole se tutto quel che si vuole studiare è, per esempio, la distribuzione dei carichi nella situazione statica descritta in figura, è quello di complementare il modello con delle ragionevoli ipotesi ad hoc sul vincolo, che permettano di arrivare a delle conclusioni ragionevoli.

Una interessante discussione di tipo fisico/ingegneristico sui vincoli, che include delle considerazioni sul problema della determinazione delle reazioni vincolari, si può trovare sul testo di C. Cercignani *Spazio, Tempo, Movimento* (Zanichelli).

(iii) Nel caso considerato qui di un vincolo fisso, tutti i vettori tangenti alla varietà delle configurazioni sono possibili velocità del sistema. (Infatti, ogni vettore tangente alla varietà delle configurazioni può essere preso come velocità iniziale.) Allora, se scriviamo $V = (v_1, \ldots, v_N)$, la condizione di idealità (3.2.6) si scrive

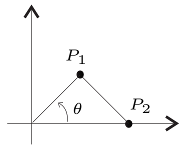
$$\sum_{h=1}^{N} \phi_h \cdot v_h \; = \; 0$$

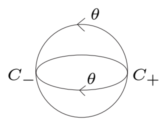
ed esprime il fatto che, *le reazioni vincolari compiono lavoro nullo su ogni possibile atto di moto del sistema* (compatibile con i vincoli). È evidente che l'origine della nozione di vincolo ideale sia proprio quella di vincolo senza attrito. Tuttavia, come mostra il caso del puro rotolamento, le due cose non sono equivalenti: in presenza di attrito, l'idealità del vincolo è preservata se, per esempio, i punti di contatto hanno velocità nulla. Dunque, la considerazione del lavoro delle reazioni vincolari è molto più generale dell'assenza di attrito.

(iv) Nella letteratura sulla Meccanica, i vettori tangenti alla varietà delle configurazioni (istantanea, se il vincolo è mobile) sono chiamati *velocità virtuali* o anche *spostamenti virtuali.* Usando questa terminologia, in molti testi la condizione di idealità viene espressa dicendo che *le reazioni vincolari compiono "lavoro virtuale" nullo.* In realtà, questa terminologia trae origine dal caso di vincoli mobili, che tratteremo più avanti.

(v)* *Singolarità dell'insieme vincolare.* L'ipotesi che il sottoinsieme dello spazio delle configurazioni accessibile ad un sistema vincolato in modo olonomo sia una varietà è un'ipotesi naturale, e verificata in molti casi, ma non sempre. Si possono infatti costruire semplici sistemi nella quale essa non è verificata. Un esempio banale è quello di un punto vincolato ad un cono.

Un esempio più sottile, ma altrettanto elementare, è quello del sistema di due punti mostrato in figura: P_1 è vincolato a distanza l dall'origine delle coordinate e P_2 è vincolato ad appartenere all'asse x e a restare a distanza l da P_1. A prima vista si può pensare che l'insieme delle configurazioni sia un cerchio, e che come coordinata su di esso si possa prendere, per esempio, l'angolo θ mostrato in figura. Tuttavia, questo non è vero. Consideriamo infatti l'insieme di tutte le configurazioni nelle quali P_2 non sta nell'origine e delle due configurazioni con P_2 nell'origine e P_1P_2 verticale, o in alto o in basso. L'angolo θ determina univocamente ciascuna di queste configurazioni e si riconosce subito che esse formano un cerchio (si immagini di far crescere, nella figura, θ da 0 a 2π). Però vi sono anche altre configurazioni del sistema, quelle nelle quali P_2 sta nell'origine e P_1 ovunque. Anche queste formano un cerchio, e anche su di esso si può usare l'angolo θ come coordinata. I due cerchi si intersecano nelle due configurazioni C_+ e C_- nelle quali P_1P_2 è verticale. Dunque, l'insieme delle configurazioni permesse dal vincolo ha la struttura di due cerchi che si intersecano in due punti. Nell'intorno di ciascuno dei due punti di auto–intersezione esso non ha la struttura di una varietà differenziabile.





Lo studio pratico di casi di questo tipo è difficile. Ovviamente non ci sono problemi a studiare il moto del sistema fino a che esso non arriva in uno dei punti nei quali si perde la struttura di varietà.[10] Capire cosa faccia il sistema quando passa per uno di questi punti richiede invece un'analisi attenta, caso per caso; problemi di questo tipo possono avere a volte interesse ingegneristico, ma sono di scarsa importanza in Fisica.

(vi) Varietà vincolare con bordo.* Un caso che si incontra frequentemente in pratica è quello di una varietà vincolare con bordo, cosicché il vincolo è unilatero. Questo avviene, per esempio, nel caso del sistema articolato dell'esempio precedente, se le lunghezze delle due aste OP_1 e P_2P_1 sono diverse—convincersene, per utile esercizio. Lo studio della dinamica del sistema allorchè è raggiunto il bordo della varietà delle configurazioni richiede ipotesi ad hoc ma, anche questo, ha scarso interesse per la Fisica.

3.3 Le equazioni di Lagrange

A. Energia cinetica. Come abbiamo già accennato, le equazioni del moto di un sistema soggetto a vincoli olonomi ideali si ottengono proiettando le equazioni di Newton sugli spazi tangenti alla varietà delle configurazioni. Precisamente, una volta introdotto un sistema di coordinate $q \mapsto \tilde{X}(q)$ sulla varietà delle configurazioni, basta proiettare le equazioni di Newton sugli n vettori $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}$ di base degli spazi tangenti. Esattamente come nel caso 'libero' del capitolo precedente, le equazioni che così si trovano sono le equazioni Lagrange.

L'unica differenza dal caso libero è che adesso nelle equazioni di Lagrange compare non l'energia cinetica del sistema libero, ma quella del sistema vincolato – cioè, l'energia cinetica del sistema ristretta agli atti di moto vincolati (cioè, al fibrato tangente TQ). Siccome la velocità del sistema nell'atto di moto vincolato di coordinate $(q, \dot{q})$ è $\tilde{W}(q, \dot{q})$, si veda la (3.2.4), l'energia cinetica in tale atto di moto è

$$T(q, \dot{q}) \;=\; \frac{1}{2}\, M\tilde{W}(q, \dot{q}) \cdot \tilde{W}(q, \dot{q})\,.$$

[10] Per questo motivo, e con questa tacita convenzione, sistemi di questo tipo si incontrano anche negli esercizi.

Come nel caso libero, si ha:

Proposizione 27 *Nel caso considerato qui di vincoli olonomi fissi si ha*

$$T(q,\dot{q}) \;=\; \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A(q)\dot{q} \tag{3.3.1}$$

ove $A = \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\right)^T M \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}$ *è una matrice* $n\times n$ *simmetrica e definita positiva.*

Dimostrazione. La dimostrazione è la stessa della Proposizione 21. Solo, per dimostrare che A è definita positiva si usa adesso il fatto che la matrice Jacobiana $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}$ ha rango n. ■

Esempi: 1. Particella vincolata ad un piano. Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane (x,y,z) in cui il piano è $z=0$. Se come coordinate lagrangiane usiamo (x,y), allora l'energia cinetica è ovviamente

$$T(x,y,\dot{x},\dot{y}) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\,.$$

L'espressione dell'energia cinetica in un qualunque altro sistema di coordinate q si ottiene da qui, esprimendo $\dot{x}$ ed $\dot{y}$ in termini delle q e delle $\dot{q}$. Per esempio, in coordinate polari (r,φ) si ha $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ e dunque

$$\dot{x} \;=\; \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\,, \qquad \dot{y} \;=\; \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\,;$$

pertanto

$$T(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)\,. \tag{3.3.2}$$

2. Particella vincolata ad un cerchio. Se la parametrizzazione del vincolo è $x=R\cos\varphi, y=R\sin\varphi, z=0$, ove φ è un angolo sul cerchio ed R il suo raggio, si trova

$$T(\varphi,\dot{\varphi}) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,R^2\,\dot{\varphi}^2\,.$$

Si osservi che, equivalentemente, si sarebbe potuto inserire l'ulteriore vincolo $r=R$ nella (3.3.2). (Infatti, T è la restrizione dell'energia cinetica del sistema non vincolato a TQ, e non importa come sia fatta la restrizione, se in un sol colpo o in due.)

3. Manubrio vincolato al piano. Consideriamo il 'manubrio' vincolato ad un piano dell'esempio 5 della sezione 3.2.B. Indichiamo con (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) le coordinate cartesiane dei due punti P_1 e P_2 ed assumiamo che essi siano vincolati al piano $z=0$. Come in quell'esempio, usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane di P_1 e l'angolo θ fra il semiasse x positivo e P_1P_2:

$$x_1=x\,,\quad y_1=y\,,\quad z_1=0\,,\quad x_2=x+l\cos\theta\,,\quad y_2=y+l\sin\theta\,,\quad z_2=0\,.$$

Dunque

$$\dot{x}_1=\dot{x}\,,\quad \dot{y}_1=\dot{y}\,,\quad \dot{z}_1=0\,,\quad \dot{x}_2=\dot{x}-l\dot{\theta}\sin\theta\,,\quad \dot{y}_2=\dot{y}+l\dot{\theta}\cos\theta\,,\quad \dot{z}_2=0\,.$$

Se assumiamo che i due punti abbiano uguale massa m, allora l'energia cinetica è

$$T(x,y,\theta,\dot{x},\dot{y},\dot{\theta}) \;=\; \frac{1}{2}\,m\Big[2\dot{x}^2+2\dot{y}^2+l^2\dot{\theta}^2-2l\dot{\theta}(\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta)\Big]\,.$$

Esercizi 3.3.1 (i) Scrivere l'energia cinetica del manubrio dell'esempio 3. usando come coordinate lagrangiane le coordinate (x,y) del punto medio del segmento P_1P_2 e l'angolo θ fra il semiasse x positivo e P_1P_2.

(ii) Scrivere l'energia cinetica di un punto vincolato alla sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ usando come coordinate (locali) le coordinate sferiche (θ,φ).

(iii) Lo stesso, ma usando come coordinate (locali) x ed y. Indicare il dominio di queste coordinate.

(iv) Scrivere l'energia cinetica di un punto materiale vincolato alla superficie del cono di equazione cartesiana

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

usando come coordinate (x,y).

(v) Scrivere l'energia cinetica di un punto materiale vincolato alla superficie toroidale di equazione cartesiana

$$x \;=\; (R+r\cos\theta)\cos\varphi\,, \qquad y \;=\; (R+r\cos\theta)\sin\varphi\,, \qquad z \;=\; r\sin\theta\,, \qquad \varphi,\theta\in S^1\,,$$

ove $r<R$ sono due costanti (i due raggi del toro), usando come coordinate (φ,θ).

(vi) Scrivere l'energia cinetica di un pendolo doppio costituito da due pendoli di uguale massa m e lunghezza l appesi l'uno all'altro, usando come coordinate gli angoli θ_1 e θ_2 fra la verticale discendente ed i pendoli.

B. Le equazioni di Lagrange. Come nel caso libero, nelle equazioni di Lagrange compaiono le 'componenti lagrangiane delle forze attive"

$$\mathcal{Q}_i(q,\dot q,t) \;:=\; F(\tilde X(q),\tilde W(q,\dot q),t)\,\cdot\,\frac{\partial\tilde X}{\partial q_i}(q)\,, \qquad i=1,\ldots,n$$

dove, ricordiamo, $\tilde W(q,\dot q)=\frac{\partial\tilde X}{\partial q}(q)\dot q$.

Proposizione 28 *Consideriamo un sistema di N punti materiali soggetto ad assegnate forze attive $F(X,\dot X,t)$ ed a vincoli olonomi fissi ed ideali, con varietà delle configurazioni Q. Allora:*
(i) Per ogni dato iniziale $(X_0,\dot X_0)\in TQ$ esistono e sono unici
- *un moto $t\mapsto X^t\in Q$ con quel dato iniziale*
- *una reazione vincolare $t\mapsto\Phi^t$ ad ogni istante ortogonale a $T_{X^t}Q$*

tali che

$$M\ddot X^t \;=\; F(X^t,\dot X^t,t) \;+\; \Phi^t \qquad \forall t\,. \tag{3.3.3}$$

(ii) In coordinate lagrangiane, il moto $X^t=\tilde X(q^t)$ corrisponde ad un moto $t\mapsto q^t$ che soddisfa le "equazioni di Lagrange"

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\big(q^t,\dot q^t\big)\Big] \;-\; \frac{\partial T}{\partial q_i}\big(q^t,\dot q^t\big) \;=\; \mathcal{Q}_i\big(q^t,\dot q^t,t\big)\,, \quad i=1,\ldots,n\,. \tag{3.3.4}$$

Queste sono equazioni del secondo ordine in $(q_1,\ldots,q_n)$ che possono essere messe in forma normale.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto la necessità delle equazioni di Lagrange, cioè che, se esiste un moto $t\mapsto X^t$ che soddisfa le equazioni di Newton (3.3.3) con qualche reazione vincolare $t\mapsto\Phi^t$ soddisfacente la condizione di idealità, allora $t\mapsto q^t$ definita da $X^t=\tilde X(q^t)$ soddisfa le equazioni di Lagrange (3.3.4).

Usando le equazioni di Newton $M\ddot X=F+\Phi$, la condizione di idealità dei vincoli implica che il moto $t\mapsto X^t$ soddisfa l'equazione

$$\big[M\ddot X^t-F(X^t,\dot X^t,t)\big]\cdot V \;=\; 0 \qquad \forall V\in T_{X^t}Q\,,\ t\in\mathbb{R} \tag{3.3.5}$$

che si chiama *principio di d'Alembert.* Si può equivalentemente imporre questa condizione per n vettori tangenti linearmente indipendenti, in particolare quelli della base dello spazio tangente:

$$\big[M\ddot{X}^t - F(X^t, \dot{X}^t, t)\big] \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q^t, t) \;=\; 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Esattamente come nel caso libero della Proposizione 22 si trova che questa condizione equivale al fatto che q^t soddisfi le equazioni di Lagrange (3.3.4). Anche la dimostrazione del fatto che esse si possono mettere in forma normale è la stessa.

Non resta che dimostrare la parte (i). Assegnato il dato iniziale $(X^0, \dot{X}^0)$ è univocamente assegnato $(q^0, \dot{q}^0)$. Le equazioni di Lagrange allora determinano univocamente un moto $t \mapsto q^t$. Definiamo $X^t := \tilde{X}(q^t, t)$. Ripetendo al contrario i passaggi fatti nella dimostrazione della parte (ii) della proposizione 22 si vede che X^t soddisfa il principio di d'Alembert (3.3.5), cioè $(M\ddot{X}^t - F^t) \perp T_{X^t}Q$. Conseguentemente, se poniamo

$$\Phi^t \;:=\; M\ddot{X}^t - F(X^t, \dot{X}^t, t)$$

abbiamo che X^t soddisfa l'equazione di Newton (3.3.3) con una reazione vincolare Φ^t che soddisfa la condizione di idealità. L'unicità di X^t si prova per assurdo: se ne esistessero due distinte, esisterebbero due distinte soluzioni delle equazioni di Lagrange con gli stessi dati iniziali, ciò che viola l'unicità. L'unicità di Φ^t è allora ovvia: $\Phi = M\ddot{X} - F$. ■

C. La Lagrangiana. Come nel caso libero, se le componenti lagrangiane delle forze attive derivano da un'energia potenziale $V(q)$, nel senso che si ha $\mathcal{Q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$, o da un potenziale generalizzato $V(q, \dot{q})$, nel senso che $\mathcal{Q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q}$, allora le equazioni di Lagrange (3.3.4) prendono la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \;=\; 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n$$

con la Lagrangiana $L = T - V$. Anche adesso, inoltre, i potenziali generalizzati sono necessariamente affini nelle velocità: $V(q, \dot{q}, t) = V_0(q, t) + V_1(q, \dot{q}, t)$ con $V_1 = \beta(q, t) \cdot \dot{q}$.

Un caso tipico nel quale le componenti lagrangiane delle forze attive sono conservative è quello in cui le forze attive $F = (f_1, \ldots, f_N)$ agenti sulle particelle sono posizionali e conservative, ovvero esiste una funzione $\tilde{V}(X, t)$ tale che

$$F(X, t) \;=\; -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial X}(X, t)$$

In tal caso, V è la restrizione di $\tilde{V}$ alla varietà delle configurazioni, scritta in coordinate lagrangiane:

$$V(q, t) \;=\; \tilde{V}(\tilde{X}(q), t)\,.$$

Infatti

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} \;=\; \sum_\alpha \frac{\partial \tilde{V}}{\partial X_\alpha}\frac{\partial \tilde{X}_\alpha}{\partial q_i} \;=\; -\sum_\alpha F_\alpha \frac{\partial \tilde{X}_\alpha}{\partial q_i} \;=\; -\mathcal{Q}_i\,.$$

Un risultato analogo vale se le forze attive dipendono anche dalle velocità, $F = F(X, \dot{X}, t)$, ma sono descrivibili mediante un potenziale generalizzato, si vedano gli esercizi.

Esempi: (i) Pendolo sferico. Un pendolo sferico è un punto materiale vincolato in modo liscio alla superficie di una sfera e sul quale agisce, come unica forza attiva, il peso. Indichiamo con m la massa del punto e con R il raggio del cerchio. Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane (x, y, z) centrate nel centro della sfera e con l'asse z verticale ascendente. Siano (θ, φ) le usuali coordinate sferiche. Allora, come trovato in un esercizio precedente, l'energia cinetica è

$$T(\theta, \varphi, \dot\theta, \dot\varphi) \;=\; \frac{1}{2}\, m\, R^2 \left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \,\sin^2\theta\right).$$

L'energia potenziale della forza peso è $\tilde V(x, y, z) = mgz$ e dunque, ristretta al vincolo,

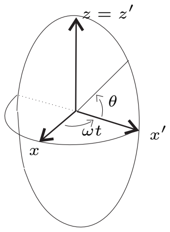
$$V(\theta, \varphi) \;=\; mgR\cos\theta\,.$$

Dopo la cancellazione di un irrilevante fattore mR, le equazioni di Lagrange sono

$$R\ddot\theta - (R\dot\varphi^2\cos\theta + g)\sin\theta \;=\; 0\,, \qquad (R\,\ddot\varphi\,\sin\theta + 2\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos\theta)\sin\theta \;=\; 0\,.$$

Abbiamo qui un esempio del fatto che, usando il metodo Lagrangiano, la deduzione delle equazioni del moto si effettua senza neppure prendere in considerazione le reazioni vincolari.

(ii) Pendolo rotante. Un pendolo rotante è costituito da un punto materiale pesante vincolato ad un cerchio che ruota attorno al suo asse verticale con velocità angolare costante ω rispetto ad un riferimento inerziale. Consideriamo un sistema di riferimento $\{O; e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}\}$ solidale al cerchio, con l'asse z' verticale ascendente ed il cerchio appartenente al piano (x', z') e centrato nell'origine. Questo è un riferimento non inerziale ma, in esso, il vincolo è fisso. Sia θ l'angolo fra $e_{x'}$ ed OP. L'energia cinetica del sistema è



$$T(\theta, \dot\theta) \;=\; \frac{1}{2}\, m\, R^2\, \dot\theta^2$$

e le forze attive agenti sul punto in questo riferimento sono, oltre al peso, anche la forza centrifuga e quella di Coriolis. La forza centrifuga $m\omega^2 x' e_{x'}$ ha l'energia potenziale $-\frac{1}{2}\, m\omega^2 x'^2 = -\frac{1}{2}\, mR^2\omega^2\cos^2\theta$. La forza di Coriolis, essendo ortogonale alla velocità del punto (relativa a questo riferimento), è ortogonale alla guida circolare, e dunque alla varietà delle configurazioni. Dunque, la componente lagrangiana della forza di Coriolis è nulla e di conseguenza essa non entra nelle equazioni del moto. (Essendo ortogonale alla guida, la forza di Coriolis è bilanciata dal "motore ideale" che tiene in rotazione la guida e non ha alcun effetto sul moto del sistema.) Allora, l'energia potenziale delle forze attive è

$$V(\theta) \;=\; mgR\sin\theta \;-\; \frac{1}{2} mR^2\omega^2\cos^2\theta$$

e la Lagrangiana è $L = T - V$. Come esercizio, scrivere le equazioni di Lagrange.

Esercizi 3.3.2 (i) Si mostri che, nel caso del pendolo sferico, la equazione di Lagrange per la coordinata φ si può scrivere nella forma di una legge di conservazione.

(ii) Scrivere la Lagrangiana del pendolo doppio dell'esempio 7 della sezione 3.2.B usando gli angoli φ_1 e φ_2 come coordinate.

(iii) Un punto materiale è vincolato alla superficie del paraboloide di equazione cartesiana

$$z \;=\; ax^2 + by^2\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

ove a e b sono parametri positivi, ed è soggetto alla forza peso. Scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange in coordinate (x, y). Vi sono valori di a e b per i quali una delle equazioni di Lagrange si riduce ad una legge di conservazione?

(iv) Scrivere la Lagrangiana in coordinate (x, y) di un punto materiale vincolato alla superficie dell'iperboloide ad una falda

$$z^2 \;=\; x^2 + y^2 + R^2\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ove R è una costante, sul quale non agiscono forze attive. Qual è il dominio delle coordinate?

(v)* Si supponga che le forze attive $F = (f_1, \dots, f_N)$ agenti sui punti di un sistema soggetto a vincoli (fissi, per semplicità) derivino da un potenziale generalizzato $\tilde{V}(X, \dot{X}, t)$:

$$F \; = \; \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial X}$$

Mostrare che le forze generalizzate derivano dal potenziale generalizzato

$$V(q, \dot{q}, t) \; := \; \tilde{V}(\tilde{X}(q), \tilde{W}(q, \dot{q}), t)\,.$$

D. Osservazioni. (i) Il *principio di d'Alembert* (3.3.5) è equivalente alle equazioni di Lagrange, come segue dalla dimostrazione della Proposizione. La differenza sta nel fatto che la (3.3.5) non è scritta in coordinate sulla varietà delle configurazioni, ma in coordinate in $\mathbb{R}^{3N}$. (Per qualche commento sul significato storico del principio di d'Alembert si vedano i Complementi alla fine del capitolo).

(ii) Le reazioni vincolari non compaiono nelle equazioni di Lagrange, ma si possono calcolare una volta risolte queste equazioni e determinati i moti: la reazione vincolare lungo il moto $t \mapsto X^t$ è ovviamente data da $\Phi^t = M\ddot{X}^t - F(X^t, \dot{X}^t, t)$. Naturalmente, risolvere (esattamente) le equazioni di Lagrange può essere estremamente difficile, o addirittura impossibile. In problemi applicativi nei quali sia necessario determinare le reazioni vincolari (per esempio per controllare che si resti al di sotto deil carico di rottura del dispositivo che realizza il vincolo) è naturalmente possibile, e anzi pratica corrente, ricorrere ad integrazioni numeriche.

(iii) Le equazioni di Lagrange (3.3.4) sono state scritte localmente, usando un sistema di coordinate sulla varietà delle configurazioni. Come vedremo più avanti (sezione 4.1) esse hanno però un significato globale, nel senso che sono la scrittura locale, nelle coordinate scelte, di un'equazione del secondo ordine che è definita sull'intera varietà delle configurazioni.

(iv) Un altro approccio allo studio dei sistemi vincolati è basato sulla descrizione del sistema in tutto lo spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^{3N}$ ma con equazioni del moto che contengono le reazioni vincolari, rappresentate per mezzo di moltiplicatori di Lagrange. Questo metodo (chiamato dei moltiplicatori di Lagrange o delle equazioni di Lagrange di 'prima specie') è discusso nei complementi a questo capitolo.

3.4 Vincoli mobili

Consideriamo adesso molto brevemente il caso dei vincoli mobili, cioè dipendenti dal tempo. Questo include anche il caso in cui il vincolo è fisso, ma si usano su di esso coordinate dipendenti dal tempo.

Diciamo che un sistema di N punti materiali è soggetto ad un vincolo olonomo mobile se, ad ogni istante t, il vettore configurazione X è ristretto ad appartenere ad una sottovarietà Q_t di $\mathbb{R}^{3N}$. Assumeremo inoltre che Q_t dipenda in modo regolare (differenziabile) da t.[11] In particolare, dunque, la dimensione n della varietà delle configurazioni Q_t è la stessa per ogni t. Sulla

[11] Precisamente, bisogna assumere che esistano una varietà Q ed una mappa differenziabile $(t, Q) \mapsto Q_t$ che, per ogni t, è un diffeomorfismo da Q a Q_t. In questo modo, le Q_t sono tutte diffeomorfe fra loro, con un diffeomorfismo che però dipende da t. Questo esclude situazioni difficili da trattare, come per esempio quella di una sfera che si buca e diventa un piano. Un vincolo olonomo mobile si può descrivere come superficie di livello di una sommersione dipendente (in modo differenziabile) dal tempo: $\Psi(X, t) = 0$ con rango$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial X}(X, t)\right] = 3N - n$ per tutti i t ed X tali che $\Psi(X, t) = 0$.

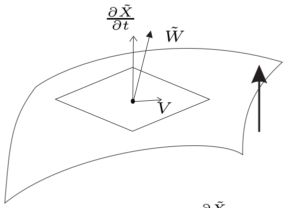
varietà delle configurazioni si possono ancora introdurre coordinate locali, ma naturalmente la parametrizzazione dipende adesso anche dal tempo:[12]

$$\tilde{X} \;:\; (q,t) \mapsto \tilde{X}(q,t)$$

ed il rango della matrice Jacobiana $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q,t)$ è n per tutti i t e q.

La differenza principale fra i vincoli fissi e quelli mobili risiede nel fatto che si deve distinguere fra vettori tangenti e velocità dei moti. Per definizione, lo spazio tangente ad una sottovarietà mobile è lo spazio tangente "istantaneo", cioè, per ogni t, lo spazio tangente a Q_t. Quindi, *il vettore velocità di un moto che ha luogo su una varietà mobile non è necessariamente tangente alla varietà.* A causa del 'trascinamento' dovuto al moto della varietà vincolare, la velocità di un punto su di esso ha in generale anche una componente ortogonale alla varietà stessa. Si pensi per esempio ad un punto vincolato alla superficie di un pallone che viene gonfiato oppure ad un punto vincolato al bordo di una ruota che rotola lungo una rotaia.

Per introdurre coordinate sugli spazi tangenti si può anche adesso usare il fatto che, ad ogni istante t, i vettori $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}(q,t), \dots, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}(q,t)$ formano una base per lo spazio tangente a Q_t nel punto $\tilde{X}(q,t)$. Allora, all'istante t, le coordinate $(q,\dot{q})$ determinano il vettore tangente



Vettore tangente $V = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\dot{q}$

e velocità $\tilde{W} = V + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}$

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q,t)\dot{q} \;\in\; T_{\tilde{X}(q,t)}Q_t \,.$$

Invece, la velocità del sistema nell'atto di moto di coordinate $(q,\dot{q})$ all'istante t è

$$\tilde{W}(q,\dot{q},t) \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q,t)\dot{q} \;+\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}(q,t)\,. \qquad (3.4.1)$$

Di conseguenza, l'energia cinetica del sistema nell'atto di moto vincolato di coordinate $(q,\dot{q})$ all'istante t è

$$T(q,\dot{q},t) \;=\; M\tilde{W}(q,\dot{q},t)\cdot\tilde{W}(q,\dot{q},t)\,.$$

Esattamente come nel caso di coordinate dipendenti dal tempo si trova che

$$T(q,\dot{q},t) \;=\; T_2(q,\dot{q},t) \;+\; T_1(q,\dot{q},t) \;+\; T_0(q,t) \qquad (3.4.2)$$

ove T_2 è una forma quadratica definita positiva in $\dot{q}$, T_1 è lineare in $\dot{q}$ e T_0 è indipendente da $\dot{q}$.

Esempio: Pendolo di lunghezza variabile. Consideriamo un punto materiale vincolato ad un cerchio il cui raggio R varia nel tempo in modo preassegnato, $R = R(t)$. In opportune coordinate cartesiane, l'equazione del vincolo è

$$x_1^2 + x_3^2 - R(t)^2 = 0\,, \qquad x_2 = 0\,.$$

Se si usa l'angolo θ sul cerchio (misurato per esempio dal semiasse x_1 positivo) come coordinata lagrangiana, l'immersione della varietà vincolare in $\mathbb{R}^3$ è data da

$$\tilde{X}(\theta,t) \;=\; (R(t)\cos\theta\,, 0\,, R(t)\sin\theta)\,.$$

Il vettore velocità del punto nell'atto di moto $(\theta,\dot{\theta})$ all'istante t è allora

$$\tilde{W}(\theta,\dot{\theta},t) \;=\; (R'(t)\cos\theta - R(t)\,\dot{\theta}\,\sin\theta\,,\; 0\,,\; R'(t)\sin\theta + R(t)\,\dot{\theta}\,\cos\theta)\,,$$

[12] Se $D_t : Q \to Q_t$ è il diffeomorfismo di cui alla nota precedente e $\hat{X} : \mathbb{R}^n \to Q$ sono coordinate su Q, allora $\tilde{X}_t := D_t \circ \hat{X} : \mathbb{R}^n \to Q_t$ sono coordiante su Q_t; si pone poi $\tilde{X}(q,t) = \tilde{X}_t(q)$.

ove $R'(t)$ è la derivata della funzione $R(t)$, mentre i vettori tangenti alla varietà delle configurazioni nel punto θ all'istante t sono

$$(-\,\dot\theta\, R(t)\sin\theta\,,\ 0\,,\ \dot\theta\, R(t)\,\cos\theta)\,, \qquad \dot\theta\in\mathbb{R}\,.$$

L'energia cinetica è

$$T(\theta,\dot\theta) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,R(t)^2\,\dot\theta^2\,\sin^2\theta \;+\; \frac{1}{2}\,m\,R'(t)^2\,.$$

Prendiamo adesso in considerazione le reazioni vincolari. Un momento di riflessione fa capire che per estendere la nozione di idealità ai vincoli mobili si deve richiedere che, ad ogni istante, la reazione vincolare sia ortogonale allo spazio tangente alla varietà vincolare a quell'istante. Si può pensare, per esempio, al caso di un punto vincolato ad una curva liscia, che però può muoversi nello spazio: l'idealità di questo vincolo riguarda l'interazione vincolo–sistema ed essa dovrebbe essere indipendente dal fatto che il vincolo si stia muovendo o no. Diciamo pertanto che il vincolo è ideale se, ad ogni istante t e per ogni configurazione $X\in Q_t$, le reazioni vincolari che esso può espletare sul sistema sono tutti e soli i vettori $\Phi\in\mathbb{R}^{3N}$ ortogonali a T_XQ_t:

$$\Phi\cdot V \;=\; 0 \qquad \forall V\in T_XQ_t\,. \tag{3.4.3}$$

È allora chiaro che, esattamente come nel caso di vincoli fissi, sotto l'ipotesi di idealità, proiettando le equazioni di Newton con le reazioni vincolari sugli spazi tangenti alla varietà delle configurazioni istantanea si ottengono le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \;=\; \mathcal{Q}_i\,, \qquad i=1,\ldots,n\,. \tag{3.4.4}$$

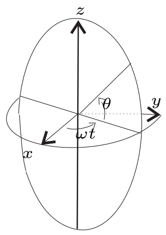
Precisamente, la Proposizione 28 continua a valere, con gli ovvi cambiamenti resi necessari dal fatto che i vincoli sono mobili: la varietà delle configurazioni Q deve essere ovunque sostituita con Q_t e il dato iniziale $(X_0,\dot X_0)$ non deve essere tangente a Q_t ma 'compatibile con il vincolo'. Con questo intendiamo che $X_0\in Q_{t_0}$ e che $\dot X_0$ deve essere una possibile velocità di un moto che passa per X_0 a quell'istante, deve cioè la giusta componente fuori dal piano tangente a Q_{t_0}. (In formule: se q_0 sono le coordinate di X_0, allora $\dot X_0=\tilde W(q_0,\dot q_0,t_0)$ per qualche $\dot q_0\in\mathbb{R}^n$).

Naturalmente, tutto questo si applica anche al caso in cui si usino coordinate mobili su una varietà delle configurazioni Q fissa: l'unica differenza è che in tal caso il vettore $\tilde W(q,\dot q,t)$ è tangente a Q in $\tilde X(q,t)$. Si noti che, naturalmente, l'energia cinetica ha in generale anche termini T_1 e T_0.

Esempio: Pendolo rotante. Consideriamo ancora il pendolo rotante di un esempio della sezione 3.4.C, ma descriviamolo adesso in un riferimento inerziale. Il sistema è costituito di un punto vincolato ad una guida circolare che ruota con velocità angolare costante di modulo ω attorno ad un suo diametro, coincidente con l'asse z di un sistema di coordinate cartesiane (x,y,z) centrato nel centro del cerchio. La varietà vincolare è dunque un cerchio, mobile, immerso in $\mathbb{R}^3$. Usiamo come coordinata lagrangiana l'angolo fra la verticale discendente ed il raggio passante per il punto. Se assumiamo che all'istante $t=0$ la guida circolare appartenga al piano x,z, allora la parametrizzazione della varietà delle configurazioni è

$$\tilde X(\theta,t) \;=\; \Big(R\,\cos\theta\,\cos\omega t\,,\ R\,\cos\theta\,\sin\omega t\,,\ R\,\sin\theta\Big) \;\in\; \mathbb{R}^3\,.$$

Allora, la velocità nell'atto di moto $(\theta, \dot\theta)$ all'istante t è



$$\begin{aligned}\tilde W(\theta,\dot\theta,t) \;=\; \Big(& -\omega R\cos\theta\,\sin\omega t - \dot\theta R\sin\theta\,\cos\omega t\,, \\ & \omega R\cos\theta\,\cos\omega t - \dot\theta R\sin\theta\,\sin\omega t\,, \\ & \dot\theta R\cos\theta\Big)\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$T(\theta,\dot\theta,t) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,R^2\,(\dot\theta^2+\omega^2\cos^2\theta)\,.$$

In questo riferimento, l'unica forza attiva agente sul punto è la forza peso, che ha energia potenziale $mgz = mgR\sin\theta$. Dunque la Lagrangiana è

$$L(\theta,\dot\theta,t) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,R^2\left(\dot\theta^2+\omega^2\cos^2\theta\right) - mgR\sin\theta\,.$$

Si osservi che la lagrangiana trovata qui è uguale alla lagrangiana scritta, nella sezione 3.4.C, in un riferimento (non inerziale) solidale al cerchio. Si noti la diversa genesi del termine $\frac{1}{2}m\omega^2\cos^2\theta$: nel primo caso esso appare come il termine T_0 dovuto al fatto che i vincoli sono mobili, nel secondo come energia potenziale della forza centrifuga, cambiata di segno. (Il fatto che le equazioni del moto, scritte nello stesso sistema di coordinate, siano le stesse, indipendentemente dal modo in sui sono state ottenute è ovvio. Il fatto che i due procedimenti producano la stessa Lagrangiana può sembrare pure ovvio, ma non lo è: si veda la sezione 4.1.D.)

Esercizi 3.4.1 (i) Scrivere la Lagrangiana del pendolo di lunghezza variabile considerato in un esempio di questa sezione. Vi sono dei termini in essa che non contribuiscono alle equazioni di Lagrange?

(ii) Scrivere la Lagrangiana di un punto vincolato ad un piano, usando come coordinate Lagragiane le coordinate del punto in un sistema si riferimento che ruota con velocità angolare costante di modulo ω e diretta ortogonalmente al piano.

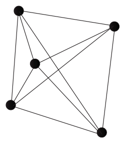
(iii) Scrivere la Lagrangiana di un pendolo il cui piano di sospensione ruota con velocità angolare $\omega(t)$ dipendente dal tempo.

Osservazioni: (i) Siccome, nel caso di vincoli mobili, i vettori velocità $\tilde W$ dei moti non sono in generale tangenti alla varietà vincolare istantanea, la condizione di idealità non fa riferimento al lavoro che le reazioni vincolari compiono sui moti del sistema. Piuttosto, essa fa riferimento al lavoro che le reazioni vincolari compirebbero sul sistema se i vincoli fossero "congelati". Per capire che questa è la giusta generalizzazione, si pensi ancora al caso della curva liscia della sezione 1, ammettendo però che essa possa muoversi.

(ii) Nella letteratura sulla Meccanica, i vettori tangenti alla varietà delle configurazioni (istantanea, se il vincolo è mobile) sono chiamati *velocità virtuali* o anche *spostamenti virtuali.* Le velocità "virtuali" coincidono con quelle "possibili" per i vincoli fissi, ma non per quelli mobili. Usando questa terminologia, in molti testi la condizione di idealità (3.4.3) viene espressa sia per vincoli fissi che per vincoli mobili dicendo che *le reazioni vincolari compiono "lavoro virtuale" nullo.*

3.5 Corpi rigidi

A. Definizione e varietà delle configurazioni. Si chiama *corpo rigido* un sistema di $N \geq 2$ punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ vincolati a mantenere costanti le distanze mutue:



$$|P_h - P_k| \;=\; \text{cost}\,, \qquad h,k \;=\; 1,\ldots N\,. \tag{3.5.1}$$

Mostriamo che questo è un vincolo olonomo e fisso. Per N arbitrario, non è del tutto facile verificarlo facendo riferimento alle $N(N-1)/2$ equazioni (3.5.1). È però facile determinare direttamente la varietà delle configurazioni $Q_{\rm CR}$ del sistema:

- *Se il corpo rigido ha almeno tre punti non allineati, allora* $Q_{\rm CR}$ *è diffeomorfa ad* $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$. *Dunque il sistema ha sei gradi di libertà.*
- *Se tutti i punti del corpo sono allineati, allora* $Q_{\rm CR}$ *è diffeomorfa ad* $\mathbb{R}^3 \times S^2$. *Il sistema ha cinque gradi di libertà.*

Ci limitiamo ad indicare idee della dimostrazione. Consideriamo innanzittuto il primo caso, nel quale il corpo ha almeno tre punti non allineati. Consideriamo un qualunque riferimento $\Sigma = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ solidale al corpo rigido, nel quale cioè tutti i punti del sistema siano in quiete.[13] La configurazione del sistema, cioè la posizione di tutti i suoi punti rispetto ad un riferimento preassegnato $\Sigma^* = \{O^*; e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$, è allora nota se si conosce la posizione del riferimento Σ relativamente al riferimento Σ^*. Questo equivale ad assegnare il vettore $O - O^* \in \mathbb{R}^3$ e la matrice $\mathcal{R}$ che dà l'orientazione di $\{e_1, e_2, e_3\}$ rispetto a $\{O^*; e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$, cioè una matrice di SO(3). Dunque, la configurazione del sistema è determinata da $(O - O^*, \mathcal{R}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$. In questo modo si vede che vi è una corrispondenza biunivoca fra Q_{CR} ed $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$. Resterebbe ancora da dimostrare che questa corrispondenza biunivoca è un diffeomorfismo, ma lo tralasciamo.

Le configurazioni di un corpo rigido i cui punti siano allineati sono evidentemente le stesse di quelle di un sistema costituito da due punti vincolati rigidamente. Sappiamo già che la varietà delle configurazioni è $\mathbb{R}^3 \times S^2$. Nel seguito, *restringeremo lo studio dei corpi rigidi al caso di corpi che abbiano almeno tre punti non allineati*: il caso speciale in cui tutti i punti sono allineati richiede infatti una trattazione separata che da un lato non è di grande interesse per le applicazioni e dall'altro non presenta particolari difficoltà.

Osservazioni: (i) SO(3) è il gruppo delle matrici ortogonali 3×3 con determinante positivo:

$$\mathrm{SO}(3) \;=\; \{R \in \Lambda(3) \,:\, RR^T = \mathbf{1}\,,\; \det R = 1\}\,.$$

Si può pensare ad SO(3) come ad una sottovarietà di $\mathbb{R}^9$. Infatti lo spazio vettoriale L(3) delle matrici reali 3×3 ha dimensione nove, come si vede osservando che una

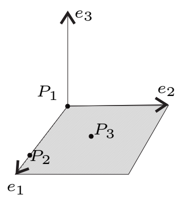
[13] In realtà, bisognerebbe dimostrare che questo riferimento esiste. Si può fare così. Supponiamo che P_1, P_2 e P_3 non siano allineati. Prendiamo $O = P_1$, $e_1 = \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}$, e_2 come il versore ortogonale ad e_1 che appartiene al piano che contiene i tre punti e che "punta" verso P_3, ed $e_3 = e_1 \times e_2$. Mostriamo che le coordinate di *ogni* punto del corpo rigido in questo riferimento sono costanti. Infatti, le coordinate di P_1, P_2 e P_3 lo sono per costruzione. Se il corpo ha tre soli punti, non c'è altro da dimostrare. Se vi è un altro punto P_h, esso appartiene all'intersezione di tre sfere centrate in P_1, P_2 e P_3. L'intersezione di queste sfere è costituita o di due punti o di un punto (perchè?), e questi punti sono fissi nel riferimento in considerazione. Allora P_h, stando in uno di questi punti, ha coordinate costanti.

base è costituita dalle matrici

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

ed è dunque isomorfo ad $\mathbb{R}^9$. Questo isomorfismo permette di immergere ogni sottoinsieme di L(3), ed in particolare SO(3), in $\mathbb{R}^9$. Per il fatto che SO(3) sia non solo un sottoinsieme, ma una sottovarietà di $\mathbb{R}^9$ e che abbia dimensione tre, si vedano gli esercizi.

(ii) Per scrivere l'immersione di Q_{CR} in $\mathbb{R}^3\times\mathrm{SO}(3)$ scegliamo una configurazione del sistema come "configurazione di riferimento". Siano $x^*_{P_1},\dots,x^*_{P_N}$ i vettori posizione dei punti del sistema quando esso si trova in tale configurazione (che usiamo un po' come "nomi" dei punti). Sia O il punto che occupa l'origine delle coordinate quando il sistema si trova in tale configurazione di riferimento. Allora le posizioni dei punti nella configurazione determinata da x_0 ed $\mathcal{R}$ sono



$$\tilde{x}_h(x_0,\mathcal{R}) \;=\; x_O \;+\; \mathcal{R}\,x^*_h \qquad h=1,\dots,3N\,. \tag{3.5.2}$$

Dunque la configurazione del sistema è $\tilde{X}(x_0,\mathcal{R})=(x_O\;+\;\mathcal{R}\,x^*_1,\dots,x_O\;+\;\mathcal{R}\,x^*_N)$. (Naturalmente, siccome $\mathcal{R}$ è una matrice, non una terna di numeri, $(x_0,\mathcal{R})$ non sono coordinate lagrangiane).

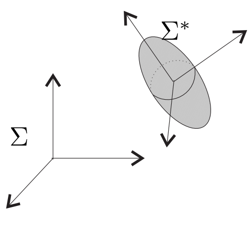
Esercizi 3.5.1 (i) Mostrare che la varietà delle configurazioni di un corpo rigido con un punto fisso è SO(3) se il corpo ha tre punti non allineati, S^2 altrimenti.

(ii) Mostrare che la varietà delle configurazioni di un corpo rigido con un asse fisso è S^1.

(iii)* (Un po' difficile) Il gruppo ortogonale O(3) è costituito dalle matrici di L(3) tali che $RR^T=\mathbf{1}$. Mostrare che è una sottovarietà tridimensionale di $\mathrm{L}(3)\approx\mathbb{R}^9$.

(iv)* Mostrare che anche SO(3) è una sottovarietà tridimensionale di $\mathrm{L}(3)\approx\mathbb{R}^9$.

B. Vettori tangenti a Q_{CR}. Per stabilire se il vincolo di rigidità sia ideale, abbiamo bisogno di scrivere il generico vettore tangente alla varietà delle configurazioni di un corpo rigido. Questo può sembrare complicato, ma in realtà sappiamo già la risposta dallo studio del moto relativo fatto nel Capitolo 2. Consideriamo il caso generico di un corpo rigido con tre punti non allineati, cosicchè $Q_{\rm CR}$ ha dimensione sei.



Notiamo preliminarmente che tutti i riferimenti solidali al corpo rigido hanno la stessa velocità angolare (rispetto ad un riferimento dato, che per semplicità di linguaggio omettiamo di specificare). Si definisce allora la *velocità angolare del corpo rigido* come la velocità angolare di un qualunque sistema di riferimento solidale ad esso.

La seguente proposizione contiene la "formula fondamentale" della cinematica dei corpi rigidi:

Lemma 3 *Se P e Q sono due punti di un corpo rigido (o solidali ad esso) in moto con velocità angolare ω, allora*

$$v_P\;-\;v_Q\;=\;\omega\times(P-Q)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo un riferimento solidale al corpo rigido con origine in Q. Siccome il punto P ha velocità nulla rispetto a questo riferimento, la sua velocità è uguale alla velocità di trascinamento, cioè appunto $v_P\;=\;v_Q+\omega\times(P-Q)$. ∎

Allora, un atto di moto di un corpo rigido $(P_1, \ldots, P_N, v_1, \ldots, v_N)$ è univocamente determinato dalla posizione e dalla velocità di un qualunque punto O del corpo, o ad esso solidale, e dalla velocità angolare del corpo tramite la formula

$$v_{P_h} \;=\; v_O + \omega \times (P_h - O)\,, \qquad h = 1 \ldots, N\,. \tag{3.5.3}$$

Nel seguito, potremo pertanto rappresentare un atto di moto rigido con $(x_O, \mathcal{R}, v_O, \omega)$: le posizioni dei punti del corpo sono date dalle (3.5.2) e le loro velocità dalle (3.5.3).

Siccome i vettori tangenti sono derivate di curve sulla varietà, e dunque velocità di possibili moti, si conclude che

Proposizione 29 *Si scelga un qualunque punto O solidale al corpo rigido. Allora, i vettori tangenti a Q_{CR} in $(P_1, \ldots, P_N)$ sono tutti e soli i vettori $(v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ dati da*

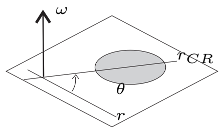
$$v_h \;=\; u + w \times (P_h - O)\,, \qquad u, w \in \mathbb{R}^3\,. \tag{3.5.4}$$

Questa formula fornisce un'identificazione degli spazi tangenti alla varietà delle configurazioni del corpo rigido con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (u, w)$. Questa rappresentazione dei vettori tangenti è ovviamente collegata alla rappresentazione di Q_{CR} come $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$: il vettore u è in effetti tangente ad $\mathbb{R}^3$ e w determina un vettore tangente ad SO(3) (in un modo spiegato nei complementi a questo capitolo).

Esercizi 3.5.2 (i) Se il corpo rigido è composto di due punti (o tutti i suoi punti sono allineati) la varietà delle configurazioni è $\mathbb{R}^3 \times S^2$ ed i suoi spazi tangenti sono allora diffeomorfi ad $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$. Come va modificato l'argomento precedente?

(ii) (Importante) Diciamo che un corpo rigido è vincolato ad un piano π se esiste un piano π_{CR} solidale al corpo che è vincolato a scorrere su π. (Si dice anche che il corpo rigido esegue un moto piano, perchè le velocità di tutti i suoi punti sono parallele a π.) Consideriamo una semiretta r fissa nel piano π ed una semiretta r_{CR} fissa nel piano π_{CR}, e sia θ l'angolo dalla prima alla seconda. Mostrare che la velocità angolare del corpo è

$$\omega \;=\; \dot{\theta} e_n$$



dove e_n è il versore normale a π diretto secondo la regola del cavatappi (θ cresce in senso antiorario).

(iii) Mostrare che la velocità angolare di un corpo rigido è funzione *lineare* delle velocità $v_1, \ldots, v_N$ dei punti del corpo. (Si assuma che il corpo rigido abbia tre punti non allineati). Si confronti la risposta con la formula (2.3.5).

C. Idealità del vincolo di rigidità. Discutiamo adesso la questione dell'idealità del vincolo di rigidità ceh, come vedremo, è una immediata generalizzazione di quella già vista nel caso di un corpo rigido di due punti ("manubrio") nella sezione 3.2.E. In base alla Proposizione 29, un vettore $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N)$ è ortogonale a $T_{(P_1, \ldots, P_N)} Q_{CR}$ se e solo se risulta

$$\sum_{h=1}^{N} \phi_h \cdot \big[u + w \times (P_h - 0)\big] \;=\; 0 \qquad \forall u, w \in \mathbb{R}^3\,.$$

Sfruttando l'arbitrarietà di u e w, e ricordando che O è pure arbitrario, è immediato provare che

Proposizione 30 *$\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N)$ è ortogonale a $T_{(P_1,\ldots,P_N)}Q_{CR}$ se e solo se, qualunque sia il punto O solidale al corpo, si ha*

$$\sum_{h=1}^{N} \phi_h \;=\; 0\,, \qquad\qquad \sum_{h=1}^{N} (P_h - 0) \times \phi_h \;=\; 0\,.$$

Dunque, l'idealità del vincolo di rigidità equivale la fatto che la risultante ed il momento risultante (rispetto ad un qualunque punto 0) delle reazioni vincolari agenti sui punti del corpo siano nulli. Queste condizioni sono piuttosto ragionevoli (in fin dei conti, assicurano che le reazioni vincolari 'interne' al corpo non sono in grado di metterlo in movimento) e sembra piuttosto naturale accettarle.

In realtà, a causa dell'arbitrarietà del punto O, queste condizioni sono molto forti, e implicano che le reazioni vincolari $\phi_1, \ldots, \phi_N$ hanno una ben determinata struttura:

Proposizione 31 *$\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N)$ è ortogonale a $T_{(P_1,\ldots,P_N)}Q_{CR}$ se e solo se per ogni $h = 1, \ldots, N$ si ha*

$$\phi_h \;=\; \textstyle\sum_{k=1}^{N} \phi_{hk} \tag{3.5.5}$$

con

$$\phi_{hk} \;=\; -\,\phi_{kh} \;||\; r_h - r_k \tag{3.5.6}$$

per tutti gli $h, k = 1, \ldots, N$.

Dimostrazione. Questa dimostrazione è una diretta generalizzazione di quanto fatto per il 'manubrio' nella sezione 3.2.E; il lettore dovrebbe assicurarsi di aver capito quel caso. Indichiamo con $r_1, \ldots, r_N$ i vettori posizione dei punti del corpo (in un qualche riferimento) e facciamo riferimento alla descrizione di Q_{CR} come insieme degli zeri delle $N(N-1)/2$ funzioni

$$\Psi_{hk}(r_1, \ldots, r_N) \;=\; |r_h - r_k|^2 - l_{hk}^2$$

($h, k = 1, \ldots, N,\ h \neq k$). Il complemento ortogonale di $T_{(r_1,\ldots,r_N)}Q_{CR}$ è generato dai gradienti (in $\mathbb{R}^{3N}$) delle funzioni Ψ_{hk}. Si osservi che

$$\mathrm{grad}\Psi_{hk}(r_1, \ldots, r_N) \;=\; \Big(\ldots, \frac{r_h - r_k}{l_{hk}}, \ldots, -\frac{r_h - r_k}{l_{hk}}, \ldots\Big)$$

ove tutte le componenti sono nulle eccetto quelle in h–ma ed in k–ma posizione che, come indicato, sono uguali ed opposte e parallele a $r_h - r_k$. La condizione di ortogonalità equivale allora a

$$(\phi_1, \ldots, \phi_N) \;=\; \sum_{hk} c_{hk}\, \mathrm{grad}\Psi_{hk}(r_1, \ldots, r_N)$$

con opportune costanti $c_{hk} \in \mathbb{R}$. Poniamo ora

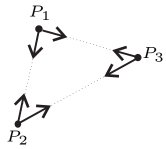
$$\phi_{hk} \;:=\; \frac{c_{hk}}{l_{hk}}\,(r_h - r_k)$$

che soddisfano le (3.5.6) e sono tali che

$$c_{hk}\, \mathrm{grad}\Psi_{hk}(r_1, \ldots, r_N) \;=\; \big(\ldots, \phi_{hk}, \ldots, \phi_{kh}, \ldots\big)$$

È ora immediato riconoscere che le componenti $\phi_1, \ldots, \phi_N$ della somma Φ di tutti questi termini sono dati da $\phi_h = \sum_k \phi_{hk}$. ■

Dunque, la condizione di idealità del vincolo di rigidità equivale al fatto che le reazioni vincolari ϕ_h agenti sui singoli punti possano essere scritte come somme di termini di tipo interazione a coppia, che soddisfano il principio di azione e reazione e sono diretti lungo le congiungenti i punti. Questo è suggestivo perchè fa pensare che il vincolo di rigidità possa essere realizzato da tante sbarrette rigide che uniscono tutte le coppie di punti: questa era infatti esattamente la situazione nel caso di due punti vincolati rigidamente (manubrietto). In realtà questo non è esattamente vero perchè c'è un problema di indeterminazione: mentre le reazioni vincolari ϕ_h sono univocamente determinate dall'atto di moto, si capisce facilmente che la loro decomposizione nelle ϕ_{hk} non lo è: in altre parole, non vi è modo univoco di "distribuire" le reazioni vincolari fra le coppie di punti.



In ogni caso, si riconosce che vi è un 'modello' di vincolo di rigidità che è ideale e che appare soddisfacente (almeno per corpi costituiti da almeno quattro punti non complanari, si vedano le osservazioni).

Osservazioni: (i) Condizioni del tipo (3.5.5), (3.5.6) sono soddisfatte dalle ordinarie forze di interazione (di tipo centrale a simmetria sferica, per esempio) fra punti materiali. Pertanto, se si pensa che le reazioni vincolari sui punti del sistema rigido siano prodotte (fisicamente) da interazioni che producono forze di richiamo molto intense fra i diversi punti del sistema, come accennato nella sezione 3.2.F, si ottiene un forte elemento a supporto dell'accettazione di queste ipotesi. Tuttavia, questa non è una *dimostrazione* del fatto che le reazioni vincolari soddisfino tali condizioni perchè, nel modello matematico fatto qui, le reazioni vincolari *non* sono forze ordinarie. Inoltre, questa analogia non va presa troppo sul serio perchè, come già osservato, le ϕ_{ij} non sono univocamente determinate.

(ii) Il modello di vincolo di rigidità ideale non è soddisfacente se tutti i punti del corpo giacciono su uno stesso piano (in particolare, su una stessa retta). Nel caso di una lamina rigida piana, le reazioni vincolari ϕ_h sono tutte parallele al piano della lamina. Si immagini ora di appoggiare la lamina su un certo numero di appoggi, in modo che una parte di essa sporga. È evidente che le reazioni di rigidità non possono compensare il peso della parte sporgente, e questo fa sospettare che ci sia qualcosa che non va nel modello. Dunque, corpi rigidi perfettamente piani dovrebbero essere probabilmente essere considerati estranei alla meccanica lagrangiana—ma dopo tutto, essi non esistono: basta dargli un minimo di spessore per eliminare il problema.[14]

(iii) Abbiamo già sottolineato più volte che, nel caso un sistema sia soggetto a diversi vincoli, applicati in uno stesso punto, non è in generale possibile stabilire quale parte della reazione vincolare sia attribuibile a ciascun vincolo. Questo vale anche quando uno dei vincoli è il vincolo di rigidità, e questo porta a situazioni a prima vista paradossali. Per esempio, se un corpo rigido è appoggiato su un certo numero di punti distinti, può non essere possibile stabilire come si distribuisce il peso del corpo sui diversi appoggi. Il motivo è proprio che non si riesce a separare la "reazione d'appoggio" da quella di rigidità. In realtà, non vi è nulla di paradossale: solo, si chiede alla teoria qualcosa che essa non include. Se è necessario determinare in maggior dettaglio le reazioni vincolari bisogna ricorrere ad altre modellizzazioni del sistema e dei vincoli; ma questo ha un interesse ingegneristico. Per un'introduzione si può vedere C. Cercignani *Spazio, Tempo, Movimento* (Zanichelli).

D. Le equazioni del moto di un corpo rigido. D'ora in avanti assumeremo che la condizione di idealità delle reazioni vincolari sia soddisfatta, cosicché il corpo rigido è un sistema olonomo ideale e può essere studiato con il formalismo lagrangiano. A prezzo di introdurre delle coordinate sulla varietà delle configurazioni $\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$, le equazioni del moto sono allora le equazioni

[14] Negli esercizi si considerano spesso, per esempio, dischi, che sono piani. Tuttavia, essi sono sempre in moto piano e potrebbero dunque essere sostituiti da cilindri.

di Lagrange. Naturalmente, per scrivere queste equazioni è necessario saper esprimere l'energia cinetica di un corpo rigido in funzione dell'atto di moto, un problema al quale è dedicata la prossima sezione.

Vi è tuttavia un altro, e forse più trasparente, modo di dedurre le equazioni di del moto. Come sappiamo, infatti, le equazioni di Lagrange sono equivalenti al principio di d'Alembert, che viene scritto nello spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^{3N}$ e non necessita l'introduzione di coordinate sulla varietà delle configurazioni. Questo procedimento è molto efficace nel caso del corpo rigido e permette di provare in modo molto semplice che le equazioni del moto sono le ben note "equazioni cardinali".

Cominciamo col ricordare che il centro di massa di un sistema di punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$ è il punto B definito da

$$B - O \;=\; \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - O)$$

ove $m = \sum_{h=1}^{N} m_h$. (Il punto B così definito è indipendente dal punto O—lo si verifichi). Durante il moto del sistema il centro di massa si nuove con velocità ed accelerazione

$$v_B \;=\; \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{N} m_h v_h \,, \qquad a_B \;=\; \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{N} m_h a_h \,.$$

Inoltre, il momento angolare relativo al punto O del sistema è la somma dei momenti angolari delle singole particelle:

$$M_O \;=\; \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - O) \times v_h \,.$$

Sia ora f_h la forza attiva agente sul punto materiale P_h; il *risultante* delle forze attive è allora il vettore

$$R \;=\; \sum_{h=1}^{N} f_h$$

mentre il *momento risultante* relativo al punto O è

$$N_O \;=\; \sum_{h=1}^{N} (P_h - O) \times f_h \,.$$

Possiamo ora scrivere le equazioni del moto di un corpo rigido:

Proposizione 32 *Consideriamo un corpo rigido soggetto a forze attive di risultante F e momento risultante N_0 rispetto ad un punto O. Se il vincolo di rigidità è ideale, allora*

(i) Se il corpo non ha punti fissi, le equazioni del moto sono le due "equazioni cardinali"

$$m\, a_B \;=\; R \tag{3.5.7}$$

$$\frac{d}{dt} M_O \;=\; N_O + m v_B \times v_O \,. \tag{3.5.8}$$

(ii) Se O è un punto del corpo ed è fisso, allora l'equazione del moto è la sola seconda equazione cardinale

$$\frac{d}{dt} M_O \;=\; N_O \,. \tag{3.5.9}$$

Dimostrazione. (i) Usando la rappresentazione (3.5.4) dei vettori tangenti, il principio di d'Alembert $\sum_{h=1}^{N}(m_h a_h - f_h) \cdot v_h = 0$ si scrive

$$\textstyle\sum_{h=1}^{N}(m_h a_h - f_h) \cdot [u + w \times (P_h - O)] \;=\; 0 \qquad \forall u, w \in \mathbb{R}^3\,,$$

cioè, per l'arbitrarietà di u e w,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{h=1}^{N}\big(m_h a_h - f_h\big) \cdot u \;&=\; 0 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^3 \\ \textstyle\sum_{h=1}^{N}(m_h a_h - f_h) \cdot \big[w \times (P_h - O)\big] \;&=\; 0 \qquad \forall w \in \mathbb{R}^3\,. \end{aligned}$$

Permutando ciclicamente i tre termini del prodotto misto nella seconda equazione, così da portare w a fattore, si ottengono le due equazioni

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{h=1}^{N}\big(m_h a_h - f_h\big) \;&=\; 0 \\ \textstyle\sum_{h=1}^{N}(P_h - O) \times (m_h a_h - F_h) \;&=\; 0\,. \end{aligned}$$

È immediato che la prima coincide con la prima equazione cardinale (3.5.7). La seconda si può scrivere

$$\sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - O) \times a_h \;=\; N_O$$

e coincide allora con la seconda equazione cardinale perchè

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_O \;&=\; \frac{d}{dt} \sum_h m_h (P_h - O) \times v_h \\ &=\; \sum_h m_h (v_h - v_O) \times v_h + \sum_h m_h (P_h - O) \times a_h \\ &=\; -m v_O \times v_B + \sum_h m_h (P_h - O) \times a_h\,. \end{aligned}$$

(ii) La dimostrazione è del tutto simile. ■

Esercizi 3.5.3 (i) Si supponga che l'unica forza agente sui punti di un corpo rigido sia il peso. Calcolare risultante R e momento risultante N_O di queste forze in funzione del peso del corpo.

(ii) Nell'esercizio precedente si ha $N_O = (B - O) \times R$, ma in generale questo non avviene: cioè, il momento risultante non è uguale al momento del risultante "applicato" in qualche punto del corpo. Si faccia un esempio.

(iii)* Scrivere le equazioni del moto di un corpo rigido in un sistema di riferimento che ruota con velocità angolare ω rispetto ad un riferimento inerziale.

E. Momento angolare ed energia cinetica dei corpi rigidi. Per scrivere le equazioni del moto del corpo rigido è necessario saperne scrivere il momento angolare in funzione dell'atto di moto $(x_O, \mathcal{R}, v_O, \omega)$. Inoltre, se si vuole trattare il corpo rigido nell'ambito della formulazione Lagrangiana è necessario saperne esprimere l'energia cinetica in funzione dell'atto di moto. In questa sezione ci occupiamo di questi argomenti. (Naturalmente, per utilizzare il formalismo Lagrangiano si dovrebbero introdurre delle coordinate locali sulla varietà delle configurazioni, ma di questo ci occuperemo più avanti.)

Proposizione 33 *Per ogni punto O del corpo rigido esiste un operatore lineare $\mathcal{I}_O : \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$, chiamato* operatore d'inerzia relativo al punto O, *tale che il momento angolare relativo ad O e l'energia cinetica del corpo in funzione dell'atto di moto sono dati da*

$$\begin{aligned} M_O &= \mathcal{I}_O\,\omega + m\,(B-O)\times v_O && (3.5.10)\\ T &= \frac{1}{2}\,m|v_O|^2 + \frac{1}{2}\,\omega\cdot\mathcal{I}_O\omega + m\omega\cdot(B-O)\times v_O && (3.5.11)\end{aligned}$$

Dimostrazione. Inserendo la $v_h = v_O + \omega\times(P_h-O)$ nella $M_O = \sum_h m_h(P_h-O)\times v_h$ si trova

$$\begin{aligned} M_O &= \sum_h m_h(P_h-O)\times\big[v_O + \omega\times(P_h-O)\big]\\ &= \sum_h m_h(P_h-O)\times v_O + \sum_h m_h(P_h-O)\times\big[\omega\times(P_h-O)\big]\\ &= m(B-O)\times v_O + \mathcal{I}_O\omega\end{aligned}$$

con $\mathcal{I}_O$ definito da

$$\mathcal{I}_O u := \sum_h m_h(P_h-O)\times\big[u\times(P_h-O)\big] \qquad \forall u\in\mathbb{V}^3\,. \qquad (3.5.12)$$

Similmente, siccome $T = \frac{1}{2}\sum_h m_h v_h\cdot v_h$ si ha

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_h m_h\big[v_O + \omega\times(P_h-O)\big]\cdot\big[v_O+\omega\times(P_h-O)\big]\\ &= \frac{1}{2}\sum_h m_h v_O\cdot v_O \;+\; \frac{1}{2}\,\omega\times\sum_h m_h(P_h-O)\cdot\big[\omega\times(P_h-O)\big]\\ &\quad + \omega\times\sum_h m_h(P_h-O)\cdot v_O\end{aligned}$$

che dà appunto la (3.5.11) (negli ultimi due termini si possono scambiare prodotto vettore e prodotto scalare). ■

Osservazione. Le espressioni di M_0 e T si semplificano sensibilmente nei casi speciali in cui il punto O è fisso:

$$v_O = 0 \implies M_O = \mathcal{I}_O\omega\,, \qquad T = \frac{1}{2}\,\omega\cdot\mathcal{I}_O\omega$$

oppure coincide con il centro di massa B:

$$M_B = \mathcal{I}_B\omega\,, \qquad T = \frac{1}{2}\,\omega\cdot\mathcal{I}_O\omega + \frac{1}{2}\,mv_B^2\,.$$

Per questo motivo, negli esercizi è sempre conveniente scegliere O coincidente con un punto fisso del corpo, o con un punto che istantaneamente abbia velocità nulla (per esempio il punto di contatto nel rotolamento senza strisciamento), se ve ne è uno, con il baricentro altrimenti.

Esercizi 3.5.4 (i) Si consideri un corpo rigido con un punto fisso O, cosicché $M_O = \mathcal{I}_O\omega$. Come deve essere diretta ω affinchè M_O ed ω siano paralleli fra loro?

(ii) Si consideri un punto che compie un moto circolare uniforme, con velocità angolare ω. Come deve essere scelto il punto O affinchè M_0 sia parallelo ad ω?

Vediamo ora alcune proprietà importanti dell'operatore di inerzia:

Proposizione 34 *L'operatore di inerzia $\mathcal{I}_O$ è simmetrico e, se il corpo ha tre punti non allineati, è definito positivo.*

Dimostrazione. Dire che $\mathcal{I}_O$ è simmetrico significa che $u \cdot \mathcal{I}_O v = v \cdot \mathcal{I}_O u$ per ogni coppia di vettori u, v. Che questo sia vero segue dal fatto che l'espressione

$$\begin{aligned} u \cdot \mathcal{I}_O v \;&=\; u \cdot \sum_h m_h (P_h - O) \times \big[v \times (P_h - O)\big] \\ &=\; \sum_h m_h \big[u \times (P_h - O)\big] \cdot \big[v \times (P_h - O)\big] \end{aligned}$$

è simmetrica in u e v. (L'espressione della seconda riga si ottiene portando u dentro alla somma e poi scambiando prodotto vettore e prodotto scalare.) La positiva definitezza significa che si ha $u \cdot \mathcal{I}_O u > 0$ per ogni vettore $u \neq 0$. La formula precedente dà

$$u \cdot \mathcal{I}_O u \;=\; \sum_h m_h \big|u \times (P_h - O)\big|^2 .$$

Questa è una somma a termini non–negativi; essi possono essere tutti nulli solo se tutti i punti del corpo sono allineati (perchè solo allora tutti i vettori $P_h - O$ potrebbero essere paralleli ad u). ■

Introduciamo ora la nozione di momento di inerzia. Denotiamo con Oe la retta parallela al versore e e passante per il punto O. Si chiama *momento d'inerzia relativo all'asse Oe* la quantità

$$I_{Oe} \;=\; e \cdot \mathcal{I}_O e .$$

Se d_h denota la distanza del punto P_h dall'asse Oe allora $d_h = |e \times (P_h - O)|$ e così

$$I_{Oe} \;=\; \sum_h m_h |e \times (P_h - O)|^2 \;=\; \sum_h m_h d_h^2 ,$$

(che restituisce la definizione elementare di momento di inerzia).

Esercizi 3.5.5 (i) Mostrare che nel moto piano di un corpo rigido si ha $T = \frac{1}{2}\, m v_B^2 + \frac{1}{2}\, I_{Be} |\omega|^2$, e essendo la normale al piano.

(ii) Mostrare che, se O' è un punto sull'asse Oe, allora $I_{Oe} = I_{O'e}$ (il momento d'inerzia rispetto ad un asse dipende solo dall'asse).

F. Assi e momenti principali di inerzia. Se si introduce un sistema di riferimento $\{O; e_x, e_y, e_z\}$ allora all'operatore di inerzia si può associare una matrice, chiamata matrice d'inerzia. Tale matrice è simmetrica ed ha la forma

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{zz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

con $I_{xx} = e_x \cdot \mathcal{I}_O e_x$, $I_{xy} = e_y \cdot \mathcal{I}_O e_x$, etc. Allora, le componenti diagonali I_{xx}, I_{yy} ed I_{zz} non sono altro che i momenti di inerzia realtivi ai tre assi e_x, e_y ed e_z. Pertanto, denotando (x_h, y_h, z_h) le coordinate del punto P_h del corpo in questo riferimento, si trova

$$I_{xx} \;=\; \sum_h m_h (y_h^2 + z_h^2) , \quad I_{yy} \;=\; \sum_h m_h (x_h^2 + z_h^2) , \quad I_{zz} \;=\; \sum_h m_h (x_h^2 + y_h^2) .$$

Le componenenti non diagonali hanno invece le espressioni

$$I_{xy} \;=\; -\sum_h m_h x_h y_h\,, \quad I_{xz} \;=\; -\sum_h m_h x_h z_h\,, \quad I_{yz} \;=\; -\sum_h m_h y_h z_h\,,$$

perchè $I_{xy} = e_y \cdot \mathcal{I}_O e_x = \sum_h m_h [e_y \times (P_h - O)] \cdot [e_x \times (P_h - O)]$ con $[e_y \times (P_h - O)] \cdot [e_x \times (P_h - O)] = (z_h, 0, -x_h) \cdot (0, x_h, z_h)$, etc.

Nelle applicazioni è spesso conveniente lavorare in un sistema di riferimento solidale al corpo rigido perchè allora le componenti della matrice di inerzia restano costanti durante il moto. Naturalmente, è particolarmente conveniente scegliere un sistema di riferimento nel quale la matrice di inerzia sia diagonale. L'esistenza di un tale riferimento è assicurata dalla simmetria dell'operatore di inerzia, che implica che esso ha tre autovettori ortonormali, che nel seguito denoteremo sempre e_1, e_2, e_3. I tre assi Oe_1, Oe_2, Oe_3 si chiamano *assi principali di inerzia* relativi al punto O. Nella "base principale di inerzia" $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ la matrice d'inerzia è allora

$$\mathrm{diag}\,\big(I_1, I_2, I_3\big)$$

ove I_1, I_2, I_3 sono gli autovalori di $\mathcal{I}_O$ e si chiamano *momenti principali di inerzia* relativi al punto O. In virtù della positiva definitezza di $\mathcal{I}_O$, se il corpo ha tre punti non allineati allora I_1, I_2, I_3 sono tutti positivi .

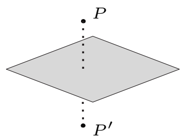
Nella base principale di inerzia le espressioni di momento angolare ed energia cinetica sono particolarmente semplici. Per esempio, se il punto O è fisso si ha

$$M_O \;=\; I_1\,\omega_1\,e_1 + I_2\,\omega_2\,e_2 + I_3\,\omega_3\,e_3\,, \qquad T \;=\; \frac{1}{2}\left[I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right],$$

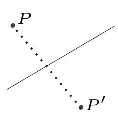
ove ω_1, ω_2 ed ω_3 sono le componenti della velocità angolare in questa base.

Si noti che la base principale di inerzia è unica se e solo se i tre momenti principali di inerzia sono distinti: $I_1 < I_2 < I_3$. Se due di essi sono uguali, diciamo $I_1 = I_2 \neq I_3$ allora l'asse e_3 è univocamente determinato ma ogni vettore nel piano ad esso ortogonale è asse principale di inerzia. In tal caso, si dice che il corpo è *simmetrico* e che e_3 ne è asse di simmetria.

La determinazione della base principale di inerzia di un corpo si semplifica con considerazioni di simmetria, come è illustrato negli esercizi seguenti.



Esercizi 3.5.6 (i) Diciamo che un piano π è "piano di simmetria" di un corpo rigido se per ogni punto P del corpo esiste un altro punto P' del corpo che ha massa uguale a quella di P ed è disposto simmetricamente ad esso rispetto a π. Mostrare che se il corpo ha un piano di simmetria π passante per O, allora la normale a tale piano è asse principale di inerzia relativo ad O.



(ii) Diciamo che una retta è "asse di simmetria" di un corpo rigido se per ogni punto P del corpo esiste un altro punto P' del corpo che ha massa uguale a quella di P ed è disposto simmetricamente ad esso rispetto a tale retta. Mostrare che un asse di simmetria materiale Oe di un corpo rigido è asse principale di inerzia relativo ad O.

(iii) Mostrare che i tre momenti principali di inerzia relativi ad un punto O soddisfano

$$I_3 \;\leq\; I_1 + I_2$$

e l'uguale vale se e solo se il corpo coincide con il piano contente O e parallelo a $e_1 \oplus e_2$.

(iv) Provare il *Teorema di Huyghens–Steiner:* I momenti di inerzia relativi a due assi paralleli distanti d l'un dall'altro e passanti l'uno per un punto O del corpo e l'altro per il baricentro B soddisfano

$$I_{Oe} \;=\; I_{Be} + md^2$$

ove m è la massa del corpo.

G. Corpi rigidi continui. Nelle applicazioni, e negli esercizi, si considerano spesso corpi rigidi costituiti non da un numero finito di punti, ma continui. Siccome avremo a fare con corpi continui solo negli esercizi, non tentiamo neppure di sviluppare qui una teoria dei sistemi meccanici continui. Invece, prendendo un atteggiamento pragmatico, ci limitiamo ad assumere che tutto ciò che abbiamo visto finora continui a valere e che l'operatore di inerzia si possa calcolare sostituendo la somma sui punti con un integrale sulla distribuzione di massa — nel solito, ovvio modo. Il procedimento viene illustrato negli esercizi fatti a lezione.

3.6 Cenno sui vincoli anolonomi

Questa sezione (che comunque non è in programma) non è stata completata. Gli studenti eventualmente interessati possono contattarmi per averla.

3.7 Complementi

A. Il principio dei lavori virtuali ed il principio di d'Alembert.

Esercizi 3.7.1 Mostrare che, per un sistema soggetto a vincoli olonomi, fissi ed ideali e soggetto alle forze attive $F = (f_1, \ldots, f_N)$, una configurazione X è di equilibrio se e solo se

$$F(X,0,t) \cdot V \;=\; 0 \qquad \text{per tutti i } V \in T_X Q \quad \text{e } t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.7.1}$$

[Si usi il principio di d'Alembert(3.3.5).]

L'equazione (3.7.1) è nota come *principio dei lavori virtuali.* Storicamente, essa è stata scoperta ben prima del principio di d'Alembert e ha costuitito il fondamento della statica: essa mostra che, se il vincolo ìdeale, allora le configurazioni di equilibrio sono quelle che annullano le componenti delle forze attive (valutate per velocità nulle) tangenti alla varietà vincolare.

D'Alembert è arrivato al suo principio proprio generalizzando il principio dei lavori virtuali. Il ragionamento di d'Alembert è stato il seguente: Supponiamo che, ad un certo istante, i punti del sistema abbiano le accelerazioni $\ddot{x}_1, \ldots, \ddot{x}_N$. Allora, se alla risultante di forze attive e reazioni vincolari agenti su ciascun punto si aggiungesse la forza $-m_h\ddot{x}_h$ ("forza peduta"), il sistema potrebbe trovarsi in equilibrio. Pertanto, per il principio dei lavori virtuali (3.7.1) si avrebbe

$$\sum_{h=1}^{N} \Big(f_h - m\ddot{x}_h \Big) \cdot v_h \;=\; 0 \qquad \text{per ogni } (v_1, \ldots, v_N) \in T_X Q\,,$$

che è proprio il principio di d'Alembert.

Per capire l'importanza storica del principio di d'Alembert bisogna pensare che prima di d'Alembert si sapevano trattare i problemi statici, di equilibrio, appunto per mezzo del principio dei lavori virtuali, ma non vi era un metodo generale per scrivere le equazioni del moto di questi sistemi. La cosa era terribilmente complicata dalla presenza delle reazioni vincolari. Si sapeva che le forze interne ai corpi rigidi non contribuiscono ai moti, grazie al pricipio di azione e reazione, ma non vi era un modo generale per trattare casi più complessi. Ogni sistema era trattato con procedimenti ad hoc, spesso estremamente ingegnosi. La scoperta di d'Alembert, che ha eliminato la necessità di tenere conto delle reazioni vincolari, ha aperto la strada allo sviluppo di una teoria generale della dinamica dei sistemi meccanici olonomi, che sarebbe poi stata formalizzata da Lagrange.

A volte, nei testi di Meccanica, il principio di d'Alembert viene presentato con l'affermazione "riduce ogni problema di dinamica ad un problema di statica', un fatto il cui significato e la cui importanza possono sembrare un po' misteriosi. Il significato di questa affermazione è storico, come appena discusso: la scoperta del principio di d'Alembert ha ridotto il problema di scrivere le equazioni del moto a quello di scrivere le equazioni di equilibrio, che si sapeva risolvere.

B. Le equazioni di Lagrange con i moltiplicatori. Vi è un procedimento alternativo alle equazioni di Lagrange, e ad esso equivalente, nel quale non si proiettano le equazioni di Newton sugli spazi tangenti alla varietà delle configurazioni, ma si lavora invece in $\mathbb{R}^{3N}$. A differenza dalle equazioni di Lagrange, non si eliminano le reazioni vincolari dalle equazioni di Newton e non si introducono delle coordinate sulla varietà delle configurazioni. L'idea centrale è quella di rappresentare le reazioni vincolari per mezzo di moltiplicatori di Lagrange. Corrispondentemente, questo metodo si chiama, appunto, "dei moltiplicatori di Lagrange" o anche delle "equazioni di Lagrange di prima specie.

Consideriamo un sistema soggetto a vincoli olonomi, ideali e fissi. L'idealità del vincolo significa che le reazioni vincolari ϕ_i sono tali che il vettore $\Phi \in \mathbb{R}^{3N}$ è ortogonale alla varietà delle configurazioni Q. Se essa è descritta dalle equazioni $\Psi_1(X) = 0, \ldots, \Psi_r(X) = 0$, ove $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_r)$ è una sommersione, allora, in ogni punto $X \in Q$, i gradienti delle funzioni $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ formano una base per il complemento ortogonale allo spazio tangente $T_X Q$. (L'indipendenza lineare segue dal fatto che la matrice Jacobiana $r \times 3N$

$$G(X) \;=\; \frac{\partial \Psi}{\partial X}(X)$$

ha rango r). Dunque, il vettore Φ si può scrivere come combinazione lineare di questi gradienti: $\Phi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial X} \lambda_i$ con certi numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Utilizzando la matrice G il vettore Φ si scrive

$$\Phi \;=\; G^T \lambda \tag{3.7.2}$$

ove λ è il vettore (colonna) di componenti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$: $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)^T$. Allora, il problema del moto vincolato diventa il seguente: si possono determinare i "moltiplicatori" $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ in modo che i moti del sistema soddisfino le equazioni

$$\boxed{M\,\ddot{X} \;=\; F(X, \dot{X}) + G^T(X)\,\lambda\,, \qquad \Psi(X) \;=\; 0} \tag{3.7.3}$$

che si chiamano *equazioni di Lagrange di prima specie*? L'idea è che si devono determinare i moltiplicatori λ in modo che moto $X(t)$ appartenga a Q, soddisfi cioè la seconda equazione (3.7.3). Tuttavia, bisogna dimostrare che questo è davvero possibile. Infatti, a causa della presenza dei moltiplicatori λ, le (3.7.3) non sono propriamente equazioni differenziali ordinarie: una loro soluzione è costituita da curve $t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^{3N}$ e $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}^r$ che soddisfano entrambe le equazioni. (Equazioni di questo tipo oggi sono chiamate, soprattutto in analisi numerica, "Equazioni Algebrico–Differenziali). Ci proponiamo pertanto di mostrare che, tuttavia, il problema di Cauchy (in piccolo) con dati iniziali compatibili con i vincoli ha sempre una ed una sola soluzione — ciò che siginifica che le (3.7.3) sono (equivalenti a) equazioni sulla varietà delle configurazioni $\mathcal{Q}$.

Proposizione 35

(i) Per ogni dato iniziale $X_0 \in Q$, $\dot{X}_0 \in T_{X_0}Q$, le equazioni (3.7.3) hanno una ed un'unica soluzione differenziabile $t \mapsto (X_t, \lambda_t)$ (definita per t in qualche intervallo).

(ii) Le reazioni vincolari sono funzioni solo dell'atto di moto: esiste cioè una mappa $\tilde{\lambda}(X, \dot{X}) \in \mathbb{R}^r$ tale che, qualunque sia la soluzione $t \mapsto (X_t, \lambda_t)$, si ha $\lambda_t = \tilde{\lambda}(X_t, \tilde{X}_t)$.

Dimostrazione. La dimostrazione è interessante di per sè, perchè è la base del procedimento utilizzato in pratica per risolvere equazioni di questo tipo (chiamate a volte "algebrico–differenziali"). Supponiamo dapprima che $t \mapsto (X_t, \lambda_t)$ sia una soluzione. Siccome la curva $t \mapsto X_t$ appartiene a Q il suo vettore velocità è tangente a Q e dunque

$$G(X_t)\dot{X}_t \;=\; 0\,.$$

Derivando ancora rispetto al tempo otteniamo

$$G\ddot{X}_t \;+\; K(X_t, \dot{X}_t) \;=\; 0 \tag{3.7.4}$$

ove $K(X, \dot{X})$ è un certo vettore, del quale l'unica cosa importante è che è funzione nota di X ed $\dot{X}$. (Infatti, ha componenti $K_i = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial G_{i\alpha}}{\partial X_\beta} \dot{X}_\alpha X_\beta$). Naturalmente non si può usare quest'equazione per determinare il moto X_t perchè la matrice G non è invertibile. L'idea è invece quella di usare questa equazione, al posto della seconda equazione (3.7.3), per determinare i moltiplicatori λ_t. Infatti, se introduciamo nella (3.7.4) l'espressione di $\ddot{X}_t$ che si ricava dalla prima (3.7.3), e omettiamo per semplicità di indicare gli argomenti delle varie funzioni, otteniamo

$$GM^{-1}G^T\lambda_t \;=\; -\,GM^{-1}F - K$$

e qui $GM^{-1}G^T$ è una matrice $r \times r$ invertibile perchè G ha rango massimo ed M è invertibile. Si trova così che λ_t è una ben determinata funzione dell'atto di moto, $\lambda_t = \tilde{\lambda}(X_t, \dot{X}_t)$, con

$$\tilde{\lambda} \;=\; -\Big[GM^{-1}G^T\Big]^{-1}\Big[GM^{-1}F - K\Big]\,,$$

e questo prova il punto (ii). Inoltre, inserendo questa espressione di λ_t nella prima equazione (3.7.3) essa si riduce all'equazione differenziale ordinaria

$$M\,\ddot{X} \;=\; F(X, \dot{X}) + G^T(X)\,\tilde{\lambda}(X, \dot{X})\,. \tag{3.7.5}$$

In questo modo abbiamo dimostrato che, se $t \mapsto (X_t, \lambda_t)$ è una qualunque soluzione delle (3.7.3), allora necessariamente $\lambda_t = \tilde{\lambda}(X_t, \dot{X}_t)$ ed X_t risolve la (3.7.5). Questo dimostra, in particolare, l'unicità della soluzione.

Ci resta solo da dimostrare l'esistenza di una soluzione per arbitrari dati iniziali $(X_0, \dot{X}_0)$ compatibili con i vincoli, tali cioè che $\Psi(X_0) = 0$ e $G(X_0)\dot{X}_0 = 0$. Sia $t \mapsto X_t$ la soluzione della (3.7.5) con dati iniziali $(X_0, \dot{X}_0)$. Se prendiamo $\lambda_t = \tilde{\lambda}(X_t, \dot{X}_t)$, allora la coppia (X_t, λ_t) soddisfa per costruzione la prima equazione (3.7.3) e così ci resta da provare solo che $\Psi(X_t) = 0$ per tutti i t. Questo segue dal fatto che, con questa scelta di λ_t, si ha $\frac{d^2}{dt^2}\Psi(X_t) = 0$ per tutti i t. Pertanto, $\Psi(X_t) = a + bt$ con $a = \Psi(X_0) = 0$ e $b = \frac{d}{dt}\Psi(X_t)|_{t=0} = G(X_0)\dot{X}_0 = 0$. ■

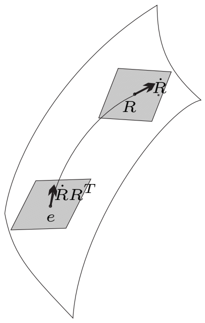
Le equazioni di Lagrange con i moltiplicatori non sono molto usate in Meccanica ed in Fisica. Tuttavia, esse sono molto usate, sia in Ingegneria che in analisi numerica, per la descrizione di sistemi complessi. Il motivo è che esse possono essere scritte in coordinate cartesiane, anche se in uno spazio di dimensione maggiore, e questo può renderle molto più semplici che utilizare coordinate lagrangiane sulla varietà vincolare. Per esempio, la modellizzazione numerica del motore di un automobile richiede un enorme lavoro di scrittura delle equazioni del moto di tutti i componenti e dei vincoli su di essi; il fatto di poter scrivere tutte queste condizioni ed equazioni in coordinate cartesiane semplifica di molto il lavoro, riduce la possibiltà di errori, semplifica lo sviluppo di metodi automatici di generazione del codice numerico, etc.

C. Vettori tangenti ad SO(3) **e velocità angolare.** Ci proponiamo qui di spiegare il significato dell'identificazione degli spazi tangenti a $Q_{\rm CR} \approx \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$ con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ data dalla (3.5.4):

$$v_h \;=\; u + w \times (P_h - O)\,, \qquad u, w \in \mathbb{R}^3\,.$$

Il vettore u è chiaramente tangente al fattore $\mathbb{R}^3$ di $Q_{\rm CR}$ (in effetti, u è la velocità del punto O, il cui vettore posizione appartiene al fattore $\mathbb{R}^3$). Per capire la relazione fra il vettore velocità angolare w e i vettori tangenti ad SO(3) limitiamoci allora a considerare il caso di un corpo rigido con un punto fisso O.

Si tratta di capire cosa sia, geometricamente, l'operazione che produce la matrice antisimmetrica $W = w\times$ a partire dal vettore tangente $\dot{R} \in T_R\mathrm{SO}(3)$; si ricordi infatti che $W = \dot{R}R^T$. Questa operazione è legata alla struttura di gruppo di SO(3), cioè al fatto che, se R ed $S \in \mathrm{SO}(3)$, allora anche $RS \in \mathrm{SO}(3)$ e, inoltre, $R^{-1} \in \mathrm{SO}(3)$.



Consideriamo la "rotazione a destra" per un'assegnata matrice S, cioè la mappa di SO(3) in sè stesso definita da
$$R \mapsto RS\,.$$
Questa mappa determina la mappa tangente
$$T_R\mathrm{SO}(3) \to T_{RS}\mathrm{SO}(3)\,, \qquad \dot{R} \mapsto \dot{R}S$$
che mappa un vettore $\dot{R}$ tangente in R nel vettore $\dot{R}S$ tangente in RS. Siccome $S \in \mathrm{SO}(3)$ è invertibile, questa mappa è un isomorfismo dei due spazi tangenti.

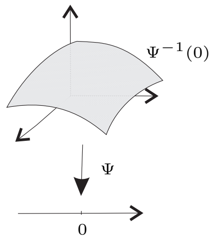
Prendendo $S = R^{-1}$, cosicchè $RS = \mathbf{1}$, si ottiene allora un isomorfismo di $T_R\mathrm{SO}(3)$ con $T_{\mathbf{1}}\mathrm{SO}(3)$, che è dato da
$$T_R\mathrm{SO}(3) \to T_{\mathbf{1}}\mathrm{SO}(3)\,, \qquad \dot{R} \mapsto \dot{R}R^{-1}\,. \tag{3.7.6}$$
Siccome $R^{-1} = R^T$, questo isomorfismo trasforma $\dot{R}$ nella matrice antisimmetrica $W = \dot{R}R^T$.

In conclusione, il vettore velocità angolare è costruito nel modo seguente:
– Si identifica ciascun spazio tangente $T_R\mathrm{SO}(3)$ con $T_{\mathbf{1}}\mathrm{SO}(3)$ per mezzo dell'isomorfismo (3.7.6), che (con pessimo inglesismo) è chiamato *trivializzazione (a destra)*.
– Siccome $T_{\mathbf{1}}\mathrm{SO}(3)$ coincide con lo spazio delle matrici antisimmetriche, in questo modo si ottiene una matrice antisimmetrica W.
– Si usa l'isomorfismo (2.3.3) fra lo spazio delle matrici antisimmetriche ed $\mathbb{R}^3$ per ottenere infine un vettore "velocità angolare" w.

Esercizi 3.7.2 Un esempio tipico di *gruppo di Lie* G è un sottogruppo (chiuso) di $L(n)$. Sia e l'identità del gruppo, cosicché $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ per ogni g. Lo spazio tangente a G nell'identità si chiama *algebra di Lie* del gruppo, e si denota $\mathcal{G}$. Per esempio, come abbiamo appena visto, l'algebra di Lie di SO(3), che si denota so(3), è lo spazio delle matrici antisimmetriche. Costruire le "trivializzazioni" a destra e a sinistra per un generico gruppo di Lie G.

3.8 Richiami di Matematica: Varietà

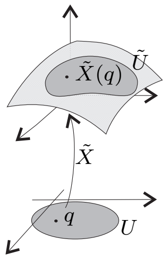
A. Varietà. Per varietà, intendiamo una sottovarietà di uno spazio $\mathbb{R}^m$. Raccogliamo qui alcuni fatti basilari sulle sottovarietà, note dai corsi di Analisi. Una possibile definizione caratterizza le sottovarietà come insiemi di livello di un numero opportuno di funzioni "indipendenti":



Definizione: *Si dice che un sottoinsieme Q di $\mathbb{R}^m$ è una sottovarietà di dimensione n, $1 \le n \le m$, se esiste una sommersione*
$$\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r\,, \qquad r = m - n\,,$$
tale che $Q = \{X \in \mathbb{R}^m, \Psi(X) = 0\}$.

Dire che una mappa $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_r)$ è una sommersione significa che la matrice Jacobiana $\frac{\partial \Psi}{\partial X}(X)$ ha rango r in ogni punto $X \in Q$. La matrice Jacobiana è una matrice $r \times m$, e la condizione sul rango significa che le sue r righe sono linearmente indipendenti in tutto l'insieme Q. Equivalentemente: i differenziali $d\Psi_1, \ldots, d\Psi_r$ sono linearmente indipendenti in ogni punto $X \in Q$.

Coordinate. La descrizione di una varietà come superficie di livello di una sommersione ha il vantaggio di essere globale. Però, per fare i conti, spesso è più utile adottare una descrizione locale, basata sull'introduzione di coordinate.



Un *sistema di coordinate locali* su una varietà n–dimensionale $Q \subset \mathbb{R}^m$ è una mappa differenziabile e biunivoca

$$\tilde{X} : U \to \tilde{U} \subset Q\,, \qquad q \mapsto \tilde{X}(q)\,,$$

da un aperto U di $\mathbb{R}^n$ ad un aperto $\tilde{U}$ di Q, la cui matrice Jacobiana $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q)$ ha rango uguale ad n in ogni punto q. (Un aperto in Q è l'intersezione di un aperto di $\mathbb{R}^m$ con Q).

L'esistenza di coordinate su una sottovarietà è assicurata dal teorema della funzione implicita: la condizione sul rango della matrice Jacobiana $\frac{\partial \Psi}{\partial X}$ assicura che l'equazione $\Psi(X) = 0$ si può risolvere, localmente, in un intorno di ogni punto della varietà, rispetto ad $n = m - r$ delle m variabili $X_1, \ldots, X_m$. Queste variabili, o delle loro funzioni, si possono quindi usare come coordinate.

In generale, una sottovarietà Q non possiede coordinate globali – si pensi ad una sfera. È però possibile "tappezzare" tutta la varietà con diversi sistemi locali di coordinate. Ciascun sistema di coordinate si chiama allora una *carta* e il loro insieme un *atlante*.

Esempio: Il cerchio di raggio r è il sottoinsieme C_r di $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ definito da

$$x^2 + y^2 \;=\; r^2\,.$$

Siccome il differenziale della funzione $\Psi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$ è non nullo per $(x, y) \neq 0$, il cerchio è una sottovarietà unidimensionale di $\mathbb{R}^2$. Come coordinata sul cerchio si può usare l'angolo θ, misurato a partire da un qualche punto, per esempio $(1, 0)$: questo si fa con la mappa

$$\Theta : \theta \mapsto (r\cos\theta\,,\; r\sin\theta)\,.$$

Si ha qui una situazione spiacevole, ma inevitabile: l'angolo *non* è una coordinata globale: se si richiede che θ vari in un aperto di $\mathbb{R}$ e che la mappa Θ sia biunivoca, bisogna restringerla ad un intervallo più corto di 2π. Per esempio, Θ è biunivoca dall'intervallo $(-\pi/2, 3\pi/2)$) a $C_r \setminus \{(0, -r)\}$.

Coordinate angolari. Naturalmente, è un fastidio non avere una coordinata globale sul cerchio. Questa situazione si può risolvere considerando l'insieme

$$S^1 \;=\; \mathbb{R}/2\pi$$

ottenuto identificando tutte le coppie di punti di $\mathbb{R}$ che differiscono di 2π e pensando $\Theta : S^1 \to C_r$. (L'insieme S^1 è definito in modo astratto: può aiutare immaginare di costruirlo arrotolando la retta reale su un cerchio di raggio unitario.) Il vantaggio è che la mappa Θ da S^1 a C_r è biunivoca e dunque fornisce una parametrizzazione globale di C_r. Allora, si può allargare la definizione di "coordinate" includendo le coordinate "angolari" o "coordinate modulo 2π, definite come una mappa differenziabile e biunivoca da S^1 alla sottovarietà in questione.

Osservazioni: (i) L'unico problema è che, a questo livello di esposizione, non è stato definito cosa voglia dire che una funzione dall'insieme S^1 a $\mathbb{R}^m$ sia differenziabile. È però evidente che, in pratica, questa ed analoghe questioni non danno luogo ad alcuna difficoltà: una funzione $f : S^1 \to \mathbb{R}^m$ è semplicemente una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^m$ che è periodica di periodo 2π, e si sa come differenziarla etc.

(ii) In alternativa, si può pensare che θ sia una coordinata "multivoca: si considera cioè la mappa $\Theta : \mathbb{R} \to C_r$ e si osserva che essa mappa tutti i punti $\theta + 2k\pi$, $k \in \zeta$, nello stesso punto di C_r. (Matematicamente, questo significa che θ è una coordinata sul "rivestimento" $\mathbb{R}$ di S^1). Però è più chiaro pensare Θ come una mappa $S^1 \to C_r$ perchè S^1 è compatto, come lo è il cerchio.

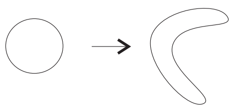
Esempio: La sfera S^2 di raggio unitario è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$ definito da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 .$$

Il differenziale della funzione $\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ è non nullo per $(x, y, z) \neq 0$ e così S^2 è una sottovarietà bidimensionale di $\mathbb{R}^3$. Come coordinate (locali) si possono usare le coordinate polari sferiche

$$\mathcal{P} \, : \, (\theta, \varphi) \mapsto (\sin\theta \, \cos\varphi \, , \, \sin\theta \, \sin\varphi \, , \, \cos\theta)$$

che mappano biunivocamente $(0, \pi) \times S^1$ nella sfera senza i due poli $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$. Qui θ è una coordinata normale, ma φ è una coordinata angolare.



Diffeomorfismi. Concludiamo con un'ultima nozione: diciamo che due sottovarietà Q_1 e Q_2 di $\mathbb{R}^m$ di ugual dimensione n sono *diffeomorfe* se esiste una bijezione da un aperto contente Q_1 ad un aperto contentente Q_2 che
- mappa Q_1 su Q_2;
- è differenziabile;
- ha inversa differenziabile.

Una tale mappa si chiama un diffeomorfismo di Q_1 su Q_2.

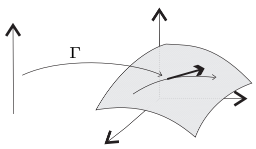
Osservazione: Richiediamo che la mappa sia definita fra due aperti di $\mathbb{R}^m$, non solo da Q_1 a Q_2, perchè se no non sapremmo come fare le derivate. Questa limitazione non è necessaria e si può rimuovere senza troppe difficoltà—cosa che è del resto necessaria per fare il calcolo differenziale su varietà non immerse in uno spazio euclideo. In sostanza, le cose stanno così. Innanzittutto, si sa cosa significhi che una mappa da Q_1 a Q_2 è un omemorfismo, perchè la continuità richiede solo la topologia e ogni varietà ha una topologia (se è immersa in $\mathbb{R}^m$, si prende la restrizione della topologia di $\mathbb{R}^m$). Si dice poi che una mappa $f : Q_1 \to Q_2$ è differenziabile se la sua "rappresentativa" in una (e quindi in ogni) sistema di coordinate è differenziabile (si veda più avanti per la nozione di rappresentativa di una mappa); questo riduce la definizione di differenziabilità al caso di mappe fra spazi euclidei. Per maggiori dettagli si veda qualunque testo di geometria differenziale.

Esercizi 3.8.1 (i) Mostrare che il cerchio è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione uno.

(ii) Mostrare che il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ è una sottovarietà bidimensionale di $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$. Trovare un sistema (globale) di coordinate (angolari).

(iii) Mostrare che (x, y) si possono usare come coordinate su ciascuna semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$ o $z < 0$.

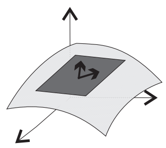
(iv) Mostrare che l'ellisse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$ è diffeomorfa al cerchio unitario.



B. Spazi tangenti e fibrato tangente. Si definisce *vettore tangente* ad una sottovarietà Q di $\mathbb{R}^m$ in un suo punto X la derivata di una curva che appartiene a Q e passa per X: se $\Gamma : \mathbb{R} \to Q$ è una mappa tale che $\Gamma(0) = X$, allora

$$\frac{d\Gamma}{dt}(0) \in \mathbb{R}^m$$

è un vettore tangente a Q in X. Lo *spazio tangente a Q nel punto X* è l'insieme di tutti i vettori tangenti a Q in X, cioè l'insieme delle derivate di tutte le curve passanti per X. (Figurativamente, questi vettori si possono pensare applicati nel punto X). Come è noto dai corsi di Analisi (e mostriamo più sotto per completezza):



(i) lo spazio tangente $T_X Q$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ (cioè tutte le combinazioni lineari di vettori tangenti sono vettori tangenti) ed ha dimensione n.

(ii) Se $q \mapsto \tilde{X}(q)$ è un sistema di coordinate locali, allora una base per $T_{X(q)}Q$ è costituita dagli n vettori tangenti alle curve coordinate, cioè

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}(q), \ldots, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}(q) .$$

Ricordiamo che la "curva coordinata" j–ma si ottiene tenendo ferme tutte le coordinate eccetto q_j:

$$\Gamma_j(s) \;=\; \tilde{X}(q_1, \ldots, q_j + s, \ldots, q_n)\,;$$

Il vettore tangente a questa curva nel punto $X = \tilde{X}(q)$ è proprio $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}(q)$:

$$\frac{d}{ds}\Gamma_j(s)\Big|_{s=0} \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}(q)\,.$$

Il punto (ii) significa che ogni sistema di coordinate locali su Q determina delle coordinate sugli spazi tangenti. il vettore tangente di coordinate $(u_1, \ldots, u_n)$ è il vettore

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q)\,.$$

Dimostrazione: (i) Per dotare gli spazi tangenti di una struttura di spazio vettoriale dobbiamo definire la moltiplicazione di un vettore tangente per un numero reale e la somma di vettori tangenti. Se $U \in T_X Q$ allora (per definizione) esiste una curva $\Gamma : \mathbb{R} \to Q$ tale che $\Gamma(0) = X$ e $\Gamma'(0) = U$. Si osservi ora che se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$\frac{d}{ds}\Gamma(\lambda s)\Big|_{s=0} \;=\; \lambda U\,.$$

Dunque, possiamo definire λU come il vettore velocità della curva riparametrizzata $s \mapsto \Gamma(\lambda s)$.

Siano ora Γ_1 e Γ_2 due curve su Q che passano per X: $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = X$. Consideriamo un sistema di coordinate $q \mapsto \tilde{X}(q)$ in un intorno di X.[15] Siano γ_1 e γ_2 le rappresentative locali di Γ_1 e Γ_2, cioè

$$\Gamma_1(s) = \tilde{X}(\gamma_1(s))\,, \qquad \Gamma_2(s) = \tilde{X}(\gamma_2(s))\,.$$

Allora, chiamando per esempio $\overline{q}$ le coordinate di X, cosicché $\gamma_i(0) = \overline{q}$, si ha

$$\Gamma_1'(0) \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(\overline{q})\gamma_1'(0)\,, \qquad \Gamma_2'(0) \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(\overline{q})\gamma_2'(0)\,.$$

L'idea è ora di definire la somma dei vettori tangenti $\Gamma_1'(0)$ e $\Gamma_2'(0)$ 'sollevando' a Q il vettore $\gamma_1'(0) + \gamma_2'(0)$. Per questo consideriamo la curva

$$s \mapsto \gamma(s) \;:=\; \gamma_1(s) + \gamma_2(s) - \overline{q}$$

che è tale che

$$\gamma(0) = \overline{q}\,, \qquad \gamma'(0) = \gamma_1'(0) + \gamma_2'(0)\,.$$

Allora $s \mapsto \Gamma(s) := \tilde{X}(\gamma(s))$ è una curva su Q che ha le proprietà che

$$\Gamma(0) \;=\; X\,, \qquad \Gamma'(0) \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(\overline{q})\Big(\gamma_1'(0) + \gamma_2'(0)\Big) \;=\; \Gamma_1'(0) + \Gamma_2'(0)\,.$$

In questo modo, si definisce la somma di vettori tangenti.

Dunque, $T_X Q$ è uno spazio vettoriale. Che esso abbia dimensione almeno n segue dal fatto che gli n vettori $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}(q), \ldots, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}(q)$ sono linearmente indipendenti. Che la dimensione sia esattamente n segue dal fatto che ogni vettore tangente è una combinazione lineare di questi n vettori, come si vede osservando ancora che una curva $\Gamma(t)$ in Q è l'immagine sotto $\tilde{X}$ di una curva $(q_1(t), \ldots, q_n(t))$ in $\mathbb{R}^n$: $\Gamma(t) = \tilde{X}(q_1(t), \ldots, q_n(t))$. Allora $\frac{d}{dt}\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j} v_j$, ove $v_j = \frac{dq_j}{dt}(0)$. ■

[15] È chiaro che in qualche punto di questa dimostrazione dobbiamo usare il fatto che Q è una varietà, cioè o il fatto che essa è la superficie di livello di una sommersione oppure il fatto che essa è l'immagine di un'immersione.

Come si è detto nella sezione 2.1.B, se si immerge in $\mathbb{R}^{2m}$ l'unione di tutti gli spazi tangenti ai punti di una varietà Q, ciascuno "attaccato" al punto di Q, si ottiene una sottovarietà TQ di $\mathbb{R}^{2m}$ di dimensione doppia di quella di Q, che è chiamata *fibrato tangente di* Q. La prova di questo fatto è tecnica, e non molto istruttiva, riducendosi in definitiva ad un esercizio sul rango di uno Jacobiano, così la riportiamo solo ad uso del lettore interessato.

Proposizione 36 *Sia Q una sottovarietà n–dimensionale di $\mathbb{R}^{3N}$ e sia*

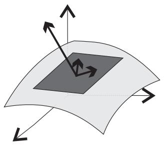
$$TQ \;=:\; \{(X,V)\in\mathbb{R}^{6N} \;:\; X\in Q\,,\; V\in T_XQ\}\,.$$

Allora
(i) TQ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{6N}$ di dimensione $2n$.
(ii) Se $\tilde X : U\to\mathbb{R}^{3N}$, $q\mapsto\tilde X(q)$, è un sistema di coordinate locali in Q, allora la mappa $U\times\mathbb{R}^{3N}\;\to\;\mathbb{R}^{6N}$ definita da

$$\begin{aligned}(q,\dot q) \;&\mapsto\; \Big(\tilde X(q), \frac{\partial\tilde X}{\partial q}(q)\,\dot q\Big)\\ &=\;\Big(\tilde X_1(q),\ldots,\tilde X_{3N}(q), \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tilde X_1}{\partial q_j}(q)\dot q_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tilde X_{3N}}{\partial q_j}(q)\dot q_j\Big)\end{aligned}$$

è un sistema di coordinate (locali) in TQ.

Il punto (ii) afferma che ogni sistema di coordinate locali $(q_1,\ldots,q_n)$ su Q determina delle coordinate locali su TQ: il vettore tangente di coordinate $(q,\dot q)\in\mathbb{R}^{2n}$ è il vettore $V=\sum_{i=1}^n \dot q_i\frac{\partial\tilde X}{\partial q_i}(q)$ basato in $X=\tilde X(q_1,\ldots,q_n)$. Si noti che il dominio di queste coordinate contiene interamente ogni spazio tangente che interseca: se q sono coordinate per $\tilde U\subset Q$, $(q,\dot q)$ sono coordinate per $T\tilde U$.



Dimostrazione della Proposizione 36. (i) Per mostrare che l'insieme TQ è una varietà $2n$–dimensionale basta far vedere che lo si può definire per mezzo di una sommersione $\tilde\Psi:\mathbb{R}^{6N}\to\mathbb{R}^{2r}$, dove come al solito $r=3N-n$. Sia $\Psi:\mathbb{R}^{3N}\to\mathbb{R}^r$ una qualunque sommersione tale che $Q=\{X\in\mathbb{R}^{3N}:\Psi(X)=0\}$. Allora, un vettore $V\in\mathbb{R}^{3N}$ è tangente a Q in X se e solo se è $\frac{\partial\Psi}{\partial X}(X)\cdot V=0$ (infatti, i gradienti $\frac{\partial\Psi_1}{\partial X},\ldots,\frac{\partial\Psi_r}{\partial X}$ sono normali alla varietà). Dunque, TQ è l'insieme degli $(X,V)\in\mathbb{R}^{6N}$ tali che $\tilde\Psi(X,V)=0$, dove $\tilde\Psi:\mathbb{R}^{6N}\to\mathbb{R}^{2r}$ è definita come

$$\tilde\Psi(X,V) \;=\; \Big(\Psi(X), \frac{\partial\Psi}{\partial X}(X)V\Big)\,.$$

La matrice Jacobiana di questa mappa ha la struttura a blocchi

$$\frac{\partial\tilde\Psi}{\partial(X,V)} \;=\; \begin{pmatrix}A & B\\ 0 & A\end{pmatrix}\,.$$

dove $A=\partial\Psi/\partial X$ e B sono matrici $r\times 3N$. La forma esatta di B non è importante: basta che A abbia rango r per assicurare che questa matrice abbia rango $2r$. Per vederlo, consideriamo una combinazione lineare delle righe di questa matrice ed imponiamo che essa si annulli. Se indichiamo con a_i e b_i le righe delle due matrici A e B, abbiamo

$$\sum_{i=1}^r c_i\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^r c_{i+r}\begin{pmatrix}0\\ a_i\end{pmatrix} \;=\; 0$$

ovvero

$$\sum_{i=1}^r c_i\,a_i \;=\; 0\,,\qquad \sum_{i=1}^r\Big(c_i\,b_i+c_{r+i}\,a_i\Big) \;=\; 0\,.$$

In virtù dell'indipendenza lineare dei vettori $a_1,\ldots,a_r$, la prima equazione implica che i primi $r=3N-n$ coefficienti c_i sono nulli. La seconda equazione si riduce allora a $\sum_{i=1}^r c_{i+r}a_i=0$ e dunque anche i restanti c_i devono essere nulli.

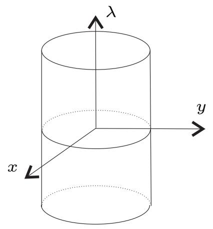
(ii) Supponiamo che le coordinate q mappino un aperto $U\subset\mathbb{R}^n$ bijettivamente su un aperto $\tilde U\subset Q$; mostriamo che allora $(q,\dot q)\mapsto(\tilde X(q),\frac{\partial\tilde X}{\partial q}(q)\dot q)$ è differenziabile e mappa $U \times \mathbb{R}^n$ bijettivamente su $T\tilde{U}$. La differenziabilità è ovvia. Se $(q, \dot{q}) \in U \times \mathbb{R}^n$ allora $\tilde{X}(q) \in \tilde{U}$ per ipotesi e di conseguenza $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q)\dot{q}$ è tangente a Q in $\tilde{X}(q)$. Siccome $\tilde{X} : U \to \tilde{U}$ è bijettiva, ci basta dunque mostrare che, per ogni $q \in U$, $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q) : \dot{q} \mapsto \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q)\dot{q}$ mappa $\mathbb{R}^n$ suriettivamente su $T_X Q$; questo segue dal fatto che questa mappa è lineare ed ha rango n. ■

Esempio: Consideriamo il cerchio

$$S^1 \;=\; \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 - 1\Big\}\,.$$

I vettori tangenti ad S^1 nel punto (x,y) sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali ad (x,y). Dunque, $v \in T_{(x,y)}S^1$ se e solo se $v = (\lambda y, -\lambda x)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Così

$$T_{(x,y)}S^1 \;=\; \Big\{(\lambda x, -\lambda y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \lambda \in \mathbb{R}\Big\},.$$



Allora

$$TS^1 \;=\; \Big\{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x^2 + y^2 = 1\,,\; (\dot{x}, \dot{y}) = \lambda(y, -x) \text{ per qualche } \lambda \in \mathbb{R}\Big\}$$

è diffeomorfo al cilindro

$$\Big\{(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 = 1\Big\}$$

(il diffeomorfismo è $(x, y, \lambda y, -\lambda x) \mapsto (x, y, \lambda)$). Così, $TS^1 \approx S^1 \times \mathbb{R}$.

Attenzione: questo esempio è speciale: *non* si deve pensare che sia sempre $TQ \approx Q \times \mathbb{R}^n$. Questo non è vero, per esempio, se $Q = S^2$. Di fatto, è un famoso teorema di Geometria Differenziale, ottenuto nel 1962 da Adams, che fra tutte le sfere S^n si ha $TS^n \approx S^n \times \mathbb{R}^n$ solo per $n = 1, 3, 7$. (Il fatto che $TS^2 \not\approx S^2 \times \mathbb{R}^2$ segue anche da un altro famoso risultato, e cioè che non esiste alcun campo vettoriale tangente alla sfera che sia ovunque diverso da zero. Questo fatto viene espresso in modi curiosi, come nell'affermazione che "non si può pettinare un riccio" oppure che, ad ogni istante, vi deve essere almeno un punto della superfice terrestre nel quale non c'è vento.)

C. Cambi di coordinate. Abbiamo visto prima che ogni sistema di coordinate locali $q = (q_1, \ldots, q_n)$ su una varietà Q permette di definire delle coordinate sugli spazi tangenti a Q, che usando la notazione della meccanica denotiamo qui $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$.

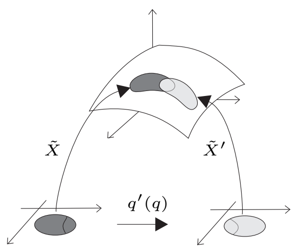
Consideriamo ora un altro sistema di coordinate locali $q' = (q'_1, \ldots, q'_n)$ su Q. In corrispondenza, sono definite delle coordinate locali $\dot{q}'$ sugli spazi tangenti.

Se il dominio delle coordinate q' interseca quello delle q, allora è definita una mappa invertibile

$$q \;\mapsto\; q'(q)$$

chiamata "cambio di coordinate" che è definita in modo ovvio: q e $q'(q)$ sono le coordinate di uno stesso punto della varietà. Precisamente, se $\tilde{X}$ e $\tilde{X}'$ sono le parametrizzazioni locali di Q corrispondenti ai due sistemi di coordinate allora

$$\tilde{X}(q) \;=\; \tilde{X}'(q'(q))$$



(cioè $q'(q) = \tilde{X}'^{-1} \circ \tilde{X}(q)$). Dalle condizioni sugli Jacobiani delle mappe $\tilde{X}$ e $\tilde{X}'$ segue che lo Jacobiano di $q \mapsto q'(q)$ è invertibile:

$$\det \frac{\partial q'}{\partial q}(q) \;\neq\; 0 \qquad \forall q\,.$$

Determiniamo ora la relazione fra le coordinate $\dot{q}$ e $\dot{q}'$ su ogni spazio tangente:

Proposizione 37

$$\dot{q}' \;=\; \frac{\partial q'}{\partial q}(q)\,\dot{q}$$

(cioè $\dot{q}'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q'_i}{\partial q_j}(q)\,\dot{q}_j$*).*

Dimostrazione. Dire che $\dot q$ e $\dot q'$ sono le coordinate di uno stesso vettore dello spazio tangente $T_{\tilde X(q)}Q$ significa che

$$\sum_{i=1}^{n} \dot q_i \, \frac{\partial \tilde X}{\partial q_i}(q) \; = \; \sum_{j=1}^{n} \dot q_j' \, \frac{\partial \tilde X'}{\partial q_j'}(q'(q))\,.$$

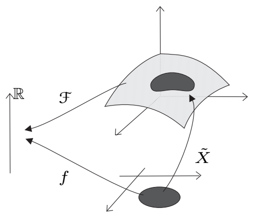
Siccome $\frac{\partial \tilde X}{\partial q_i}(q) = \sum_j \frac{\partial \tilde X'}{\partial q_j'}(q'(q))\frac{\partial q_j'}{\partial q_i}(q)$, questa uguaglianza si scrive

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \dot q_i \, \frac{\partial q_j'}{\partial q_i}(q) - \dot q_j \right] \frac{\partial \tilde X'}{\partial q_j'}(q'(q)) \; = \; 0$$

che per l'indipendenza lineare dei vettori di base $\frac{\partial \tilde X'}{\partial q_1'}, \ldots, \frac{\partial \tilde X'}{\partial q_n'}$ implica quanto asserito. ■

D. Rappresentative locali. L'introduzione di un sistema di coordinate locali $q \mapsto \tilde X(q) \in \mathbb{R}^m$ su una varietà Q permette di rappresentare tutti gli oggetti (funzioni, campi vettoriali, ...) definiti sulla varietà. Per esempio, la "rappresentativa locale" di una funzione

$$\mathcal{F} \;:\; Q \;\to\; \mathbb{R}$$



è la funzione

$$f \;:\; \mathbb{R}^n \;\to\; \mathbb{R}$$

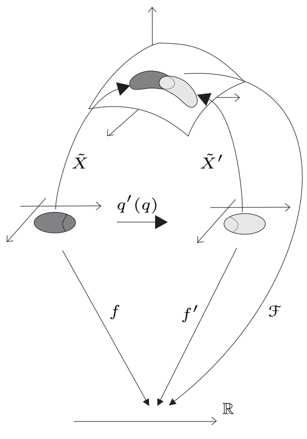
definita dalla condizione "il valore di f in q è uguale al valore di $\mathcal{F}$ nel punto della varietà di coordinate q":

$$f(q) \;=\; \mathcal{F}\Big(\tilde X(q)\Big)$$

(cioè $f = \mathcal{F} \circ \tilde X$).

Le rappresentative locali di una stessa funzione $\mathcal{F}$ in diversi sistemi di coordinate soddisfano delle ovvie relazioni: se q e q' sono due sistemi di coordinate i cui domini si intersecano, allora le rappresentative locali f ed f' di $\mathcal{F}$ soddisfano

$$f'(q'(q)) \;=\; f(q)$$



perchè entrambe assumono il valore che $\mathcal{F}$ assume nel punto $\tilde X(q) = \tilde X'(q'(q))$.

Si deve notare che, se si assegnano in modo arbitrario una funzione $f(q)$ ed una funzione $f'(q')$, non è detto che esista una funzione $\mathcal{F}$ sulla varietà delle quali esse siano le rappresentative locali. Perchè questo avvenga è necessario e sufficiente che f ed f' assumano lo stesso valore in ogni coppia di punti corrispondenti q e $q'(q)$, cioè soddisfino la relazione $f'(q'(q)) = f(q)$ appena scritta: in tal caso, infatti, il loro comune valore serve a definire il valore di $\mathcal{F}$ nel punto della varietà di coordinate q.

Questo è un criterio generale: *ogni operazione eseguita in coordinate locali corrisponde ad un'operazione sulla varietà se e solo se il suo risultato è indipendente dalle coordinate usate.*

Esercizi 3.8.2 Mostrare che se $\mathcal{F} \;:\; Q \;\to\; R$ è una mappa fra due varietà Q ed R di dimensioni n ed m, rispettivamente, allora la "rappresentativa locale" di questa mappa rispetto a due sistemi di coordinate locali $q \mapsto \tilde X(q)$ su Q e $r \mapsto \tilde Y(r)$ su R è la mappa $f \;:\; \mathbb{R}^n \;\to\; \mathbb{R}^m$ tale che $\tilde Y(f(q)) \;=\; \mathcal{F}(\tilde X(q))$.

E. Trasformazione dei vettori: "Sollevamento" di una mappa. Vi è una estensione naturale di una mappa $\mathcal{F}$ fra due varietà Q ed R ad una mappa fra i fibrati tangenti TQ e TR. Questa mappa, che si chiama il *sollevamento* di $\mathcal{F}$, mappa linearmente i vettori di ogni spazio tangente $T_X Q$ in vettori dello spazio tangente $T_{\mathcal{F}(X)}R$.

Limitiamoci a dare l'espressione del sollevamento in coordinate locali (per qualche dettaglio si vedano gli esercizi). Se q sono coordinate su Q, r sono coordinate su R e

$q \mapsto f(q)$ è la rappresentativa locale di $\mathcal{F}$ in questi due sistemi di coordinate, allora la rappresentativa locale del sollevamento di $\mathcal{F}$ è la mappa

$$(q, \dot{q}) \mapsto \left(f(q), \frac{\partial f}{\partial q}(q)\dot{q} \right) ;$$

qui $\frac{\partial f}{\partial q}$ è la matrice Jacobiana di f, cosicché $\frac{\partial f}{\partial q}\dot{q}$ è il vettore di componenti $\sum_j \frac{\partial f^i}{\partial q_j}\dot{q}_j$.

Esercizi 3.8.3 (i) Alla base di questa definizione sta l'idea seguente: siccome i vettori tangenti sono derivate di curve, vorremmo che il sollevamento di f mappi la derivata di una curva in Q nella derivata dell'immagine di tale curva in R. Visto in coordinate locali, se $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è una curva, si vuole che

$$\left(q, \frac{d\Gamma}{dt}(0) \right) \mapsto \left(f(q), \frac{d}{dt}(f \circ \Gamma)(0) \right) .$$

Mostrare che questo requisito conduce alla definizione precedente.

(ii) Mostrare che la definizione di sollevamento data qui è indipendente dai sistemi di coordinate usati (e quindi definisce davvero una mappa fra i fibrati tangenti). [Suggerimento: Consideriamo per esempio un altro sistema di coordinate q' sulla varietà di partenza Q. Se f' è la rappresentativa di $\mathcal{F}$ rispetto alle coordinate q' ed r, allora il sollevamento è

$$(q', \dot{q}') \mapsto \left(f'(q'), \frac{\partial f'}{\partial q'}(q')\dot{q}' \right) .$$

Sappiamo che $f(q) = f'(q'(q))$ e che $\dot{q}' = \frac{\partial q'}{\partial q}(q)\dot{q}$. Così

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}(q)\,\dot{q}_i \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f'}{\partial q'_j}(q'(q))\,\frac{\partial q'_j}{\partial q_i}(q)\,\dot{q}_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f'}{\partial q'_j}(q'(q))\,\dot{q}'_j \, .$$

In modo analogo si verifica che il risultato non dipende dalla scelta delle coordinate r sulla varietà d'arrivo.]

3.9 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi

Esercizi *3.1.1* (i) Il parametro d'arco è $R\theta$, se θ è l'angolo sul cerchio.

(ii) $f_\tau = -mg\sin\theta$ e $f_n = -mg\cos\theta$.

(iv) Suggerimento: Si trova prima $\dot{\theta}_t = \dot{\theta}_0/(1+k|\dot{\theta}_0|t)$ e poi $\theta_t = \theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{k|\dot{\theta}_0|}\log(1+k|\dot{\theta}_0|t)$.

Esercizi *3.2.1* (ii) Scriviamo $\rho_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\rho_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Allora $Q = \{(\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^6 \;:\; |\rho_1 - \rho_2| = l\}$ e il diffeomorfismo cercato da Q ad $\mathbb{R}^3 \times S^2$ è $(\rho_1, \rho_2) \mapsto \left(\rho_1, \frac{1}{l}(\rho_2 - \rho_1)\right)$.

Esercizi *3.2.3* (i) I vettori tangenti alla varietà delle confgurazioni hanno la forma $(\lambda_1 e_\tau(s_1), \lambda_2 e_\tau(s_2))$, dove e_τ è il versore tangente alla curva e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizi *3.3.1* (ii) Basta porre $\dot{q}_3 = q_3 = 0$ nell'espressione di T data nell'esempio della sezione 2.4.E.

Esercizi *3.5.1* (iii) Basta mostrare che il rango dello Jacobiano della mappa

$$\Psi \,:\, \mathrm{L}(3) \to \mathbb{R}^9 \,, \qquad R \mapsto RR^T - \mathbf{1} \,,$$

è ovunque sei laddove $\Psi(R) = 0$. (La verifica è un (non difficile) esercizio, ma si noti che il rango non può essere più grande di 6 perchè la matrice $RR^T - \mathbf{1}$ è simmetrica e dunque ha al più sei componenti indipendenti.)

(iv) La condizione $RR^T = \mathbf{1}$ implica $\det R = \pm 1$, cosicché O(3) è l'unione di due sottoinsiemi *disgiunti*, uno dei quali è SO(3). Ma se $Q = Q_1 \cup Q_2$, con Q_1 e Q_2 disgiunti, allora allora anche Q_1 e Q_2 sono varietà della stessa dimensione di Q (perchè?).

Esercizi *3.5.2* (i) Se w e w' hanno la stessa componente ortogonale a $P_1 - P2$ allora le coppie di vettori (u, w) e (u, w') producono la stesse velocità del sistema. I vettori tangenti alla varietà delle configurazioni in (P_1, P_2) sono costituiti da tutte le coppie $(u, w) \in \mathbb{R}^6$ con w ortogonale a $P_1 - P_2$: è un sottospazio di dimensione cinque di $\mathbb{R}^6$.

(ii) Si prenda una terna solidale a π con asse e_1 lungo r ed una terna solidale a π_{CR} con asse e_1' lungo r_{CR}, e con $e_3 = e_3' = e_n$, e si usi l'espressione (2.3.4) di ω.

(iii) Si proceda in due passi:

- Mostrare innanzittutto che se il corpo ha quattro punti non allineati P_1, P_2, P_3, P_4 tali che i vettori $P_1 - P_4$, $P_2 - P_4$ e $P_3 - P_4$ sono ortonormali, allora
$$\omega \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(P_h - P_k) \times (v_h - v_4).$$
Per questo, basta moltiplicare vettorialmente i due membri di $v_h - v_4 = \omega \times (P_h - P_4)$ per $(P_h - P_4)$, sviluppare il doppio prodotto vettore, e infine sommare membro a membro le tre equazioni così ottenute.
- Se tali punti non ci sono, si prendano tre qualunque punti non allineati P_1, P_2, P_3 e si costruiscano tre vettori ortonormali e_1', e_2', e_3' ortonormalizzando $P_1 - P_2$, $P_2 - P_3$, $(P_1 - P_2) \times (P_2 - P_3)$. Le velocità $\frac{de_i'}{dt}$ sono combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3. Ripetendo il ragionamento fatto sopra per i punti P_1, $P_1 + e_1'$, $P_1 + e_2'$ e $P_1 + e_3'$ si trova
$$\omega \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} e_i' \times \frac{de_i'}{dt}\,.$$

Esercizi *3.5.4* (i) ω deve essere autovettore di $\mathcal{I}_O$.

(ii) $P - O$ ortogonale ad ω.

Esercizi *3.5.6* (i) Scegliamo un riferimento centrato in O e con il piano coordinato $e_x \oplus e_y$ coincidente con π. Allora per ogni punto del corpo di coordinate (x, y, z), $z \neq 0$, ce ne è un altro di uguale massa e coordinate $(x, y, -z)$. Dunque $I_{xz} = I_{yz} = 0$ ed e_z è autovettore della matrice di inerzia.

(ii) Scegliamo un riferimento centrato in O e con l'asse e_z coincidente con Oe.

(iii) Usare le espressioni di I_1, I_2, I_3 come momenti di inerzia relativi ai tre assi e_1, e_2, e_3.

Esercizi *3.7.2* La "traslazione a destra" di un assegnato elemento $h \in G$ è la mappa $g \mapsto gh$. La sua mappa tangente è $\dot g \mapsto \dot g h$. La trivializzazione a destra è dunque $\dot g \mapsto \dot g g^{-1}$. Quella a sinistra $\dot g \mapsto g^{-1}\dot g$.

(Versione 2005.1)

Capitolo 4

Meccanica Lagrangiana

4.1 Sistemi Lagrangiani

A. Sistemi Lagrangiani. Questo capitolo è dedicato allo studio delle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \qquad i = 1, \ldots, n . \tag{4.1.1}$$

Nei capitoli precedenti abbiamo visto che esse sono le equazioni del moto di sistemi olonomi ideali soggetti a forze conservative o, più generalmente, descrivibili mediante un potenziale generalizzato. In tal caso, la Lagrangiana ha la forma

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V_0(q, t) - V_1(q, \dot{q}, t) \tag{4.1.2}$$

con

$$T(q, \dot{q}, t) = T_2(q, \dot{q}, t) + T_1(q, \dot{q}, t) + T_0(q, t) \tag{4.1.3}$$

ove al solito T_2 sono termini quadratici nelle $\dot{q}$, V_1 e T_1 sono lineari nelle $\dot{q}$ e V_0 e T_0 sono da esse indipendenti.

Tuttavia, equazioni del tipo (4.1.1), ove $L(q, \dot{q}, t)$ è una funzione assegnata che non ha necessariamente la forma (4.1.2)–(4.1.3), emergono anche in altri contesti, per esempio in problemi di minimizzazione di funzionali (calcolo delle variazioni, sezione 4.9), in teoria del controllo, e sono inoltre di importanza fondamentale in Fisica Teorica.

Per questo motivo, per quanto possibile studieremo le equazioni di Lagrange (4.1.1) indipendentenmente dalla forma specifica della Lagrangiana L. Si parla allora genericamente di "sistemi Lagrangiani". Con l'espressione sistemi Lagrangiani "di tipo meccanico" ci riferiremo invece al caso nel quale la Lagrangiana ha la forma (4.1.2)–(4.1.3). Naturalmente vi sono delle proprietà comuni a tutti i sistemi Lagrangiani ed altre che valgono solo nel caso meccanico.

Nel seguito assumeremo sempre che, come nel caso meccanico, la Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ sia definita per q in qualche aperto U di $\mathbb{R}^n$ e $\dot{q}$ in tutto $\mathbb{R}^n$ (le velocità possono essere qualunque):

$$(q, \dot{q}) \in U \times \mathbb{R}^n , \qquad U \subset \mathbb{R}^n .$$

(Si potrebbe anche assumere che l'aperto U cambi nel tempo, ma questo non aggiungerebbe nulla di importante). Scritte in modo esplicito, le equazioni di

Lagrange (4.1.1) sono

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} \ddot q_j \;+\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial q_j} \dot q_j \;+\; \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial t} \;-\; \frac{\partial L}{\partial q_i} \;=\; 0$$

ovvero

$$\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q \partial \dot q} \ddot q\Big)_i \;=\; \frac{\partial L}{\partial q_i} \;-\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial q_j} \dot q_j \;-\; \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial t} \,. \tag{4.1.4}$$

Esse sono dunque equazioni del secondo ordine per le q che si possono mettere in forma normale se e solo se la matrice

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q \partial \dot q}(q, \dot q, t)$$

è ovunque invertibile, cioè ha ovunque determinante non nullo. Supporremo (tacitamente) che questo sia sempre verificato.

Avvertenza: Nel caso meccanico la presenza di termini T_1 e T_0 nell'energia cinetica è equivalente a quella di un potenziale generalizzato con $V_0 = -T_0$ e $V_1 = -T_1$. Per semplicità, nell'analisi formale delle equazioni di Lagrange assumeremo allora spesso che l'energia cinetica consista del solo termine T_2, ammettendo però l'esistenza di forze derivanti da un potenziale generalizzato $V_0 + V_1$.

B. L'integrale di Jacobi. Nell'analisi dei sistemi Lagrangiani, come di tutti i sistemi dinamici, gioca naturalmente un ruolo importante l'esistenza di integrali primi. Anche se per un sistema Lagrangiano non meccanico non si può propriamente parlare di "energia", vi è tuttavia un analogo di essa:

Proposizione 38 *Se la Lagrangiana L non dipende dal tempo, allora la funzione*

$$E(q, \dot q) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \dot q_i \, \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(q, \dot q) \;-\; L(q, \dot q) \,, \tag{4.1.5}$$

chiamata integrale di Jacobi*, è un integrale primo delle equazioni di Lagrange.*

Dimostrazione. Consideriamo una soluzione $t \mapsto q(t)$ delle equazioni di Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$. Derivando la funzione composta $t \mapsto E(q(t), \dot q(t))$ si trova

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} \;&=\; \sum_{i=1}^{n} \Big(\ddot q_i \, \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \;+\; \dot q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \;-\; \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot q_i \;-\; \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \ddot q_i \Big) \\ &=\; \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \;-\; \frac{\partial L}{\partial q_i} \Big) \, \dot q_i \;=\; 0 \,. \end{aligned}$$

■

Particolarizziamo questo risultato al caso meccanico in cui $L = T_2 - V_1 - V_0$, con energia cinetica e potenziale generalizzato indipendenti dal tempo. Il calcolo di E si esegue facilmente, senza fare tanti conti, ricordando il teorema di Euler sulle funzioni omogenee:[1] Siccome T_2, V_1 e V_0 sono omogenei, rispettivamente,

[1] Sia p un numero reale. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è *omogenea di grado p* se $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ per ogni $\lambda > 0$ ed $x \neq 0$. Il teorema di Euler afferma che f è p–omogenea se e solo se $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = p f(x)$ per ogni $x \neq 0$.

di grado 2, 1 e 0 si trova

$$E \;=\; \sum_{i=1}^{n} \dot q_i \,\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L \;=\; (2T_2 - V_1) \;-\; (T_2 - V_0 - V_1) \;=\; T_2 + V_0\,.$$

Se non vi sono forze dipendenti dalla velocità, allora $L = T_2 - V_0$ ed $E = T_2 + V_0$ può essere considerata l'energia totale del sistema. Questo è il caso di un sistema olonomo a vincoli ideali fissi e soggetto a forze posizionali e conservative indipendenti dal tempo. In tal caso, la conservazione dell'energia E (che non è altro che la restrizione a TQ dell'energia cinetica e di quella potenziale) è piuttosto ovvia, visto che se i vincoli sono fissi le reazioni vincolari non compiono lavoro. Si osservi che un eventuale termine V_1, se indipendente dal tempo, non contribuisce alla conservazione dell'energia; il motivo è che, come abbiamo già osservato, le corrispondenti forze generalizzate sono 'girostatiche', : esse hanno la forma $\Omega(q)\dot q$, ove Ω è una matrice antisimmetrica, e di conseguenza non compiono lavoro, si vedano gli esercizi.

Esercizi 4.1.1 (i) Dimostrare che la funzione $E := \dot q \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot q} - \Lambda$ è un integrale primo delle equazioni di Lagrange per L se e solo se L è indipendente dal tempo. [Suggerimento: ripetere la dimostrazione della Proposizione 38 assumendo che L dipenda anche da t.]

(ii) Quanto vale l'integrale di Jacobi se $L = T_2 + T_1 + T_0 - V_0$? È ancora interpretabile come 'energia totale'?

(iii) Si supponga che le forze generalizzate agenti su un sistema olonomo ideale di energia cinetica $T_2(q,\dot q)$ siano del tipo $\mathcal{Q}_0(q) + \mathcal{Q}^*(q,\dot q,t)$ con $\mathcal{Q}_0$ conservativa con energia potenziale $V_0(q)$ e $\mathcal{Q}^*(q,\dot q,t)$ qualunque. Scrivere l'equazione di bilancio della funzione $E = T_2 + V$. Mostrare poi che se $\mathcal{Q}^*(q,\dot q,t)$ è girostatica, ovvero $\mathcal{Q}^*(q,\dot q,t) = \Omega(q,t)\dot q$ con Ω antisimmetrica, allora E si conserva.

(iv) Secondo l'esercizio (iii), la dipendenza dal tempo della matrice antisimmetrica Ω che compare nelle forze girostatiche non pregiudica la conservazione di $E = T_2 + V_0$. Secondo l'esercizio (i), se $V = V_1$ dipende dal tempo allora $E = T_2 + V_0$ non è conservata. Vi è una contraddizione?

C. Coordinate ignorabili e momenti coniugati. Dato un sistema Lagrangiano di Lagrangiana $L(q,\dot q,t)$, si chiamano *momenti coniugati* alle coordinate lagrangiane $q_1,\dots,q_n$ le funzioni

$$p_i(q,\dot q,t) \;:=\; \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(q,\dot q,t)\,, \qquad i = 1,\dots,n\,.$$

Dalle equazioni di Lagrange (4.1.1) segue immediatamente che, lungo un moto $t \mapsto q^t$ si ha

$$\frac{d}{dt} p_i(q^t,\dot q^t,t) \;=\; \frac{\partial L}{\partial q_i}(q^t,\dot q,t)\,.$$

Pertanto, *se la Lagrangiana non dipende da una coordinata q_i allora il momento p_i ad essa coniugato è un integrale primo delle equazioni di Lagrange.* In questo caso si dice che q_i è una *coordinata ignorabile*[2] perchè, come vedremo più avanti, l'integrazione del sistema può allora essere ridotta all'integrazione di un sistema "ridotto" con un grado di libertà in meno, nel quale la coppia di coordinate $(q_i,\dot q_i)$ non compare.

Naturalmente, dato un particolare sistema meccanico, il fatto che vi siano o meno delle coordinate ignorabili dipende anche dalla scelta del sistema di

[2] Se q_i è una coordinata angolare, si dice anche che essa è *ciclica.*

coordinate. Per esempio, un punto in campo centrale non ha alcuna coordinata ignorabile se è scritto in coordinate cartesiane, mentre ne ha una se è scritto in coordinate polari. In generale, l'esistenza di una coordinata ignorabile è collegata all'esistenza di simmetrie del sistema (si veda la sezione 3.4.C); la scelta delle coordinate va allora fatta in modo da rispecchiare tali simmetrie.

Esempi: (i) La Lagrangiana di una particella non vincolata soggetta a forze conservative, scritta in coordinate cartesiane, è $L = \frac{1}{2}m|\dot q|^2 - V(q)$ e dunque il momento p_i è la componente $m\dot q_i$ della quantità di moto nella direzione dell'asse q_i. Allora, se V è indipendente da una coordinata, la corrispondente componente della quantità di moto è un integrale primo. Questo fatto è in accordo con quanto visto nel capitolo 1 perchè, a parte il segno, $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ è proprio la componente della forza nella direzione q_i. Tuttavia, la caratterizzazione di questa proprietà è interessante: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ significa che la Lagrangiana (dunque l'energia cinetica e quella potenziale) non cambiano se ci si sposta lungo l'asse q_i, ovvero che L è *invariante* per traslazioni nella direzione q_i. Si vede così che una proprietà di invarianza del sistema (precisamente, della sua Lagrangiana) si traduce in un integrale primo. Questo è un fatto più generale, sul quale torneremo in seguito ("Teorema di Nöther").

(ii) Se la stessa Lagrangiana è scritta in coordinate sferiche

$$L(r,\theta,\varphi,\dot r,\dot\theta,\dot\varphi) \;=\; \tfrac{1}{2}m\Big(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\Big) - V(r,\varphi,\theta)$$

i tre momenti coniugati sono

$$p_r \;=\; m\dot r\,, \quad p_\theta \;=\; mr^2\dot\theta\,, \quad p_\varphi \;=\; mr^2\sin^2\theta\,\dot\varphi\,.$$

Come esercizio, mostrare che in questo caso p_r è la componente della quantità di moto nella direzione radiale, p_θ è la componente del momento angolare lungo la direzione $e_z\times e_r$ e p_φ è la componente $m(x\dot y - y\dot x)$ del momento angolare lungo l'asse z. Si vede qui che vi è un legame fra invarianza della Lagrangiana per rotazioni e conservazione del momento angolare di un punto materiale.

(iii) In presenza di forze derivanti da un potenziale generalizzato $V = V_0(q) + V_1(q,\dot q)$ vi è un contributo ai momenti anche dal termine V_1 lineare nelle velocità, cosicché i momenti coniugati non hanno una natura puramente cinematica. Per esempio, nel caso di una particella carica in campo elettromagnetico, la Lagrangiana scritta in coordinate cartesiane $x = (x_1,x_2,x_3)$ è $L = \frac{1}{2}\,|\dot x|^2 - e\phi(x,t) + e\dot x\cdot A(x,t)$, si veda la (2.5.11). I tre momenti coniugati sono dunque

$$p_i \;=\; m\dot x_i \;+\; eA_i(x,t) \tag{4.1.6}$$

e dipendono anche del potenziale vettore del campo elettromagnetico.

D. Lagrangiane equivalenti. Può avvenire che Lagrangiane diverse producano le stesse equazioni di Lagrange. Per esempio, questo è banalmente il caso di due Lagrangiane che differiscono per una costante moltiplicativa e per una funzione del tempo additiva, cioè

$$L(q,\dot q,t) \qquad \text{e} \qquad c_1\,L(q,\dot q,t) \;+\; c_2(t)\,.$$

Più interessante è il fatto che questo avvenga anche per due Lagrangiane che differiscono per un termine additivo che è funzione anche delle q e delle $\dot q$, ma che si può formalmente scrivere come la derivata totale (=lungo i moti) rispetto al tempo di una funzione di q e t:

Proposizione 39 *Qualunque siano le funzioni $L(q,\dot q,t)$ ed $F(q,t)$, la Lagrangiana $L(q,\dot q,t)$ e la Lagrangiana*

$$L(q,\dot q,t) \;+\; \Big[\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i}(q,t)\,\dot q_i \;+\; \frac{\partial F}{\partial t}(q,t)\Big]$$

(convenzionalmente scritta $L+\frac{dF}{dt}$) conducono alle stesse equazioni di Lagrange.

Dimostrazione. [Una diversa prova di questa proposizione sarà data nella sezione 4.6.] Scriviamo

$$\mathcal{F} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\,\dot q_i + \frac{\partial F}{\partial t}\,.$$

Le equazioni di Lagrange per $L + \mathcal{F}$ sono

$$\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q}\Big] \;+\; \Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot q}\Big) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}\Big] \;=\; 0$$

ed il fatto che esse coincidano con quelle per L segue dal fatto che, come ora mostriamo, il secondo termine fra parentesi quadre è identicamente nullo. Siccome $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}$, si ha infatti

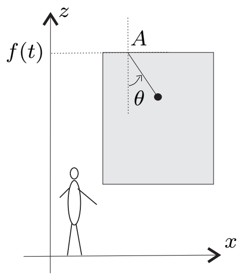
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot q_i}\Big) \;=\; \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial q_i}\Big) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}\,\dot q_j \;+\; \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t} \;=\; \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i}\,. \qquad \blacksquare$$

Si dice che le due Lagrangiane

$$L \qquad \text{e} \qquad c_1 L \,+\, \frac{dF}{dt}$$

sono *equivalenti*.[3] Vi sono due tipiche situazioni nelle quali si incontrano Lagrangiane equivalenti: nella descrizione di uno stesso sistema effettuata da due sistemi di riferimento in moto relativo e nella riduzione alla Routh, per la quale si rimanda alla sezione 4.4.

Esempio: Pendolo in un ascensore. Consideriamo un pendolo vincolato al piano xz di un riferimento inerziale $\{O; x, y, z\}$ ed il cui punto di sospensione A si muove con legge assegnata lungo l'asse verticale z: $z_A = f(t)$. (Il vincolo è mobile; la varietà delle configurazioni è ad ogni istante un cerchio.) Si assuma che, in questo riferimento, l'unica forza attiva sia il peso. Come coordinata Lagrangiana usiamo l'angolo θ fra la verticale discendente ed AP. Allora la parametrizzazione del vincolo è

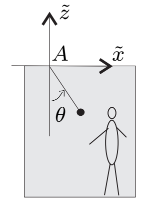


$$x(\theta,t) \;=\; l\,\sin\theta\,, \qquad y(\theta,t) \;=\; 0\,, \qquad z(\theta,t) \;=\; f(t) - l\,\cos\theta$$

e dunque la Lagrangiana è

$$L(\theta,\dot\theta,t) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,\Big(l^2\dot\theta^2 + 2lf'(t)\dot\theta\,\sin\theta\Big) + mgl\cos\theta$$

(si sono trascurati termini additivi dipendenti solo da t). In un riferimento non inerziale $\{A; \tilde x, \tilde y, \tilde z\}$ con l'origine in A ed assi paralleli ai precedenti il vincolo è fisso ma sul punto agisce anche la forza di trascinamento $-ma_A = -mf''(t)e_z$. Siccome questa forza ha energia potenziale $mf''(t)\tilde z = -mf''(t)l\cos\theta$ la Lagrangiana è



$$\begin{aligned}\tilde L(\theta,\dot\theta,t) \;&=\; \frac{1}{2}\,l^2\dot\theta^2 + m[g + f''(t)]l\cos\theta \\ &=\; L(\theta,\dot\theta,t) + \frac{d}{dt}[mlf'(t)\cos\theta]\,;\end{aligned}$$

essendo equivalente ad L, essa conduce (come deve!) alle stesse equazioni del moto.

[3] In letteratura, l'espressione "Lagrangiane equivalenti" è tradizionalmente riservato a questo caso, *non* a Lagrangiane che conducono alle stesse equazioni di Lagrange. Vi sono casi (un po' speciali) di Lagrangiane che non sono "equivalenti" in questo senso ma che conducono comunque alle stesse equazioni di Lagrange. Si vedano i complementi alla fine del capitolo. (ANCORA DA SCRIVERE)

E. Invarianza per cambiamenti di coordinate. Le equazioni di Lagrange (4.1.1) sono state scritte in un certo sistema di coordinate q. Cosa diventano queste equazioni se le si scrivono in un altro sistema di coordinate? Restano equazioni di Lagrange? E se sì, con quale Lagrangiana? La risposta, come adesso mostriamo, è che le nuove equazioni sono ancora equazioni di Lagrange e la nuova Lagrangiana non è altro che la vecchia scritta nelle nuove coordinate. Per questo motivo si dice che le equazioni di Lagrange sono "invarianti" sotto cambiamenti di coordinate.

Consideriamo un sistema la cui Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ è definita per $(q, \dot{q}) \in U \times \mathbb{R}^n$ e consideriamo un cambiamento delle coordinate q, cioè un diffeomorfismo

$$q \mapsto q'(q) .$$

da U in un aperto $U' \subset \mathbb{R}^n$.[4] Siccome L dipende anche dalle velocità dobbiamo 'estendere' questo cambiamento di coordinate allo spazio degli atti di moto $U \times \mathbb{R}^n$. Come spiegato nella sezione 1.6 vi è un unico modo di fare l'estensione mantenendo la struttura di equazioni del secondo ordine (o, se si preferisce, la struttura di fibrato tangente di TQ), ed esso è il 'sollevamento' di $q \mapsto q'(q)$ dato da

$$(q, \dot{q}) \mapsto \Big(q'(q), \frac{\partial q'}{\partial q}(q)\, \dot{q} \Big) ,$$

che è un cambiamento di coordinate da $U \times \mathbb{R}^n$ a $U' \times \mathbb{R}^n$. Siccome lo Jacobiano dell'inversa di un diffemorfismo è l'inversa dello Jacobiano, cioè $\big[\frac{\partial q'}{\partial q}(q)\big]^{-1} = \frac{\partial q}{\partial q'}(q'(q))$, il cambiamento di coordinate inverso è

$$(q', \dot{q}') \mapsto \Big(q(q'), \frac{\partial q}{\partial q'}(q')\ \dot{q}' \Big) .$$

Possiamo ora enunciare la seguente

Proposizione 40 *Una curva $t \mapsto \gamma_t$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange per $L(q, \dot{q}, t)$ se e solo se la curva immagine $t \mapsto \gamma'_t := q'(\gamma_t)$ è soluzione delle equazioni di Lagrange per la Lagrangiana*

$$L'(q', \dot{q}', t) \ := \ L\Big(q(q'), \frac{\partial q}{\partial q'}(q')\, \dot{q}', t \Big)$$

Dimostrazione. [La prova di questa proposizione data qui consiste in un calcolo esplicito, ed è un utile (seppure un po' laborioso) esercizio. Una prova più semplice, ma forse un po' più misteriosa, sarà data nella sezione 3.6.] Per alleggerire appena la notazione, che è comunque pesante, supponiamo che L e quindi L' non dipendano da t. Calcolando le derivate di L' si trova

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} \ = \ \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial}{\partial \dot{q}'_i} \Big(\sum_h \frac{\partial q_j}{\partial q'_h} \dot{q}'_h \Big) \ = \ \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial q'_i} \ &= \ \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} \ + \ \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial}{\partial q'_i} \Big(\sum_h \frac{\partial q_j}{\partial q'_h} \dot{q}'_h \Big) \\ &= \ \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} \ + \ \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \sum_h \frac{\partial^2 q_j}{\partial q'_i \partial q'_h} \dot{q}'_h \end{aligned}$$

[4] Con una piccola, ma comoda, imprecisione di linguaggio è usuale confondere coordinate e mappe: se si denotano q' le nuove coordinate, si scrivono i cambiamenti di coordinate diretto ed inverso come $q' = q'(q)$ e $q = q(q')$.

ove naturalmente le derivate di L' sono calcolate in $(q', \dot{q}')$ mentre le derivate di L e la matrice Jacobiana $\frac{\partial q}{\partial q'}$ sono calcolate nel punto corrispondente $(q(q'), \frac{\partial q}{\partial q'}(q')\dot{q}')$. Se consideriamo allora una curva $t \mapsto \gamma'_t$ e la sua immagine $t \mapsto \gamma_t := q(\gamma'_t)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i}(\gamma'_t, \dot{\gamma}'_t) &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\gamma_t, \dot{\gamma}_t)\, \frac{\partial q_j}{\partial q'_i}(\gamma_t) \\
\frac{\partial L'}{\partial q'_i}(\gamma'_t, \dot{\gamma}'_t) &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}(\gamma_t, \dot{\gamma}_t)\, \frac{\partial q_j}{\partial q'_i}(\gamma_t) \;+\; \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\gamma_t, \dot{\gamma}_t) \sum_h \frac{\partial^2 q_j}{\partial q'_i \partial q'_h}(\gamma_t)(\dot{\gamma}'_t)_h \,.
\end{aligned}$$

Derivando la prima rispetto al tempo otteniamo (omettendo di indicare gli argomenti al secondo membro)

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i}(\gamma'_t, \dot{\gamma}'_t)\Big] \;=\; \sum_j \Big[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big]\, \frac{\partial q_j}{\partial \dot{q}'_i} \;+\; \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\, \Big[\frac{d}{dt}\frac{\partial q_j}{\partial q'_i}\Big]$$

mentre, osservando che $\sum_h \frac{\partial^2 q_j}{\partial q' \partial q'}(\gamma'_t, \dot{\gamma}'_t)\dot{\gamma}'_t = \frac{d}{dt}\big[\frac{\partial q_j}{\partial q'}(\gamma'_t)\big]$, la seconda dà

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_i}(\gamma_t, \dot{\gamma}_t) \;=\; \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\, \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} \;+\; \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\, \Big[\frac{d}{dt}\frac{\partial q_j}{\partial q'_i}\Big] \,.$$

Dunque

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i}(\gamma'_t, \dot{\gamma}'_t)\Big] - \frac{\partial L'}{\partial q'_i}(\gamma'_t, \dot{\gamma}'_t) \;=\; \sum_j \Big(\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\gamma_t, \dot{\gamma}_t)\Big] - \frac{\partial L}{\partial q_j}(\gamma_t, \dot{\gamma}_t)\Big)\, \frac{\partial q_j}{\partial q'_i}(\gamma'_t) \,.$$

Poichè la matrice Jacobiana $\frac{\partial q}{\partial q'}$ è non singolare, questo mostra l'asserto. ■

Lo stesso risultato vale per cambiamenti di coordinate dipendenti dal tempo. Il 'sollevamento' di $q' \mapsto q(q', t)$ è

$$(q', \dot{q}') \mapsto \Big(q(q', t),\, \frac{\partial q}{\partial q'}(q', t)\, \dot{q}' + \frac{\partial q}{\partial t}(q', t)\Big)$$

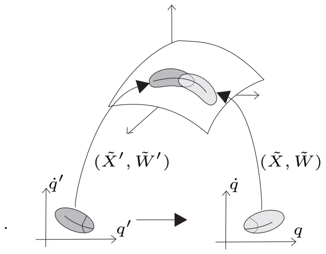
(si veda la sezione 1.6.E) e la Lagrangiana del sistema, scritta nelle nuove coordinate, è

$$L'(q', \dot{q}', t) := L\Big(q(q', t),\, \frac{\partial q}{\partial q'}(q', t)\, \dot{q}' + \frac{\partial q}{\partial t}(q', t), t\Big) \,.$$

Osservazioni: (i) L'invarianza delle equazioni di Lagrange per cambiamenti di coordinate è ovvia a priori nel caso di un sistema meccanico perchè la Lagrangiana è la scrittura nelle coordinate scelte di una funzione che dipende solo dal sistema (la restrizione alla varietà degli atti di moto della differenza fra energia cinetica ed energia potenziale). Nel caso generale, invece, no.

(ii) Da un punto di vista pratico, l'utilità di questa proprietà risiede nel fatto che per scrivere le equazioni del moto di un dato sistema Lagrangiano in un nuovo sistema di coordinate è sufficiente trasformare la sola funzione Lagrangiana e calcolare poi le nuove equazioni di Lagrange. Questo è di solito *molto* più semplice che trasformare le n equazioni di Lagrange.

(iii) Da un punto di vista matematico, questa proprietà ha un significato profondo perchè significa che ogni sistema Lagrangiano, anche non di tipo meccanico, è definito in modo naturale sul fibrato tangente di una varietà (almeno nel caso indipendente dal tempo). Infatti, sia Q una varietà di dimensione n e $\mathcal{L} : TQ \to \mathbb{R}$ una



funzione. Consideriamo delle coordinate locali $q = (q_1, \dots, q_n)$ su Q e "solleviamole" a coordinate $(q, \dot q)$ su TQ; sia $L(q, \dot q)$ la rappresentativa locale di $\mathcal{L}$ in queste coordinate. Allora le equazioni di Lagrange (4.1.1) definiscono un'equazione differenziale in quella parte di TQ coperta dalle coordinate $(q, \dot q)$. La Proposizione 40 afferma che, se si ripete questa stessa costruzione per un altro sistema di coordinate q' su TQ, nell'intersezione dei domini dei due sistemi di coordinate (se non vuoto) si ottengono le stesse equazioni (seppur scritte in coordinate diverse: "stesse" significa che le soluzioni dell'una sono trasformate nelle soluzioni delle altre dal cambio di coordinate. Dunque, *le equazioni di Lagrange (4.1.1) sono la scrittura locale di un'equazione differenziale su TQ, determinata dalla Lagrangiana $\mathcal{L} : TQ \to \mathbb{R}$.*

(iv) Le equazioni di Lagrange *non sono invece invarianti* sotto trasformazioni di coordinate e velocità più generali, che non siano "sollevamenti" di trasformazioni delle q. Per esempio, se si scrive l'equazione dell'oscillatore armonico

$$\dot q \;=\; v\,, \qquad \dot v = -\omega^2 q \qquad (q, \dot q) \in \mathbb{R}^2\,,$$

usando coordinate polari (ρ, φ) nel piano degli atti di moto (x, v), si ottengono le equazioni

$$\dot\rho \;=\; 0\,, \qquad \dot\varphi \;=\; 1$$

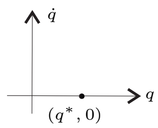
che non sono neppure del secondo ordine.

Esercizi 4.1.2 (i) Cosa cambia nella dimostrazione della Proposizione 40 se L dipende anche da t?

(ii) Si rilegga l'esempio della sezione 2.4.E come un cambiamento di coordinate dipendente dal tempo nella Lagrangiana.

4.2 Equilibri e stabilità dei sistemi meccanici

A. Configurazioni di equilibrio. Ci occupiamo adesso della determinazione degli equilibri dei sistemi lagrangiani e dello studio della loro stabilità. Siccome le equazioni di Lagrange sono del secondo ordine, come già sappiamo dal capitolo 1 le loro soluzioni di equilibrio sono necessariamente del tipo $(q(t), \dot q(t)) = (q^*, 0)$ con qualche q^*, chiamato *configurazione di equilibrio.*[5]



Per definitezza, e anche perchè questo è il caso che interessa, considereremo solo il caso di Lagrangiane di tipo meccanico ed indipendenti dal tempo. Cominciamo con il caratterizzare le configurazioni di equilibrio:

Proposizione 41 *Se $L = T_2(q, \dot q) - V_1(q, \dot q) - V_0(q)$ ed è indipendente dal tempo, allora q^* è configurazione di equilibrio delle equazioni di Lagrange per L se e solo se $\frac{\partial V_0}{\partial q}(q^*) = 0$.*

Dimostrazione. Se L è indipendente dal tempo allora le equazioni di Lagrange sono

$$\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q \partial \dot q}\ddot q\Big)_i \;=\; \frac{\partial L}{\partial q_i} \;-\; \sum_{j=1}^n \dot q_j\, \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial q_j}\,,$$

si veda (4.1.4). Siccome la matrice $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q \partial \dot q}$ è invertibile, q^* è configurazione di equilibrio se e solo se il secondo membro si annulla in $(q^*, 0)$. Chiaramente,

[5] Per un sistema vincolato la 'configurazione' di equilibrio sarebbe propriamente $\tilde X(q^*)$, non q^*. Siccome parleremo sempre meno configurazioni $X \in Q \subset \mathbb{R}^{3N}$ e sempre più delle coordinate lagrangiane, questo cambio di terminologia è comodo.

questo avviene se e solo se $\frac{\partial L}{\partial q}(q^*,0)=0$. Usiamo ora il fatto che $L=T_2-V_1-V_0$. Siccome sia T_2 che V_1 si annullano per $\dot q=0$ anche le loro derivate rispetto a q si annullano per $\dot q=0$ e così $\frac{\partial L}{\partial q}(q^*,0)=\frac{\partial V_0}{\partial 0}(q^*)$. ■

Esercizi 4.2.1 (i) Mostrare che il risultato della Proposizione vale anche se T_2 dipende dal tempo.

(ii) Mostrare che se, nella Proposizione, V_1 dipende dal tempo allora le configurazioni di equilibrio non sono determinate solo da V_0.

(iii) Cosa bisognerebbe richiedere, nella Proposizione, se V_0 dipendesse dal tempo?

(iv) Consideriamo ora un sistema meccanico soggetto a forze non derivabili da un potenziale generalizzato, per il quale le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q} \;=\; \mathcal{Q}$$

con qualche $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}(q,\dot q)$ (indipendente dal tempo). Mostrare che q^* è configurazione di equilibrio se e solo se $\mathcal{Q}(q^*,0)=0$.

(v) Nell'esercizio precedente si aggiunga alla forza $\mathcal{Q}$ una forza dipendente dal tempo ma girostatica, ovvero della forma $\Omega(q,t)\dot q$, ove $\Omega(q,t)$ è una matrice antisimmetrica per ogni q e t. Quali sono le configurazioni di equilibrio?

(vi) Consideriamo un sistema olonomo soggetto a vincoli fissi ed ideali, con varietà delle configurazioni $Q\subset\mathbb{R}^{3N}$. Si assuma che le forze attive siano posizionali e indipendenti dal tempo. Caratterizzare le configurazioni di equilibrio $X^*\in Q$ in termini delle forze attive.

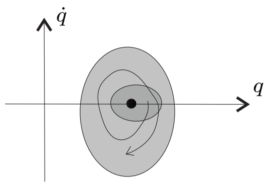
(vii) Determinare le configurazioni di equilibrio di un pendolo sferico (a) usando il risultato dell'esercizio precedente e (b) introducendo coordinate sulla varietà delle configurazioni e trovando i punti critici dell'energia potenziale. [Attenzione: scegliere bene le coordinate: non devono essere singolari proprio sugli equilibri!].

(viii) Quali sono gli equilibri di un punto vincolato alla superficie di un toro (una ciambella) con asse verticale e soggetto alla forza peso?

(ix) Si consideri un punto vincolato ad una superficie. Si assuma che sul punto non agisca alcuna forza attiva. Quali sono le configurazioni di equilibrio?

B. Stabilità. Ricordiamo che, essendo le equazioni di Lagrange del secondo ordine, una configurazione di equilibrio q^* è detta stabile (instabile, asintoticamente stabile) se $(q^*,0)$ è un equilibrio stabile (instabile, asintoticamente stabile). Dunque, q^* è stabile se per ogni intorno $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^{2n}$ di $(q^*,0)$ esiste un intorno $\mathcal{U}_0\subset\mathbb{R}^{2n}$ di $(q^*,0)$ tale che

$$(q_0,\dot q_0)\in\mathcal{U}_0 \quad\Longrightarrow\quad (q_t,\dot q_t)\in\mathcal{U}\quad \forall t\in\mathbb{R}\,.$$



Ricordiamo anche che, se la Lagrangiana è indipendente dal tempo, allora l'esistenza dell'integrale di Jacobi rende impossibile la stabilità asintotica.

La determinazione della stabilità delle configurazioni di equilibrio dei sistemi lagrangiani è un problema di grande interesse per le applicazioni. In questa sezione vedremo che ci sono due risultati basilari:

- Se $L=T_2-V_1-V_0$, allora i punti di minimo stretto di V_0 sono configurazioni di equilibrio stabile ("Teorema di Lagrange–Dirichlet").
- Se $L=T_2-V_0$ e l'Hessiana di V_0 nella configurazione di equilibrio ha un autovalore positivo, allora l'equlibrio è instabile.

Al di fuori di questi due casi il problema diventa delicato e *molto* difficile, e non si sa in realtà molto.

Il teorema di Lagrange–Dirichlet è una semplice applicazione del secondo metodo di Lyapunov, ed usa l'integrale di Jacobi come funzione di Lyapunov. Esso è una generalizzazione di quanto visto nel capitolo 1 relativamente all'equazione di Newton:

Proposizione 42 *Sia* $L(q,\dot q) = T_2(q,\dot q) - V_0(q) - V_1(q,\dot q)$*. Se* V_0 *ha un minimo stretto in* q^**, allora* q^* *è configurazione di equilibrio stabile.*

Dimostrazione. Che q^* sia configurazione di equilibrio è assicurato dalla Proposizione 41. Per provarne la stabilità applichiamo il teorema di Lyapunov, usando come funzione di Lyapunov l'integrale di Jacobi $E(q,\dot q)$ che, nelle ipotesi fatte, eguaglia $T_2(q,\dot q) + V_0(q)$. Siccome E è un integrale primo, ci basta mostrare che esso ha un minimo stretto in $(q^*,0)$. Questo segue dal fatto che V_0 ha un minimo stretto in q^* e dal fatto che, per ogni q, $\dot q \mapsto T_2(q,\dot q)$ ha un minimo stretto in $\dot q = 0$: conseguentemente, quando ci si allontana da $(q^*,0)$ almeno una delle due funzioni cresce, e l'altra non decresce: dunque, la loro somma cresce.[6] ■

Il teorema di Lagrange–Dirichlet è una condizione *sufficiente* per la stabiltà di una configurazione di equilibrio. In pratica, è di solito facile trovare i minimi "quadratici" dell'energia potenziale V_0, quelli cioè nei quali la matrice Hessiana $\frac{\partial^2 V_0}{\partial q \partial q}$ è definita positiva (ha cioè autovalori tutti positivi).

Si tenga bene presente, però, che la condizione che q^* sia un minimo di V_0 non è necessaria: senza ulteriori ipotesi, *non è vero che solo i punti di minimo di* V_0 *siano configurazioni di equilibrio stabile.* In particolare, questo non è vero se vi è un potenziale generalizzato, come vedremo più avanti ("stabilizzazione girostatica"). Invece, se tutte le forze sono conservative, come applicazione del metodo spettrale si ha il seguente risultato di instabilità:

Proposizione 43 *Sia* $L(q,\dot q) = T_2(q,\dot q) - V_0(q)$*. Sia* q^* *un punto critico di* V_0 *e supponiamo che l'Hessiana* $\frac{\partial^2 V_0}{\partial q \partial q}(q^*)$ *abbia un autovalore positivo. Allora* q^* *è configurazione di equilibrio instabile.*

La dimostrazione di questa Proposizione è interessante perchè richiede lo studio della linearizzazione delle equazioni di Lagrange, che svolge poi un ruolo centrale nello studio delle piccole oscillazioni. Essa è posticipata alla prossima sottosezione.

Si tenga ben presente che la conclusione di questa Proposizione *non è vera* se la Lagrangiana ha dei termini V_1: si veda la sottosezione D.

Esempi: (i) Consideriamo un pendolo sferico, cioè un punto vincolato alla superficie di una sfera e soggetto alla forza peso. Le configurazioni di equilibrio sono i due poli (si veda l'esercizio *4.2.1.vii*). L'energia potenziale della forza peso è mgh, ove h è la quota. La sua restrizione alla sfera ha un minimo sul polo inferiore, che dunque per il teorema di Lagrange–Dirichlet è stabile. Ci si aspetta che la configurazione di equilibrio superiore sia instabile; per provarlo, bisogna introdurre coordinate locali e calcolare gli autovalori dell'Hessiana dell'energia potenziale. Farlo, procedendo come indicato nella soluzione all'esercizio *4.2.1.vii*).

(ii) Negli esercizi, e nelle applicazioni, una prima informazione sulla stabilità di una configurazione di equilibrio q^* per un sistema di Lagrangiana $L = T_2 - V_0$ si ottiene calcolando gli autovalori dell'Hessiana V_0'' di V_0 in q^*. La situazione è riassunta nella seguente tabella.

---

[6] Formalizziamo questo argomento: esiste un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di q^* nel quale $V(q) > V(q^*)$ per $q \neq q^*$; allora se $U \times \mathbb{R}^n \ni (q,\dot q) \neq (q^*,0)$ si ha

$$E(q,\dot q) \;=\; T_2(q,\dot q) + V_0(q) \;>\; V_0(q^*) \;=\; E(q,0)$$

perchè

- se $q \neq q^*$ allora $T_2(q,\dot q) \geq 0$ e $V_0(q) > V_0(q^*)$
- se $\dot q \neq 0$ allora $T_2(q,\dot q) > 0$ e $V_0(q) \geq V_0(q^*)$.

Autovalori V_0''	*Stabilità*
tutti > 0	sì
uno < 0	no
tutti ≥ 0 ed uno $= 0$	?

Qui "?" significa ovviamente che nulla si può concludere sulla base della sola conoscenza degli autovalori di V_0''. Se si riesce comunque a provare che q^* è un minimo allora si può concludere la stabità. Se invece q^* è una sella, allora il problema è sostanzialmente insoluto; per il caso di un massimo, si veda l'osservazione ii. più sotto.

Esercizi 4.2.2 (i) Un punto materiale non vincolato è soggetto all'azione della forza peso e della forza di richiamo di una molla ideale che lo congiunge ad un punto fisso O. Determinare equilibri e stabilità. [Facciamo qui e nel seguito la seguente convenzione: una "molla ideale" che congiunge due punti P e Q esercita una forza di energia potenziale $\frac{1}{2}\,k|PQ|^2$, ove $k > 0$ è un parametro ("costante elastica").]

(ii) Un punto è vincolato alla superficie di una sfera di raggio R. Le forze attive che agiscono su di esso sono il peso e la forza di richiamo di una molla (ideale) che lo congiunge ad un punto posto verticalmente sopra il centro della sfera, a distanza $R+l$ dal centro della sfera. Determinare gli equilibri e studiarne la stabilità (in funzione dei parametri del sistema).

(iii) Determinare le configurazioni di equilibrio di un bipendolo e studiarne la stabilità.

(iv) Mostrare che per un sistema a due gradi di libertà di Lagrangiana $L(q,\dot q) = T_2(q,\dot q) - V(q)$ si ha

$\det V''$	trV''	Stabilità
> 0	> 0	sì
> 0	≤ 0	no
< 0		no
$= 0$	< 0	no
$= 0$	≥ 0	?

Osservazioni: (i) Si è detto che, se la Lagrangiana è indipendente dal tempo, allora la stabilità asintotica è impossibile. Naturalmente essa è possibile (anche se non garantita) per un sistema olonomo soggetto a forze dissipative, tali cioè che $\mathcal{Q}(q,\dot q)\cdot \dot q < 0$ per tutti i $(q,\dot q)$.

(ii) Consideriamo un sistema di Lagrangiana $L = T_2 - V_0$, senza forze girostatiche ed indipendente dal tempo. Il teorema di Lagrange–Dirichlet corrisponde all'intuizione fisica che un minimo dell'energia potenziale sia stabile. Meno intuitivo è il problema inverso, cioè se la stabilità sia possibile solo in minimi stretti dell'energia potenziale — un'assunzione che sembra così naturale che fino a tempi relativamente recenti è quasi sempre stata data per scontata. Come già detto, senza ulteriori ipotesi la risposta è negativa, perfino nel caso di sistemi ad un grado di libertà. Questo è mostrato dal seguente classico esempio. Si consideri un sistema ad un grado di libertà con energia cinetica $\frac{1}{2}\dot q^2$ ed energia potenziale

$$V(q) \;=\; \begin{cases} q^4 \cos\frac{1}{q} & \text{se } q \neq 0 \\ 0 & \text{se } q = 0\ . \end{cases}$$

Il punto $q = 0$ è un punto stazionario di $V(q)$ ma non è un minimo: in ogni intorno di $q = 0$ ci sono punti in cui $V(q)$ è negativo. Ciononostante, la configurazione di equilibrio $q = 0$ è stabile: infatti $q = 0$ è accumulazione di massimi di $V(q)$, cosicché moti con energia cinetica sufficientemente piccola non possono allontanarsi. (Come esercizio, formalizzare questo argomento). In questo esempio, la funzione V è di classe $\mathcal{C}^2$ e questo è quasi cruciale: si possono fare degli analoghi esempi in classe $\mathcal{C}^\infty$, sostituendo q^4 con $\exp(-q^{-2})$, ma, almeno nel caso di un grado di libertà, non in classe analitica (perchè non è allora possibile l'accumulazione di punti critici, a meno che la funzione sia costante). Questo esempio indica che il problema è delicato, e difficile da risolvere. In effetti, nonostante alcuni risultati molto recenti (degli ultimi quindici o vent'anni), che per esempio indicano che, se $L = T_2 - V_0$, allora ogni massimo stretto di V_0 è configurazione di equilibrio instabile, la situazione non è ancora completamente chiarita.

C. Linearizzazione. Studiamo adesso le proprietà spettrali della linearizziamo delle equazioni di Lagrange attorno ad un equilibrio $(q^*, 0)$. Questo servirà sia a dimostrare la Proposizione 43 che come base per lo studio delle piccole oscillazioni della sezione successiva.

Consideriamo un sistema di Lagrangiana $L(q, \dot{q}) = T_2(q, \dot{q}) - V(q)$. Indichiamo con $A(q)$ la matrice cinetica, di modo che $T_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\,\dot{q} \cdot A(q)\dot{q}$. Per alleggerire la notazione indicheremo $V'(q)$ e $V''(q)$, rispettivamente, le matrici Jacobiana $\frac{\partial V}{\partial q}(q)$ ed Hessiana $\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q}(q)$ (inoltre, scriviamo V invece del solito V_0).

Proposizione 44 *Consideriamo la Lagrangiana $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\,\dot{q} \cdot A(q)\dot{q} - V(q)$ ed assumiamo che $V'(q^*) = 0$. Allora la linearizzazione delle equazioni di Lagrange per L attorno a $(q^*, 0)$ sono le equazioni*

$$A(q^*)\,\ddot{q} \;+\; V''(q^*)\,(q - q^*) \;=\; 0\,. \tag{4.2.1}$$

Esse sono le equazioni di Lagrange per la Lagrangiana ("quadratizzata")

$$L^*(q, \dot{q}) \;=\; \tfrac{1}{2}\dot{q} \cdot A(q^*)\,\dot{q} \;-\; \tfrac{1}{2}(q - q^*) \cdot V''(q^*)\,(q - q^*)\,.$$

Dimostrazione. Per linearizzare le equazioni di Lagrange bisogna naturalmente pensarle come un sistema del primo ordine in $(q, \dot{q})$: si tratta dunque di svilupparle in serie di Taylor in $q - q^*$ ed in $\dot{q}$ e tenere i termini lineari di questo sviluppo. Indicando con $\mathcal{O}(k)$ termini di grado almeno k in $\dot{q}$ e/o in $q - q^*$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} &\;=\; \frac{d}{dt}\big[A(q)\dot{q}\big] \;=\; A(q)\ddot{q} + \mathcal{O}(2) \\
\frac{\partial T_2}{\partial q} &\;=\; \frac{\partial}{\partial q}\Big[\frac{1}{2}\,\dot{q} \cdot A(q)\dot{q}\Big] \;=\; \mathcal{O}(2)
\end{aligned}$$

e dunque le equazioni di Lagrange per $L = T_2 - V$ sono

$$\ddot{q} \;=\; -\,A(q)^{-1}\,V'(q) \;+\; \mathcal{O}(2)\,.$$

Siccome V' si annulla in q^*, sviluppando in serie di Taylor attorno a q^* si ha

$$\begin{aligned}
A(q)^{-1}V'(q) &\;=\; \big[A(q^*)^{-1} + \mathcal{O}(1)\big]\,\big[V''(q^*)(q - q^*) + \mathcal{O}(2)\big] \\
&\;=\; A(q^*)^{-1}\,V''(q^*)(q - q^*) + \mathcal{O}(2)
\end{aligned}$$

e dunque le equazioni linearizzate sono le (4.2.1). È immediato che esse sono le equazioni di Lagrange per L^*. ■

Per studiare lo spettro delle equazioni di Lagrange linearizzate (4.2.1) dobbiamo innanzittutto scriverle come un sistema di $2n$ equazioni del primo ordine: si ottiene

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \;=\; \Lambda(q^*)\,\begin{pmatrix} q - q^* \\ v \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

ove Λ è una matrice $2n \times 2n$ con la struttura a blocchi

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -A^{-1}V'' & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.2.3}$$

dove $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ indicano rispettivamente le matrici nulla ed identità $n \times n$ (e non abbiamo più specificato che le matrici Λ, A e V' sono tutte valutate in q^*).

Grazie alla struttura a blocchi di Λ vi è una relazione fra i suoi $2n$ autovalori e gli n autovalori della matrice $A^{-1}V''$:

Lemma *Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori di $A^{-1}V''$, allora gli autovalori di Λ sono*

$$\pm\sqrt{-\lambda_1} \ \ldots\ldots\, , \pm\sqrt{-\lambda_n}\,.$$

Dimostrazione. Se μ è un autovalore di Λ con autovettore $\binom{u}{v}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, allora si ha

$$\Lambda\binom{u}{v} = \mu\binom{u}{v} \quad\Longleftrightarrow\quad \binom{v}{-A^{-1}V''u} = \binom{\mu\, u}{\mu\, v}.$$

Dunque $-A^{-1}V''u = \mu^2 u$, cioè $-\mu^2$ è autovalore di $A^{-1}V''$. ■

Prima di poter applicare questo Lemma alla dimostrazione della Proposizione 43 abbiamo bisongo di collegare le proprietà dello spettro di $A^{-1}V''$ a quelle dello spettro di V''. Questa analisi richiede uno studio dettagliato non solo degli autovalori di $A^{-1}V''$, ma anche dei suoi autovettori.

In ogni problema pratico, il calcolo degli autovalori e degli autovettori di $A^{-1}V''$ si fa al solito modo, e non è neppure necessario calcolare l'inversa di A. Infatti l'equazione $A^{-1}V''u = \lambda u$ è equivalente a $V''u = \lambda Au$. Dunque, gli autovalori di $A^{-1}V''$ sono le soluzioni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di

$$\det\big(V'' - \lambda_j\, A\big) = 0\,. \tag{4.2.4}$$

Una volta trovati gli autovalori, gli autovettori si calcolano poi risolvendo

$$V''u_j = \lambda_j\, A\, u_j\,. \tag{4.2.5}$$

Quel che ci interessa qui, però, sono le proprietà degli autovalori e degli autovettori di $A^{-1}V''$ e per questo abbiamo bisogno di richiamare un po' di algebra. L'equazione $V''u = \lambda Au$ è del tutto simile all'equazione agli autovalori per V'', cioè $V''u = \lambda\mathbf{1}$. L'unica differenza è che la matrice identità è sostituita dalla matrice A. Per questo, anche se questa terminologia non è usuale, chiameremo *A–autovalori* ed *A–autovettori* di V'' gli autovalori e gli autovettori di $A^{-1}V''$. Ora, si sa bene che gli autovalori di una matrice simmetrica sono reali e che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori ("teorema spettrale"). Se A è simmetrica e definita positiva, come nel nostro caso, avviene lo stesso per gli A–autovalori e gli A–autovettori, con una sola piccola differenza riguardo alla ortonormalità. Precisamente, *se A è una matrice simmetrica e definita positiva e V'' è una matrice simmetrica, allora*

- *gli A–autovalori di V'' sono reali;*
- *V'' ha n A–autovettori $u_1, \ldots, u_n$ che sono linearmente indipendenti ed "A–ortonormali":*

$$u_i \cdot Au_j = \delta_{ij}\,, \qquad i, j = 1, \ldots, n\,. \tag{4.2.6}$$

La dimostrazione di questo fatto è del tutto analoga a quella del teorema spettrale per le matrici simmetriche, e si trova sui testi di algebra, per cui la omettiamo.

Spesso questo risultato viene chiamato “diagonalizzazione simultanea” di due matrici simmetriche, delle quali una è definita positiva. Il motivo è che nella base $u_1, \ldots, u_n$ entrambe le matrici A e V'' sono diagonali. Infatti, se U è la matrice di colonne $u_1, \ldots, u_n$ allora

$$U^T A U \;=\; \mathbf{1}\,, \qquad U^T V'' U \;=\; \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{4.2.7}$$

perchè $u_i \cdot A u_j = \delta_{ij}$ e $u_i \cdot V'' u_j = u_i \cdot \lambda_j A u_j = \lambda_j \delta_{ij}$.

Possiamo ora dare la

Dimostrazione della Proposizione 43 Mostriamo innanzittutto che se V'' ha un autovalore negativo allora anche $A^{-1}V''$ ha almeno un autovalore negativo. Sia v un autovettore di V'' corrispondente ad un suo autovalore negativo. Consideriamo una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da A–autovettori $u_1, \ldots, u_n$ di V'' che sono A–ortonormali. Sviluppiamo l'autovettore v in questa base: $v = \sum_{i=1}^n c_i\, u_i$ con certi numeri reali c_i non tutti nulli. Denotando $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli A–autovalori di V'', che soddisfano $V'' u_j = \lambda_j A u_j$, abbiamo allora

$$0 \;>\; v \cdot V'' v \;=\; \sum_{i,j=1}^n c_i c_j u_i \cdot V'' u_j\,. \;=\; \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \lambda_j u_i \cdot A u_j \;=\; \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i$$

e questo dimostra che almeno uno degli A–autovalori, diciamo λ_i, è negativo. In corrispondenza, per il Lemma, la matrice Λ ha la coppia di autovalori $\pm\sqrt{-\lambda_i} = \pm\sqrt{|\lambda_i|}$, uno negativo ed uno positivo. Come si sa dalla teoria di Lyapunov l'esistenza di quest'ultimo implica l'instabilità. ■

E. Stabilizzazione girostatica. Si è già detto che, in presenza di termini girostatici, il risultato di instabilità della Proposizione 43 non vale: può esserci un equilibrio stabile anche in corrispondenza a configurazioni nelle quali l'Hessiana di V_0 non è definita positiva (e dunque, per esempio, V_0 ha un massimo).

Il motivo per cui questo fatto non è in contraddizione con l'analisi precedente è che la presenza dei termini girostatici, pur non modificando l'equilibrio, modifica lo spettro della linearizzazione. Può allora avvenire che, anche in presenza di autovalori negativi di $V_0''(q^*)$, la linearizzazione delle equazioni di Lagrange abbia spettro interamente immaginario. Naturalmente, come sappiamo dal capitolo 1, il fatto che tutti gli autovalori siano immaginari non è sufficiente a provare nè la stabilità nè l'instabilità (a meno che il sistema sia lineare) ma in certi casi avviene che l'equilibrio sia stabile.

In quei casi nei quali un equilibrio che sarebbe instabile in presenza di sole forze conservative (per esempio un massimo di V_0) diventa stabile in seguito all'aggiunta di forze girostatiche, si parla di *stabilizzazione girostatica.*

Anche se questo fenomeno può apparire un po' artificiale, in realtà compare in varie situazioni di una certa importanza, in presenza di forze magnetiche ed in riferimenti rotanti. Ci limitiamo qui ad illustrare un esempio elementare, e classico.

Esempio: Consideriamo un punto materiale di carica elettrica e vincolato ad un piano e soggetto ad una forza elastica repulsiva e ad un campo magnetico costante ortogonale al piano. In assenza del campo magnetico l'origine è instabile. Avviene però che il campo magnetico faccia incurvare le traiettorie e, se sufficientemente intenso, precisamente se

$$B > \frac{2}{e}\,\sqrt{mk}\,. \tag{4.2.8}$$

ripristini la stabilità. Per descrivere il sistema usiamo coordinate cartesiane (x, y) sul piano e denotiamo con k la costante elastica del repulsore e con $(0, 0, B)$ il campo magnetico. Sappiamo che la Lagrangiana è

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y}) \;=\; \frac{1}{2}\,m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\,k(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\,eB(x\dot{y}-y\dot{x})\,. \tag{4.2.9}$$

(Si veda l'esercizio *2.5.3*). Per studiare la stabilità dell'origine si può procedere con due diversi metodi. Uno è quello diretto: siccome la Lagrangiana è quadratica, le equazioni di Lagrange sono lineari e dunque si può utilizzare il ben noto risultato che, se la matrice Λ è diagonalizzabile, allora l'origine è un equilibrio stabile dell'equazione $\dot{\xi}=\Lambda\xi$ se e solo se tutti gli autovalori di Λ hanno parte reale ≤ 0. I conti sono riportati più sotto: non sono difficili, ma si deve fare appena un po' di attenzione, per esempio, al fatto che si deve provare la diagonalizzabilità.

Il secondo metodo,[7] più concettuale, permette di arrivare alla conclusione senza fare tanti conti ed ha il vantaggio di funzionare, almeno in certi casi, anche se la forza repulsiva non è lineare (si vedano gli esercizi). L'idea è di interpretare il potenziale generalizzato del campo magnetico come un termine di Coriolis, ovvero di pensare che si stia descrivendo il sistema in coordinate rotanti, e di immaginare quale sarebbe la Lagrangiana in coordinate non rotanti.

Primo metodo: Per semplificare la notazione scriviamo $\hat{k}=k/m$ e $\hat{B}=eB/m$. Le equazioni di Lagrange hanno la forma $\dot{\xi}=\Lambda\xi$ con la matrice

$$\Lambda \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \hat{k} & 0 & 0 & \hat{B}\\ 0 & \hat{k} & -\hat{B} & 0 \end{pmatrix}\,.$$

L'equazione agli autovalori per Λ è

$$\lambda^4+(\hat{B}^2-2\hat{k})\lambda^2+\hat{k}^2 \;=\; 0\,.$$

Siccome l'equazione è biquadratica, gli autovalori sono a coppie, $\pm\lambda_1$ e $\pm\lambda_2$ e dunque l'unica possibilità per la stabilità è che essi siano tutti immaginari. Questo avviene se l'equazione $\mu^2+(\hat{B}^2-2\hat{k})\mu+\hat{k}^2=0$ ha due soluzioni reali e negative. Le due soluzioni sono reali se il discriminante $(\hat{B}^2-2\hat{k})^2-4\hat{k}^2\geq 0$, ovvero se $\hat{B}^2\geq 4k$, e in tal caso esse sono anche negative (si verifica subito per esempio con la "regola dei segni di Cartesio"). La matrice è diagonalizzabile se i quattro autovalori sono distinti, cioè se λ_1 e λ_2 sono non nulli e diversi fra loro. Essi sono diversi da zero perchè $\hat{k}\neq 0$ e sono diversi fra loro se $\hat{B}^2-4\hat{k}\neq 0$. Dunque, l'origine è stabile se $\hat{B}^2>4\hat{k}$, che non è altro che la (4.2.8).

Secondo metodo. Si ricordi che, se L^* è la Lagrangiana di un sistema costituito da un punto materiale scritta in un certo sistema di coordinate, la Lagrangiana che descrive questo sistema in un sistema di coordinate (x,y,z) che ruotano rispetto al primo con velocità angolare costante ω attorno all'asse z è

$$L^*+\frac{1}{2}\,m\omega^2(x^2+y^2)+m\omega(x\dot{y}-y\dot{x})\,.$$

(si veda l'esempio della ezione 2.4.E). Posto

$$\omega \;=\; \frac{eB}{2m}$$

riscriviamo allora la Lagrangiana (4.2.9) nella forma

$$L \;=\; L^*+\frac{1}{2}\,m\omega^2(x^2+y^2)+m\omega(x\dot{y}-y\dot{x})$$

ove

$$L^*=\frac{1}{2}\,m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}\,(m\omega^2-k)(x^2+y^2)\,.$$

Così, formalmente, L è la Lagrangiana, scritta in coordinate rotanti, di un punto soggetto ad una forza elastica di costante $m\omega^2-k$. L'origine è dunque stabile se e

[7]suggerito dallo studente Valerio Marra, a.a. 2001–2002

solo se la forza elastica è attrattiva, cioè se $m\omega^2 > k$, che non è altro che la (4.2.8). (Infatti, l'origine è stabile per il sistema di Lagrangiana L^*. Siccome le soluzioni dei due sistemi sono trasformate le une nelle altre da una rotazione, la stabilità dell'origine per un sistema implica quella per l'altro).

Esercizi 4.2.3 (i) Nell'esempio precedente, si sostituisca la forza armonica repulsiva con una forza di energia potenziale $V_0(x, y)$ che si assume invariante per rotazioni. Precisamente, assumiamo sia

$$V(x, y) \;=\; f(x^2 + y^2)$$

con una qualche funzione differenziabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostrare che l'origine è una configurazione di equilibrio e determinare una condizione per la sua stabilità. [Suggerimento: si usi il secondo metodo]

4.3 Piccole oscillazioni dei sistemi meccanici

A. Modi normali di oscillazione. Consideriamo adesso un sistema meccanico di Lagrangiana

$$L(q, \dot q) \;=\; \frac{1}{2}\dot q \cdot A(q)\, \dot q \;-\; V(q) \tag{4.3.1}$$

ed assumiamo che l'energia potenziale $V(q)$ abbia un minimo 'quadratico' in una configurazione q^*, cioè con Hessiana $V''(q^*)$ definita positiva. Allora l'equilibrio $(q^*, 0)$ è stabile ed inoltre, come mostriamo più sotto, è un equilibrio ellittico (o centro), nel senso che gli autovalori della linearizzazione sono tutti puramente immaginari e non nulli. In questa situazione ha un certo interesse lo studio delle soluzioni delle equazioni linearizzate

$$A(q^*)\, \ddot q + V''(q^*)\, (q - q^*) = 0\,,$$

che hanno un comportamento oscillatorio e sono pertanto chiamate "piccole oscillazioni". Questo approccio introduce un'importante idea, quella di "modo normale di oscillazione", che è un paradigma (lineare) per la descrizione dei fenomeni oscillatori e si incontra frequentemente in Fisica ed in molte applicazioni.

L'idea soggiacente lo studio delle piccole oscillazioni è naturalmente che, almeno per dati iniziali abbastanza vicini al punto di equilibrio e per tempi non troppo lunghi, le proprietà dei moti del sistema linearizzato (periodicità, risonanze, etc.) riproducano abbastanza bene quelle dei moti del sistema completo. Come abbiamo già detto, in quale misura questo sia vero è una questione delicata: è chiaro che tutto si gioca sul significato dei due "abbastanza". Per qualche informazione si vedano i complementi alla fine del capitolo. Si tenga ben presente, comunque, che moti "distanti" dall'equilibrio possono essere, e di solito sono, completamente diversi da "piccole oscillazioni": per esempio, possono non avere affatto un carattere oscillatorio (basta pensare alle separatrici di un pendolo o, ancor meglio, ai moti di un pendolo doppio, la cui dinamica è caotica.)

L'analisi della sezione precedente fornisce una descrizione delle piccole oscillazioni:

Proposizione 45 *Consideriamo il sistema di Lagrangiana (4.3.1) ed assumiamo che V abbia in q^* un minimo con Hessiana $V''(q^*)$ definita positiva. Allora:*

i. *Gli autovalori della linearizzazione* $\Lambda(q^*)$ *sono puramente immaginari e non nulli:*
$$\pm\, i\,\omega_1\,, \ldots\ldots, \pm\, i\,\omega_n$$
ove $\omega_1 > 0\,, \ldots\, \omega_n > 0$ *sono soluzioni di* $\det[V''(q^*) - \omega_j^2 A(q^*)] = 0$.

ii. *Le equazioni linearizzate hanno l'integrale generale*
$$q(t;c,\delta) \;=\; q^* + \sum_{i=1}^{n} c_j\, \cos(\omega_j t + \delta_j) u_j\,, \quad c_j \geq 0\,,\ \delta_j \in [0, 2\pi) \qquad (4.3.2)$$
ove $u_1, \ldots, u_n$ *sono* n *autovettori linearmente indipendenti di* $A^{-1}(q^*)V''(q^*)$, *e dunque soddisfano* $[V''(q^*) - \omega_j^2 A(q^*)]u_j = 0$.

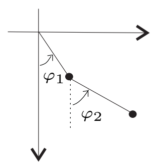
Dimostrazione. (i) Siccome le matrici A e V'' e gli autovettori $u_1, \ldots, u_n$ di $A^{-1}V''$ sono tutti reali, da $V''u_j = \lambda_j A u_j$ segue
$$u_j \cdot V''\, u_j \;=\; \lambda_j\, u_j \cdot A\, u_j\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,.$$
Questo assicura $\lambda_j > 0$ perchè le matrici V'' ed A sono entrambe definite positive. Dunque gli autovalori $\pm\sqrt{-\lambda_j} = \pm i\sqrt{\lambda_j}$ di Λ sono tutti immaginari e non nulli e possiamo pertanto scriverli come $\pm i\omega_j$ con $\omega_j = \sqrt{\lambda_j} > 0$.[8]

(ii) Derivando due volte rispetto al tempo la (4.3.2) ed usando $V''u_j = \lambda_j A u_j = \omega_j^2 A u_j$ si verifica subito che $q(t, c, \delta)$ è soluzione delle equazioni linearizzate qualunque siano $c = (c_1, \ldots, c_n)$ e $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Per mostrare che (4.3.2) è l'integrale generale basta allora mostrare che, assegnate comunque le condizioni iniziali $(q_0, \dot q_0)$, esiste una scelta di c e δ con $c_j \geq 0$ e $\delta_j \in [0, 2\pi)$ tale che $q(0; c, \delta) = q_0$ e $\dot q(0; c, \delta) = \dot q_0$; per questo, si usa il fatto che gli autovettori $u_1, \ldots, u_n$ formano una base per $\mathbb{R}^n$ (si può farlo per esercizio – vedere più sotto). ■

La (4.3.2) mostra che ogni soluzione $q(t) - q^*$ delle equazioni linearizzate è combinazione lineare di n speciali soluzioni periodiche
$$\cos(\omega_j t + \delta_j)\, u_j\,,$$
che sono chiamate *modi normali di oscillazione.* Le ω_j si chiamano *frequenze* delle piccole oscillazioni. Nel modo normale j–mo le n coordinate $(q_1, \ldots, q_n)$ oscillano tutte in fase, con frequenza ω_j, ma con ampiezze relative determinate dalle n componenti $(u_j^1, \ldots, u_j^n)$ del vettore u_j.

In una generica piccola oscillazione possono essere "eccitati" diversi modi normali; quali, e con quali ampiezze c_j e fasi δ_j, dipende dalle condizioni iniziali. Una generica piccola oscillazione (4.3.2) *non* è necessariamente periodica: come discusso più avanti, questo dipende dai rapporti fra le frequenze $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Esempio: Piccole oscillazioni di un pendolo doppio. Per comprendere il ruolo dei modi normali è indispensabile studiare qualche semplice esempio. Consideriamo il sistema mostrato in figura: due pendoli di uguali massa m e lunghezza l attaccati uno all'altro. Come coordinate Lagrangiane usiamo gli angoli φ_1 e φ_2 fra la verticale discendente ed i pendoli. L'energia potenziale è



$$V(\varphi_1, \varphi_2) \;=\; -mg(2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)\,.$$
Ci sono quattro (ovvi) equilibri, dei quali l'unico stabile è $(0, 0)$:
$$V''(0,0) \;=\; \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}$$

[8]Equivalentemente si potrebbe anche prendere $\omega_j = -\sqrt{\lambda_j}$: è solo una questione di preferenza; convenzionalmente, le ω_j si prendono tutte positive.

(si veda l'esercizio *4.2.2.iii*). L'energia cinetica è

$$T(\varphi_1, \varphi_2, \dot\varphi_1, \dot\varphi_2) \;=\; \frac{ml^2}{2}\Big[2\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot\varphi_1\dot\varphi_2\Big]\,.$$

Pertanto $T(0,0,\dot\varphi_1,\dot\varphi_2) = \frac{ml^2}{2}(2\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2 + 2\dot\varphi_1\dot\varphi_2)$ e la matrice cinetica nell'equilibrio $(0,0)$ è

$$A(0,0) \;=\; ml^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$V'' - \lambda A \;=\; ml\begin{pmatrix} 2(g-\lambda l) & -\lambda l \\ -\lambda l & g - \lambda l \end{pmatrix}.$$

Le due frequenze delle piccole oscillazioni sono allora $\omega_\pm = \sqrt{\lambda_\pm}$, ove λ_+ e λ_- sono le soluzioni di $\det(V'' - \lambda A) = 0$:

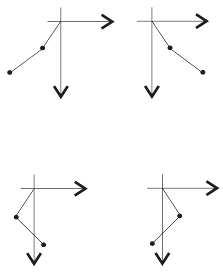
$$\omega_\pm^2 \;=\; (2 \pm \sqrt{2})\,\frac{g}{l}\,.$$

Determiniamo ora i due autovettori generalizzati $u^\pm = (u_1^\pm, u_2^\pm)$, che sono definiti da $(V'' - \lambda_\pm A)u_\pm = 0$. Naturalmente basta guardare una sola delle due equazioni scalari corrispondenti a questa equazione matriciale (siccome il determinante si annulla, esse non sono indipendenti). Per esempio, la prima dà $2(g - \lambda_\pm l)u_1^\pm = \lambda_\pm l u_2^\pm$ e così si trova

$$u_2^\pm \;=\; 2\,\frac{-1 \mp \sqrt{2}}{2 \pm \sqrt{2}}\,u_1^\pm \;=\; \mp\sqrt{2}\,u_1^\pm\,.$$

Dunque, se prendiamo (per esempio) $u_1^\pm = 1$ abbiamo $u^\pm = (1, \mp\sqrt{2})$. I due modi normali di oscillazione sono allora

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^+(t) \\ \varphi_2^+(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} c_+\,\cos(\omega_+ t + \delta_+)\,, \qquad \begin{pmatrix} \varphi_1^-(t) \\ \varphi_2^-(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} c_-\,\cos(\omega_- t + \delta_-)\,.$$

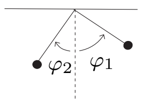


Si noti che, in ciascun modo normale, si muovono tutti e due i pendoli. I loro moti sono comunque facili da comprendere. Nel modo normale "$-$", i due pendoli si muovono con la stessa frequenza ed in fase: essi si allontanano assieme dall'equilibrio, si fermano assieme alla massima distanza, e tornano indietro assieme; solo, l'ampiezza dell'oscillazione di quello inferiore è un po' maggiore di quella del superiore ($\sqrt{2}$ volte). Nel modo normale "+", invece, i due pendoli si muovono ancora con la stessa frequenza ma in opposizione di fase: quando il pendolo superiore si allontana, quello inferiore si avvicina all'equilibrio, e viceversa.

L'integrale generale delle piccole oscillazioni è una combinazione lineare dei due modi normali:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t;c,\delta) &= c_+\,\cos(\omega_+ t + \delta_+) + c_-\,\cos(\omega_- t + \delta_-) \\ \varphi_2(t;c,\delta) &= -c_+\,\sqrt{2}\,\cos(\omega_+ t + \delta_+) + c_-\,\sqrt{2}\,\cos(\omega_- t + \delta_-)\,. \end{aligned}$$

Le costanti $c_+, c_-, \delta_+, \delta_-$ si determinano con le condizioni iniziali. Per esempio, se all'istante iniziale i due pendoli sono entrambi verticali discendenti e solo il secondo ha velocità non nulla, cioè $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \dot\varphi_1(0) = 0$ e $\dot\varphi_2(0) = w > 0$, allora si trova $c_\pm = \frac{w}{2\sqrt{2}\omega_\pm}$ e $\delta_\pm = \pm\pi/2$. (Verificarlo)



Esercizi 4.3.1 [9] (i) Determinare i modi normali di oscillazione di un sistema costituito da due pendoli di uguali massa e lunghezza, aventi lo stesso punto di sospensione, e uniti da una molla ideale.

(ii) Sappiamo che se l'energia potenziale ha un minimo quadratico, cioè $V''(q^*)$ è definita positiva, allora le frequenze ω_i sono tutte positive. Questa ipotesi è essenziale: se $V''(q^*)$ ha autovalori nulli allora alcune delle frequenze sono nulle e la soluzione

[9] Non c'è alcun motivo per cui negli esecizi gli autovettori $u_1, \ldots, u_n$ debbano essere presi A–ortonormali.

perde il carattere oscillatorio: compaiono termini secolari. Come esempio, si studi il semplice caso del sistema di energia cinetica $\frac{1}{2}m\dot{q}^2$ ed energia potenziale $V(q) = q^4$, $q \in \mathbb{R}$.

(iii) Studiare le piccole oscillazioni di un pendolo sferico attorno alla sua posizione di equlibrio stabile.

(iv) Succede qualcosa di speciale se, come nel caso dell'esercizio precedente, due delle frequenze delle piccole oscillazioni sono uguali?

(v)* In presenza di autovalori multipli, l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare può avere termini secolari, che crescono illimitatamente con t. Questo non succede invece nel caso delle piccole oscillazioni, purchè gli autovalori siano non nulli. Perchè?

(vi)* Esprimere le costanti di integrazione c_j e δ_j della (4.3.2) in termini delle condizioni iniziali q_0, $\dot{q}_0$.

B. Sistemi di oscillatori disaccoppiati. Vogliamo studiare adesso alcune proprietà qualitative delle piccole oscillazioni, in particolare la loro periodicità. Questa analisi è più semplice se effettuata in coordinate opportune, nelle quali le due matrici A e V'' siano entrambe diagonali. L'esistenza di queste coordinate è garantita dal teorema di diagonalizzazione simultanea: alla luce delle (4.2.7), coordinate di questo tipo si ottengono con il cambiamento lineare

$$\tilde{q} \;=\; U^{-1}(q - q^*)$$

ove U è la matrice le cui colonne $u_1, \ldots, u_n$ sono un sistema di autovettori A–ortonormali di $A^{-1}V''$. (Con l'occasione, si è anche fatta un'innocua ma comoda traslazione in modo da portare l'equilibrio nell'origine delle nuove coordinate). Siccome la Lagrangiana del sistema linearizzato nelle coordinate q è

$$L^*(q, \dot{q}) \;=\; \tfrac{1}{2}\dot{q} \cdot A(q^*)\,\dot{q} \;-\; \tfrac{1}{2}(q - q^*) \cdot V''(q^*)\,(q - q^*)\,,$$

la Lagrangiana nelle coordinate $\tilde{q}$ è

$$\begin{aligned}
\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \;&=\; L^*(U\tilde{q} + q^*, U\dot{\tilde{q}}) \\
&=\; \tfrac{1}{2}U\dot{\tilde{q}} \cdot A(q^*)U\dot{\tilde{q}} \;-\; \tfrac{1}{2}U\tilde{q} \cdot V''(q^*)U\tilde{q} \\
&=\; \tfrac{1}{2}\dot{\tilde{q}} \cdot [U^T A(q^*)U]\,\dot{\tilde{q}} \;-\; \tfrac{1}{2}\tilde{q} \cdot [U^T V''(q^*)\,U]\tilde{q}\,.
\end{aligned}$$

Usando $U^T A U = \mathbf{1}$, $U^T V'' U = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $\lambda_i = \omega_i^2$ e tornando a scrivere q invece di $\tilde{q}$ si trova dunque

$$\tilde{L}(q, \dot{q}) \;=\; \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q_i}^2 - \omega_i^2 q_i^2\right), \tag{4.3.3}$$

che è la Lagrangiana di n oscillatori armonici disaccoppiati di frequenze $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Ciascun oscillatore (o meglio, i moti nei quali un solo oscillatore si muove) corrisponde ad un modo normale di oscillazione.

Anche se la dinamica del sistema di Lagrangiana (4.3.3) è del tutto banale—ogni oscillatore se ne va per i fatti suoi—è comunque interessante studiarlo un po' più a fondo perchè questa situazione è in una certa misura tipica di tutti i sistemi integrabili. (Si veda il capitolo 6). Per semplicità, limitiamo l'analisi al caso di due soli oscillatori, cioè $n = 2$.

Proposizione 46 *Si consideri il sistema di Lagrangiana (4.3.3) per $n = 2$.*
(i) Se ω_1/ω_2 è razionale, allora tutti i moti del sistema sono periodici.

(ii) Se ω_1/ω_2 è irrazionale, allora nessun moto del sistema è periodico (eccetto ovviamente quelli in cui un oscillatore è in quiete).

Dimostrazione. Se escludiamo gli equilibri, i moti del primo oscillatore sono tutti periodici di periodo $T_1 = 2\pi/\omega_1$ e quelli del secondo sono tutti periodici di periodo $T_2 = 2\pi/\omega_2$. Dunque, il primo oscillatore ritorna allo stato iniziale agli istanti k_1T_1, $k_1 \in \mathbb{N}$, ed il secondo agli istanti k_2T_2, $k_2 \in \mathbb{N}$. Essi ritornano simultaneamente allo stato iniziale se e solo se esistono interi k_1 ed k_2 tali che $k_1T_1 = k_2T_2$, cioè $\omega_1/\omega_2 = k_2/k_1 \in \mathbb{Q}$. ■

I due oscillatori si chiamano *risonanti* se $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$, *nonrisonanti* altrimenti. Vogliamo ora studiare le proprietà dei moti nonrisonanti, che non sono periodici. A questo scopo, guardiamoli nello spazio degli atti di moto $\mathbb{R}^4 \ni (q, \dot{q})$.

Il sistema di Lagrangiana $\tilde{L}(q, \dot{q})$ ha ovviamente due integrali primi, le energie

$$E_1(q_1, \dot{q}_1) \;=\; \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \omega_1^2 q_1^2\right), \qquad E_2(q_2, \dot{q}_2) \;=\; \frac{1}{2}\left(\dot{q}_2^2 + \omega_2^2 q_2^2\right)$$

dei due oscillatori, che sono separatamente costanti. Dunque, nello spazio degli atti di moto $\mathbb{R}^4 \ni (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$, i moti del sistema devono appartenere agli insiemi di livello $\Sigma_{E_1E_2}$ di queste due funzioni, che sono (genericamente) superfici bidimensionali. Vogliamo capire come siano disposte le orbite su queste superfici.

Innanzittutto, dobbiamo capire come siano fatte, topologicamente, queste superfici. Questo non è difficile. Si osservi infatti che E_1 dipende solo da q_1 e $\dot{q}_1$ e, nel piano $(q_1, \dot{q}_1)$, le sue curve di livello sono diffeomorfe a cerchi se $E_1 > 0$ (in effetti, sono ellissi). Lo stesso avviene nel piano $(q_2, \dot{q}_2)$ per E_2. Dunque, un punto $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ appartiene alla superficie di livello di E_1 ed E_2 se e solo se le sue prime due coordinate e le sue seconde due coordinate appartengono a due cerchi; questo significa che tale punto appartiene al prodotto cartesiano dei due cerchi, cioè un toro bidimensionale. Formalizziamo ora questo argomento:

Proposizione 47 *Se $E_1 > 0$ ed $E_2 > 0$ allora $\Sigma_{E_1E_2}$ è diffeomorfa al toro $\mathbb{T}^2$. Un possibile diffeomorfismo $\Psi : \mathbb{T}^2 \to \Sigma_{E_1E_2}$ è dato da*

$$\Psi(\alpha_1, \alpha_2) \;=\; \Big(\frac{\sqrt{2E_1}}{\omega_1}\sin\alpha_1, \frac{\sqrt{2E_2}}{\omega_2}\sin\alpha_2, \sqrt{2E_1}\cos\alpha_1, \sqrt{2E_2}\cos\alpha_2\Big) \quad (4.3.4)$$

Dimostrazione. Dobbiamo costruire un diffeomorfismo fra la superficie

$$\Sigma_{E_1E_2} \;=\; \big\{(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \in \mathbb{R}^4 \;:\; \dot{q}_1^2 + \omega_1^2 q_1^2 = 2E_1\,,\; \dot{q}_2^2 + \omega_2^2 q_2^2 = 2E_2\big\}$$

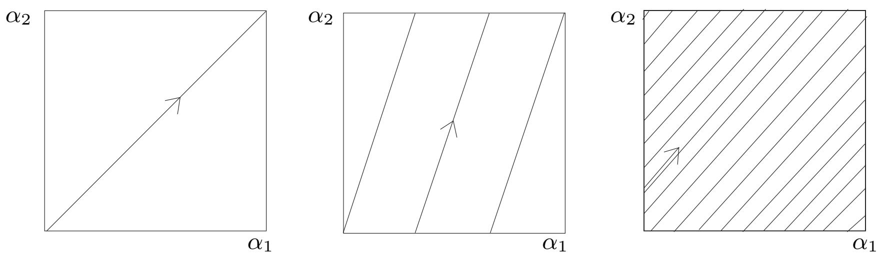
ed il toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. Per maggior chiarezza procediamo in due passi. Facciamo innanzittutto un riscalamento di coordinate e velocità nello spazio degli atti di moto:

$$x_i = \frac{\omega_i}{\sqrt{2E_i}} q_i\,, \qquad y_i = \frac{1}{\sqrt{2E_i}}\dot{q}_i\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

In questo modo, $\Sigma_{E_1E_2}$ è trasformato in

$$\Sigma \;=\; \big\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1^2 + y_1^2 = 1\,, x_2^2 + y_2^2 = 1\big\}\,.$$

[Questo non è altro che il prodotto $C \times C$ di due cerchi di raggio unitario in $\mathbb{R}^2$; ciascuno di essi è diffeomorfo ad S^1, il diffeomorfismo essendo $\alpha \in S^1 \mapsto$



Moti periodici e quasi–periodici sul toro

$(\sin\alpha, \cos\alpha) \in C$, si veda la sezione 3.8. Il prodotto di questi due diffeomorfismi fornisce il diffeomorfismo cercato:] La mappa $\psi : \mathbb{T}^2 \to \Sigma$ data da

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) \;=\; \big(\sin\alpha_1, \sin\alpha_2, \cos\alpha_1, \cos\alpha_2\big)$$

è un diffeomorfismo da $\mathbb{T}^2$ a Σ': essa è infatti biunivoca, differenziabile ed ha Jacobiano ovunque non nullo. Il diffeomorfismo Ψ è la composizione del riscalamento e di ψ. ■

Si osservi che $\Sigma_{E_1E_2}$ è immersa nello spazio degli atti di moto $\mathbb{R}^4$, *non* nello spazio fisico $\mathbb{R}^2$. Allora (α_1, α_2) sono coordinate su questa superficie, *non* nello spazio fisico. Non ha per esempio alcun senso scrivere la Lagrangiana in funzione di α_1 e α_2.

Scriviamo ora i moti del sistema che hanno luogo su $\Sigma_{E_1E_2}$ usando le coordinate (α_1, α_2). Si verfica suboto che, in coordinate $(q, \dot q) \in \mathbb{R}^2$, i moti di energia E dell'oscillatore armonico $\ddot q = -\omega^2 q$ sono dati da $q(t) = \sqrt{\frac{2E}{\omega}}\,\sin(\omega t + \delta)$, dove δ è una costante che specifica il dato iniziale. Per confronto con le (4.3.4) si riconosce allora subito che, in coordinate α_1 e α_2, i moti del sistema sono dati da

$$\alpha_1(t) \;=\; \alpha_1(0)+\omega_1 t \quad (\mathrm{mod} 2\pi)\,, \qquad \alpha_2(t) \;=\; \alpha_2(0)+\omega_2 t \quad (\mathrm{mod} 2\pi)\,. \tag{4.3.5}$$

Equivalentemente, le equazioni del moto dei due oscillatori sono

$$\dot\alpha_1 \;=\; \omega_1\,, \qquad \dot\alpha_2 \;=\; \omega_2\,.$$

Se raffiguriamo il toro come il quadrato di lato 2π con i lati opposti identificati, i moti (4.3.5) appaiono come moti lineari uniformi (con riflessione al bordo). Se invece raffiguriamo il toro come una ciambella, essi vi si avvolgono attorno. La figura illustra i casi semplici in cui $\omega_1/\omega_2 = 1, 3$ ed il moto è periodico e, un po' figurativamente, un caso in cui invece ω_1/ω_2 è irrazionale (ma prossimo ad 1); in quest'ultimo caso il moto non è periodico e l'orbita non si chiude: tale moto si chiama *quasi–periodico*. La figura suggerisce che tale moto "riempa" tutto il toro: questa idea è resa precisa dalla seguente Proposizione:

Proposizione 48 *Se ω_1/ω_2 è irrazionale allora i moti (4.3.5) sono densi in $\mathbb{T}^2$.*

Dimostrazione. Basta mostrare che ogni orbita interseca in un insieme denso ogni cerchio $\alpha_1 =$ cost. (In questo modo, invece di seguire il moto (4.3.5) per ogni t, lo guardiamo "stroboscopicamente"). Fissiamo dunque un cerchio $\alpha_1 =$ cost. Siccome la coordinata α_1 avanza con velocità costante ω_1, ogni orbita riattraversa questo cerchio periodicamente, ogni $T = 2\pi/\omega_1$. Siccome anche la coordinata α_2 avanza con velocità costante ω_2, se un punto di intersezione ha coordinata $\alpha_2 = x$, l'intersezione successiva ha coordinata $\alpha_2 = x + T\omega_1 = x + 2\pi\omega_2/\omega_1$. Dunque, le intersezioni fra orbita e cerchio si ottengono per iterazione della mappa

$$\Psi \ : \ S^1 \ \to \ S^1 \, , \qquad \Psi(x) \ = \ x + 2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (\mathrm{mod} 2\pi) \, .$$

Indichiamo $\Psi^2 = \Psi \circ \Psi$ etc, cosicché $\Psi^n(x) = x + 2\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}n$ (mod2π). Siccome l'orbita non è periodica, i punti

$$x \, , \ \Psi(x) \, , \ \Psi^2(x) \, , \ \Psi^3(x) \, , \ \ldots$$

sono tutti distinti e formano dunque una successione infinita che, per la compattezza del cerchio, ha almeno un punto di accumulazione. (Questo è già qualcosa, ma non basta: vogliamo far vedere che l'orbita passsa vicino quanto si vuole ad *ogni* punto del cerchio.) Di conseguenza, per ogni $\epsilon > 0$ esistono degli interi positivi n, m con $n > m$ tali che

$$0 \ < \ \mathrm{dist}\big(\Psi^n(x), \Psi^m(x)\big) \ < \ \epsilon \, . \tag{4.3.6}$$

(La distanza di due punti del cerchio di coordinate x ed y è $\min(|y-x|, |y-x-\pi|)$.) Osserviamo ora che la mappa Ψ, essendo una traslazione, non muta le distanze: $\mathrm{dist}(\Psi(x), \Psi(y)) = \mathrm{dist}(x, y)$ per tutti gli x ed y. Lo stesso è allora vero per le sue iterate e dunque la (4.3.6) implica

$$0 \ < \ \mathrm{dist}\big(\Psi^{n-m}(x), x\big) \ < \ \epsilon \, .$$

Sia ora $d = \mathrm{dist}\big(\Psi^{n-m}(x), x\big)$. Allora i primi $[2\pi/d] + 1$ punti della successione $x, \Psi^{(n-m)}(x), \Psi^{2(n-m)}(x), \ldots$ suddividono S^1 in intervalli di lunghezza minore di d. Dunque ogni punto di S^1 si trova a distanza minore di d, e dunque minore di ϵ, da un punto dell'orbita. ■

Esercizi 4.3.2 (i) Mostrare che se una sola delle due energie è nulla allora la superficie di livello $\Sigma_{E_1 E_2}$ è diffeomorfa ad un cerchio e se entrambe sono nulle allora essa è un punto.

(ii) *Figure di Lissajous.* Si studino le traiettorie di due oscillatori disccoppiati nello *spazio delle configurazioni* $\mathbb{R}^2 \ni (q_1, q_2)$.

1. Mostrare che tale curva resta all'interno di un rettangolo.
2. Studiare la forma della traiettoria al variare del rapporto fra le frequenze e della differenza di fase. (È molto facile farlo "sperimentalmente" con un computer, o con un oscilloscopio. Si veda anche, per esempio, Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica* (Editori Riuniti).
3. Mostrare che, se ω_1/ω_2 è irrazionale, allora la traiettoria riempie densamente il rettangolo del punto 1.

(iii) Mostrare che un sistema di n oscillatori disaccoppiati con frequenze $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ non nulle ha tutti i moti periodici se e solo se per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha $\omega_j = kn_j$ con $k \in \mathbb{R}$ ed $n_j \in \mathbb{Q}$.

4.4 Simmetrie: integrali primi e riduzione

Ci occupiamo adesso delle simmetrie di un sistema Lagrangiano, considerando il caso una generica Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, non necessariamente di tipo meccanico. Questa analisi conduce a due risultati molto importanti. Il primo è il teorema di Nöther, che stabilisce che ad ogni simmetria (di un certo tipo) di un sistema Lagrangiano corrisponde un integrale primo. Questa è un'idea guida che permea molti campi della Fisica Teorica. Il secondo è l'idea di riduzione: in presenza di simmetrie (di un certo tipo) si può "ridurre" lo studio del sistema a quello di un sistema più semplice, con meno gradi di libertà. Il punto di partenza di questa analisi è l'azione di un gruppo che lascia invariato il sistema.

A. Azioni di Gruppi. Cominciamo con l'introdurre la nozione di *azione*[10] dei gruppi (additivi) $\mathbb{R}$ ed S^1, che generalizza i casi familiari di traslazioni e rotazioni in $\mathbb{R}^3$.

Definizione: *Si dice che una mappa differenziabile*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,, \qquad (\alpha, q) \mapsto \varphi(\alpha, q) \equiv \varphi_\alpha(q)$$

è un'azione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^n$ se
(AG1) $\varphi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è l'identità.
(AG2) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo.
(AG3) Per tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$.
In modo del tutto analogo si definisce un'azione di S^1 su $\mathbb{R}^n$.

Esempi: (i) Le traslazioni lungo un asse coordinato, per esempio il primo

$$\varphi_\alpha \ : \ (q_1, q_2, \ldots, q_n) \mapsto (q_1 + \alpha, q_2, \ldots, q_n)\,, \tag{4.4.1}$$

sono un'azione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^n$.

(ii) Le rotazioni in $\mathbb{R}^3$ attorno ad un asse fissato passante per l'origine

$$\varphi_\alpha \ : \ q \mapsto R_\alpha q \tag{4.4.2}$$

sono un'azione di $\mathbb{R}$ (oppure di S^1, a causa della periodicità rispetto ad α) su $\mathbb{R}^3$. Qui R_α è la matrice di rotazione di angolo α attorno all'asse scelto.

(iii) Il flusso di un'equazione differenziale $\dot q = \xi(q)$, $q \in \mathbb{R}^n$, è un'azione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^n$ (o di S^1, se tutte le orbite sono periodiche).

L'ultimo esempio è tipico, nel senso che *ogni* azione di $\mathbb{R}$ o di S^1 su $\mathbb{R}^n$ è il flusso di un campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$. Questo campo vettoriale si chiama *generatore infinitesimo* dell'azione ed è definito nel modo seguente:

$$\xi(q) \ := \ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(0, q)\,.$$

(Mostrare che $\Phi^\xi_\alpha = \varphi_\alpha$ per ogni α è un semplice esercizio sulla definizione di flusso.)

Esercizi 4.4.1 (i) Verificare che il generatore infinitesimo delle traslazioni (4.4.1) è il campo costante

$$\xi(q) \ = \ (1, 0, \ldots, 0)\,.$$

(ii) Mostrare che se l'asse di rotazione è parallelo al versore $a = (a_1, a_2, a_3)$, allora

$$R_\alpha \ = \ \exp(\alpha\, A)$$

ove A è la matrice antisimmetrica corrispondente ad a, tale cioè che $Aq = a \times q$ per ogni $q \in \mathbb{R}^3$. Dedurne che il generatore infinitesimo delle rotazioni (4.4.2) è

$$\xi(q) \ = \ a \times q\,.$$

[10] Si usa anche (soprattutto nella letteratura fisica) l'espressione *gruppo ad un parametro di trasformazioni.*

(iii) Determinare il generatore infinitesimo delle traslazioni lungo un'assegnata direzione e in $\mathbb{R}^n$.

(iv)* Provare l'affermazione precedente: ogni azione di $\mathbb{R}$ è il flusso del suo generatore infinitesimo.

(v) Per ogni q fissato, la curva $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(q)$ si chiama *orbita* dell'azione φ. Mostrare che le orbite di un'azione sono le orbite del flusso del suo generatore infinitesimo.

B. Sollevamento dell'azione. Estendiamo adesso l'azione dallo spazio delle configurazioni a quello degli atti di moto. Del tutto in generale, dato un diffeomorfismo $q \mapsto \mathcal{C}(q)$ dello spazio delle configurazioni, c'è un modo naturale di estenderlo ad un diffeomorfismo $(q, \dot{q}) \mapsto \big(\mathcal{C}(q), \mathcal{D}(q, \dot{q})\big)$ dello spazio degli atti di moto che soddisfa il requisito di 'mandare velocità in velocità'. Precisamente, si richiede che $\mathcal{D}$ mandi i vettori velocità di una qualunque curva $t \mapsto q^t$ nei vettori velocità della curva immagine $t \mapsto \mathcal{C}(q^t)$. Ora

$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}_i(q^t) \;=\; \sum_j \frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial q_j}(q^t)\dot{q}^t_j \;=\; \Big[\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q}(q^t)\dot{q}^t\Big]_i .$$

Uguagliando questa espressione a $\mathcal{D}(q^t, \dot{q}^t)$ si trova $\mathcal{D}(q, \dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q}(q)\dot{q}$. La mappa

$$(q, \dot{q}) \mapsto \Big(\mathcal{C}(q), \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q}(q)\dot{q}\Big)$$

si chiama il sollevamento di $q \mapsto \mathcal{C}(q)$.

Esercizi 4.4.2 (i) Mostrare che il sollevamento di una traslazione $q \mapsto q + e$, ove e è un vettore costante, è $(q, \dot{q}) \mapsto (q + e, \dot{q})$.

(ii) Sia A una matrice $n \times n$. Mostrare che il sollevamento della mappa lineare $q \mapsto Aq$ è $(q, \dot{q}) \mapsto (Aq, A\dot{q})$.

(iii)* Mostrare che il sollevamento $\widehat{\varphi}_\alpha(q, \dot{q}) = \Big(\varphi_\alpha(q), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q)\dot{q}\Big)$ di un'azione φ su $\mathbb{R}^n$ è un'azione su $\mathbb{R}^{2n}$.

C. Teorema di Nöther. Consideriamo ora un sistema di Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ ed un'azione φ sullo spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^n \ni q$. Si dice che L è *invariante sotto l'azione* φ se

$$L\Big(\varphi_\alpha(q), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q)\,\dot{q}\Big) \;=\; L\big(q, \dot{q}\big) \qquad \forall \alpha, q, \dot{q}$$

(ovvero se è costante lungo le orbite del sollevamento dell'azione).

Proposizione 49 (Teorema di Nöther) *Se la Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ è invariante sotto l'azione φ, allora le equazioni di Lagrange per L hanno l'integrale primo*

$$I(q, \dot{q}) \;:=\; \xi(q) \cdot p(q, \dot{q}) \tag{4.4.3}$$

ove ξ è il generatore infinitesimo dell'azione e $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ è il vettore dei momenti coniugati alle q.

Dimostrazione. Consideriamo un moto $t \mapsto q_t$ del sistema di Lagrangiana $L(q, \dot{q})$. L'invarianza di L implica che, per ogni t ed ogni α, si ha

$$0 \;=\; \frac{d}{d\alpha}\, L\Big(\varphi_\alpha(q_t), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t)\,\dot{q}_t\Big)$$

ovvero, siccome, $\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q}(q_t)\,\dot q_t = \frac{d}{dt}\varphi_\alpha(q_t)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha}\,L\Big(\varphi_\alpha(q_t), \frac{d}{dt}\varphi_\alpha(q_t)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{\partial L}{\partial q_j}\,\frac{\partial\varphi^j}{\partial\alpha}(q_t) \;+\; \frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{d}{dt}\big[\varphi^j_\alpha(q_t)\big]\Big] \end{aligned}$$

ove le derivate di L sono naturalmente calcolate in $\big(\varphi_\alpha(q_t), \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q}(q_t)\,\dot q_t\big)$. Scambiando l'ordine delle derivate di φ_α rispetto a t e ad α, calcolando il tutto per $\alpha = 0$ e ricordando la definizione del generatore infinitesimo ξ, abbiamo infine (essendo $\varphi_0(q) = q$ e $\frac{\partial\varphi_0}{\partial q}(q)\,\dot q = \dot q$)

$$\sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{\partial L}{\partial q_j}(q_t,\dot q_t)\,\xi^j(q_t) \;+\; \frac{\partial L}{\partial\dot q_j}(q_t,\dot q_t)\,\frac{d}{dt}\,\xi^j(q_t)\Big] \;=\; 0\,.$$

Siccome il moto $t \mapsto q_t$ soddisfa le equazioni di Lagrange, nell'equazione precedente si ha $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q}$ e così essa dà

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}(q_t,\dot q_t)\xi^j(q_t) \;=\; 0$$

ciò che prova l'asserto. ∎

L'integrale primo (4.4.3) si chiama *momento* dell'azione. Al di là del suo interesse concettuale, il teorema di Nöther è utile anche in pratica: a volte si dimostra, o addirittura si riconosce a vista, che un certo sistema è invariante sotto una certa azione e si può allora concludere che vi è un integrale primo.

Esempi:

(i) La Lagrangiana $L(q,\dot q) = \frac{1}{2}m|\dot q|^2$ di una particella libera in $\mathbb{R}^3$ è invariante per traslazioni lungo una qualunque direzione e: $L(q+\alpha e, q) = L(q,$
$dotq)$. L'integrale primo $p\cdot\xi = m\dot q\cdot e$ è la componente della quantità di moto nella direzione e.

(ii) La Lagrangiana $L = \frac{1}{2}m|\dot q|^2 - V(|q|)$ di una particella in campo centrale, scritta in coordinate cartesiane, è invariante per rotazioni attorno ad un qualunque asse a. Infatti, il sollevamento dell'azione è $(q,\dot q) \mapsto (R_\alpha q, R_\alpha\dot q)$ con R_α ortogonale, e le matrici ortogonali preservano la norma. Siccome il generatore infinitesimo è $\xi(q) = a\times q$, l'integrale primo corrispondente è $m\dot q\cdot(a\times q) = ma\cdot q\times\dot q$, cioè la componente del momento angolare lungo l'asse a. Per l'arbitrarietà di a, questo implica che si conserva la componente del momento angolare lugno ogni asse, cioè il *vettore* momento angolare.

(iii) La Lagrangiana di una particella carica in un campo magnetico costante, scritta in coordinate cartesiane, è

$$L(q,\dot q) \;=\; \frac{1}{2}\,m|\dot q|^2 - \frac{1}{2}\,e\dot q\cdot B\times q\,.$$

Mostriamo che essa è invariante per rotazioni attorno a B, ovvero che $L(q,\dot q) = L(Rq, R\dot q)$ qualunque sia la matrice di rotazione R di asse B. L'energia cinetica è infatti invariante per rotazioni attorno ad ogni asse mentre per il potenziale generalizzato si calcola

$$R\dot q\cdot B\times Rq \;=\; R\dot q\cdot(RB)\times Rq \;=\; R\dot q\cdot R(B\times q) \;=\; \dot q\cdot(B\times q)$$

dove si sono usati il fatto che $RB = R$ visto che B è l'asse di rotazione ed il fatto che ogni matrice di rotazione R è tale che $R(u\times v) = (Ru)\times(Rv)$ e $Ru\cdot Rv = u\cdot v$ per ogni coppia di vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$. Siccome $p = m\dot q - \frac{1}{2}eB\times q$ ed il generatore infinitesimo delle rotazioni attorno a B è $\frac{B}{|B|} \times q$, l'integrale primo corrispondente è (a parte l'irrilevante fattore costante $|B|$)

$$mq \times \dot{q} \cdot B - \frac{1}{2} e|B \times q|^2 .$$

(iv) *Coordinate ignorabili.* Una Lagrangiana che non dipenda da una delle coordinate, per esempio q_n, è invariante sotto le traslazioni lungo q_n, $\varphi_\alpha(q_1, \dots, q_{n-1}, q_n + \alpha)$. Infatti, $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q} = \mathbf{1}$ e così il sollevamento dell'azione è in questo caso

$$\alpha \ \mapsto \ (q_1, \dots, q_{n-1}, q_n + \alpha, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n) .$$

Siccome il generatore infinitesimo è $(0, \dots, 0, 1)$, l'integrale primo corrispondente è il momento p_n coniugato a q_n, come già si sapeva dalla sezione 1.D. Questo esempio può sembrare banale, ma è in realtà tipico: se vi è una simmetria si cerca infatti di scegliere le coordinate lagrangiane in modo che una di esse sia ignorabile.

Esercizi 4.4.3 (i) Il sistema dell'esempio (iii) è invariante anche per traslazioni lungo qualche direzione? Qual è l'integrale primo corrispondente?

(ii) Il pendolo sferico, cioè un punto vincolato alla superficie di una sfera e soggetto alla forza peso, è intuitivamente invariante per rotazioni attorno alla verticale e ci si aspetta che l'integrale primo corrispondente sia la componente del momento angolare lungo quell'asse. Dimostrarlo.

(iii) Una particella in $\mathbb{R}^3$ è soggetta a forze conservative la cui energia potenziale è invariante sotto l'azione z

$$\varphi_\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega\alpha & -\sin\omega\alpha & 0 \\ \sin\omega\alpha & \cos\omega\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha D \end{pmatrix}$$

ove ω e D sono costanti positive (simmetria elicoidale). Determinare l'integrale primo corrispondente. [Nota: è sottointeso che $x = (x_1, x_2, x_3)$ siano coordinate cartesiane. Perchè è importante specificarlo?]

(iv) Una particella libera carica si muove in un campo magnetico il cui potenziale vettore A è invariante per traslazioni lungo l'asse $e_3 = (0, 0, 1)$. Determinare l'integrale primo corrispondente.

(v) Si mostri che la Lagrangiana del problema dei due corpi è invariante per

- traslazioni di entrambe le particelle lungo una qualunque direzione, e
- rotazioni di entrambe le particelle attorno ad un qualunque asse.

Determinare gli integrali primi corrispondenti.

(vi)* Il teorema di Nöther si estende al caso di Lagrangiana dipendendente dal tempo? Provare a formularlo e a dimostrarlo.

D. Simmetrie e coordinate ignorabili. Si è già osservato che l'esistenza di una coordinata ignorabile riflette l'invarianza del sistema sotto un'azione di gruppo. Mostriamo adesso che, viceversa, se un sistema Lagrangiano è invariante sotto un'azione di gruppo allora è (quasi) sempre possibile scegliere le coordinate, almeno localmente, in modo che una di esse sia ignorabile:

Proposizione 50 *Sia L una Lagrangiana invariante sotto un'azione φ di $\mathbb{R}$ od S^1 su $\mathbb{R}^n$. Se il generatore infinitesimo di φ è non nullo in un punto q^*, $\xi(q^*) \neq 0$, allora in un intorno di q^* esistono delle coordinate $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n)$ tali che una di esse è ignorabile per L.*

Dimostrazione. Segue dal teorema di rettificazione locale delle equazioni differenziali ordinarie che in un intorno di q^* esistono delle coordinate $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n)$ nelle quali il flusso di ξ, cioè l'azione φ_α, è la traslazione di una coordinata, per esempio $\tilde{q}_n$:

$$\alpha \ \mapsto \ (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n + \alpha) .$$

Scritta in queste coordinate, la Lagrangiana è allora invariante per traslazioni di $\tilde{q}_n$, cioè è indipendente da $\tilde{q}_n$. ■

Osservazioni: (i) Se q_n è la coordinata ignorabile, allora le orbite dell'azione sono date da $q_1, \dots, q)n - 1 =$ cost e q_n è una coordinata lungo di esse.

(ii) L'esistenza di una coordinata ignorabile non è garantita solo vicino ai punti nei quali si annulla il generatore infinitesimo dell'azione. Essi sono i punti fissi dell'azione ($\varphi_a(q) = q$ per ogni α) e dunque orbite 'singolari' dell'azione.

(iii) Nel caso di gruppi di simmetria di dimensione maggiore di 1 non è in generale possibile costruire, neppure localmente, un sistema di coordinate nel quale vi sia più di una coordinata ignorabile. Per esempio, il gruppo delle rotazioni ha dimensione 3, ma non è possibile scegliere le coordinate lagrangiane in modo che tre, e di fatto neppure due, di esse siano ignorabili. L'eccezione, molto speciale, è il caso di gruppi abeliani. Naturalmente, è sempre possibile restringersi a sottogruppi unidimensionali ed ottenere corrispondentemente una coordinata ignorabile.

E. Riduzione alla Routh. Supponiamo che un sistema Lagrangiano sia invariante sotto un'azione φ di $\mathbb{R}$ od S^1 e che si possano scegliere le coordinate, almeno localmente, in modo che una di esse, per esempio q_n, sia ignorabile. (Come spiegato nella sottosezione precedente, questo è sempre possibile, almeno localmente, eccetto vicino agli eventuali punti fissi dell'azione).

In questo caso, nel quale vi è una coordinata q_n ignorabile, l'integrazione del problema può essere ridotta all'integrazione di un nuovo sistema Lagrangiano nel quale la coppia di coordinate $(q_n, \dot{q}_n)$ non compare, ed ha dunque $n-1$ gradi di libertà. Questo procedimento, che si chiama *riduzione alla Routh*, vale di fatto per qualunque numero di coordinate ignorabili ed è un efficace metodo di integrazione di molti problemi.

Per questa analisi è necessario assumete qualcosa di più del solo fatto che la matrice $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}$ sia invertibile. Per esempio basta che essa sia, come nel caso meccanico, definita positiva. Assumeremo che sia così. È invece del tutto irrilevante che la Lagrangiana dipenda o meno dal tempo; assumeremo che non vi dipenda per sola semplicità di notazione (se non è così basta inserire ovunque la variabile t).

Per alleggerire la notazione denotiamo con ξ la coordinata ignorabile e con $Q = (Q_1, \dots, Q_{n-1})$ le altre coordinate. La Lagrangiana è allora

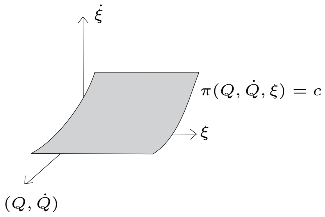
$$L(Q, \dot{Q}, \dot{\xi})$$

ed il momento π coniugato alla coordinata ignorabile,

$$\pi(Q, \dot{Q}, \dot{\xi}) \;:=\; \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}(Q, \dot{Q}, \dot{\xi}),$$

è un integrale primo. Dunque, nello spazio degli atti di moto $(Q, \xi, \dot{Q}, \dot{\xi})$, il moto del sistema ha luogo su uno degli insiemi di livello della funzione π. Questi insiemi di livello hanno due proprietà che giocano un ruolo importante:

- Sono invarianti per traslazioni nella direzione ξ.
- Sono superfici regolari di dimensione $2n-1$ sulle quali si possono (almeno localmente) usare come coordinate $Q, \dot{Q}, \xi$.



Il primo fatto è ovvio, visto che π non dipende da ξ. Il secondo segue dall'ipotesi che la matrice $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}$ sia definita positiva: $\frac{\partial \pi}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\xi} \partial \dot{\xi}}$ è un minore principale di questa matrice ed è allora non nullo. Di conseguenza l'equazione $\pi(Q, \dot{Q}, \dot{\xi}) = c$ può essere risolta (almeno localmente) rispetto a $\dot{\xi}$:

$$\dot{\xi} \;=\; u(Q, \dot{Q}, c) \tag{4.4.4}$$

con qualche funzione u. Questo assicura che gli insiemi di livello di π sono sottovarietà regolari di dimensione $2n-1$ e che, anzi, ciascuno di essi può essere (almeno localmente) descritto come grafo di una funzione

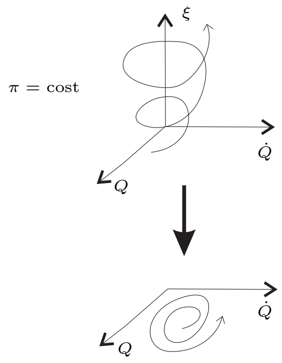
$$U_c \;:\; (Q, \dot{Q}, \xi) \;\mapsto\; U_c(Q, \dot{Q}, \xi)\,.$$

In effetti, $U_c(Q, \dot{Q}, \xi) = u(Q, \dot{Q}, c)$ (il fatto che questa funzione sia indipendente da ξ riflette l'invarianza per traslazioni nella direzione ξ della superficie). In altre parole, $(Q, \dot{Q}, \xi)$ sono coordinate locali sugli insiemi di livello di π.

Siccome le superfici di livello di π sono invarianti, una volta fissato il valore di π si possono descrivere i moti usando le coordinate $(Q, \dot{Q}, \xi)$. In pratica, si può usare la (4.4.4) per eliminare $\dot{\xi}$ dalle equazioni di Lagrange per Q, che sono certe equazioni del secondo ordine $\ddot{Q} = Y(Q, \dot{Q}, \dot{\xi})$. Ora il fatto centrale è che, siccome la coordinata ξ non compare in tali equazioni, quel che resta è un'equazione del secondo ordine per le sole Q, parametrizzata dal valore c di π sulla superficie: $\ddot{Q} = X_c(Q, \dot{Q})$. Ci si è così ridotti a dover studiare un sistema 'ridotto' con un grado di libertà in meno.

Se si è capaci di determinare una soluzione $t \mapsto Q_t$ del sistema ridotto si può poi 'ricostruire' il moto della coordinata ξ osservando che la conservazione del momento π implica che $Q_t, \dot{Q}_t, \xi_t$ soddisfano ad ogni istante la (4.4.4) e dunque, integrando, si trova

$$\xi_t \;=\; \xi_0 \;+\; \int_0^t u(Q_s, \dot{Q}_s, c)\, ds\,. \tag{4.4.5}$$



Osservazione: Lo spazio delle fasi del sistema ridotto non è propriamente un sottospazio dello spazio delle fasi del sistema originale. L'indipendenza di π da ξ significa che i suoi insiemi di livello sono il prodotto (cartesiano) di un insieme nel sottospazio $(Q, \dot{Q})$ e di *tutto* il sottospazio delle ξ. L'ignorazione della coordinata ξ equivale dunque ad una *proiezione* dall'insieme di livello di π ad uno spazio con una dimensione in meno, e coordinate $(Q, \dot{Q})$. Si noti che questa proiezione dipende dal valore di π. Il fatto che le equazioni di Lagrange non dipendano da ξ assicura che la loro proiezione sia ancora un'equazione differenziale sullo spazio ridotto. In termini geometrici, quel che si sta facendo è un *quoziente* sulle orbite dell'azione φ. Questo punto di vista, che è generalizzabile al caso di gruppi di dimensione maggiore, verrà ripreso nel capitolo 7.

Questa è però solo una parte della storia. Quello che avviene, infatti, è che il sistema ridotto è ancora lagrangiano, con una 'Lagrangiana ridotta' che dipende da c ed è data da

$$L_c^R(Q, \dot{Q}) \;:=\; \Big[L(Q, \dot{Q}, \dot{\xi}) \;-\; c\,\dot{\xi}\Big]_{\dot{\xi}=u(Q,\dot{Q},c)}\,.$$

Si ha infatti

Proposizione 51 *Si supponga che* $\frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$ *e che* $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}$ *sia definita positiva. Allora* $t \mapsto (Q_t, \xi_t)$ *è soluzione delle equazioni di Lagrange per la Lagrangiana* $L(Q, \dot{Q}, \dot{\xi})$ *con dato iniziale* $(Q_0, \xi_0, \dot{Q}_0, \dot{\xi}_0)$ *se e solo se, posto* $c = \pi(Q_0, \dot{Q}_0, \dot{\xi}_0)$, $t \mapsto Q_t$ *è soluzione delle equazioni di Lagrange per* $L_c^R(Q, \dot{Q})$ *con dato iniziale* $(Q_0, \dot{Q}_0)$ *e* $t \mapsto \xi_t$ *è data da (4.4.5).*

Dimostrazione. Calcoliamo le derivate di L_c^R. Usando la regola a catena troviamo

$$\frac{\partial L_c^R}{\partial Q_i}(Q, \dot{Q}) \;=\; \frac{\partial}{\partial Q_i}\Big[L\big(Q, \dot{Q}, u(Q, \dot{Q}, c)\big) - c\, u(Q, \dot{Q}, c)\Big]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial L}{\partial Q_i}\big(Q,\dot Q,u(Q,\dot Q,c)\big) \;+\; \Big[\frac{\partial L}{\partial \dot\xi}\big(Q,\dot Q,u(Q,\dot Q,c)\big) - c\Big]\frac{\partial u}{\partial Q_i}(Q,\dot Q,c)\\
&= \frac{\partial L}{\partial Q_i}\big(Q,\dot Q,u(Q,\dot Q,c)\big)
\end{aligned}
$$

perchè, in virtù della definizione della funzione u:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\xi}(Q,\dot Q,u(Q,\dot Q,c)) \;=\; \pi(Q,\dot Q,u(Q,\dot Q,c)) \;=\; c\,.$$

In modo del tutto analogo troviamo

$$\frac{\partial L^R_c}{\partial \dot Q_i}(Q,\dot Q) \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot Q_i}\big(Q,\dot Q,u(Q,\dot Q,c)\big)\,.$$

Queste uguaglianze implicano che, se $t\mapsto(Q_t,\xi_t)$ è una qualunque curva tale che $\pi(Q_t,\dot Q_t,\xi_t)=c$, ovvero $\dot\xi_t=u(Q_t,\dot Q_t,c)$, allora si ha

$$\frac{\partial L^R_c}{\partial Q_i}(Q_t,\dot Q_t) \;=\; \frac{\partial L}{\partial Q_i}\big(Q_t,\dot Q_t,\dot\xi_t\big)\,, \qquad \frac{\partial L^R_c}{\partial \dot Q_i}(Q_t,\dot Q_t) \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot Q_i}\big(Q_t,\dot Q_t,\dot\xi_t\big)$$

per tutti i t e dunque anche

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial L^R_c}{\partial \dot Q_i}(Q_t,\dot Q_t)\Big] \;-\; \frac{\partial L^R_c}{\partial Q_i}(Q_t,\dot Q_t)\\
&\qquad = \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot Q_i}\big(Q_t,\dot Q_t,\dot\xi_t\big)\Big] \;-\; \frac{\partial L}{\partial Q_i}\big(Q_t,\dot Q_t,\dot\xi_t\big)\,. \qquad (4.4.6)
\end{aligned}
$$

Quest'ultima uguaglianza mostra che, se $t\mapsto(Q_t,\xi_t)$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange per L, allora $t\mapsto Q_t$ è soluzione di quelle per L^R_c, con il giusto valore di c. Sappiamo già che, inoltre, $t\mapsto\xi_t$ soddisfa (4.4.4).

Viceversa, se $t\mapsto Q_t$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange per L^R_c e $t\mapsto\xi_t$ soddisfa (4.4.4) allora $\dot\xi_t=u(Q_t,\dot Q_t,c)$. Dunque (4.4.6) vale ed implica che $t\mapsto(Q_t,\xi_t)$ è soluzione delle equazioni di Lagrange per L. ■

Si vede così che il problema di integrare le equazioni di Lagrange per la Lagrangiana $L(Q,\dot Q,\dot\xi)$ si riduce a quello di integrare le equazioni del moto di un sistema Lagrangiano "ridotto" con un grado di libertà in meno, e dipendente dalle condizioni iniziali tramite il valore del momento conservato. Se si è capaci di determinare il moto delle Q, la determinazione del moto della coordinata ignorabile ξ si riduce poi al calcolo di un integrale.

Vi è una immediata generalizzazione del procedimento di riduzione al caso nel quale vi siano più coordinate ignorabili. Siano $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_m)$ per qualche $m<n$ le coordinate ignorabili, $\pi=(\pi_1,\dots,\pi_m)$ i corrispondenti momenti conservati, e $Q=(Q_1,\dots,Q_{n-m})$ le altre coordinate, cosicché la Lagrangiana è $L(Q,\dot Q,\dot\xi)$. Il moto del sistema ha luogo su una delle superfici di livello di π. Se, come prima, assumiamo che $\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q\partial\dot q}$ sia ovunque definita positiva allora

$$\det\frac{\partial\pi}{\partial\dot\xi} \;=\; \det\frac{\partial^2 L}{\partial\dot\xi\partial\dot\xi}\neq 0 \qquad \text{(ovunque)}\,.$$

Questo assicura che le superfici di livelo di π abbiano dimensione $2n-m$ e che le $\pi(Q,\dot Q,\dot\xi)=\text{cost}$ si possano invertire per ottenere $\dot\xi \;=\; u(Q,\dot Q,\pi)$. La Lagrangiana ridotta è ora

$$L^R_c(Q,\dot Q) \;=\; \Big[L(Q,\dot Q,\dot\xi) \;-\; \sum_{j=1}^m c_j\,\dot\xi_j\Big]_{\xi=u(Q,\dot Q,c)}\,.$$

Come prima, se $t \mapsto (Q_t, \xi_t)$ è soluzione del sistema completo allora $t \mapsto Q_t$ è soluzione del sistema ridotto e $t \mapsto \xi_t$ è dato da (4.4.5). La dimostrazione di questo fatto è identica a quella della Proposizione 51.

Esercizi 4.4.4 (i) *Punto in campo centrale piano.* Se si usano coordinate polari, l'angolo φ è ignorabile. Scrivere la Lagrangiana ridotta.

(ii) *Due corpi.* Si scriva la Lagrangiana del sistema costituito da due punti materiali P_1 e P_2 interagenti con forze di energia potenziale $V(|P_1 - P_2|)$. Si usino come coordinate lagrangiane le coordinate del centro di massa e le componenti del vettore $P_2 - P_1$. Usando il metodo di Routh, mostrare che il problema si riduce al problema ad un corpo con la massa ridotta. (Si veda anche la sezione 4.2)

(iii) *Calcolo della Lagrangiana ridotta.* Consideriamo la Lagrangiana di tipo meccanico $L = T_2 + T_1 + T_0 - V$, con coordinata ignorabile ξ, e scriviamola nella forma

$$L \;=\; \hat{T}_2 + \hat{T}_1 + \hat{T}_0 - V$$

ove $\hat{T}_2$ contiene tutti i termini quadratici nelle velocità "ignorabili" $\dot{\xi}$, $\hat{T}_1$ tutti i termini lineari nelle $\dot{\xi}$, e $\hat{T}_0$ contiene tutto ciò che resta. Si mostri che

$$L_c^R \;=\; \Big[\hat{T}_0 - \hat{T}_2 - V\Big]_{\dot{\xi}=u(Q,\dot{Q},c)}$$

e che essa è somma di termini quadratici in $\dot{Q}$, lineari in $\dot{Q}$, ed indipendenti da $\dot{Q}$.

Avvertenza: Negli esercizi sul metodo di Routh, per facilitare (anche di molto!) i conti, conviene calcolare *prima* $\hat{T}_0 - \hat{T}_2 - V$ come funzione di $(Q, \dot{Q}, \dot{\xi})$ e solo *dopo* fare la sostituzione $\dot{\xi} \mapsto u(Q, \dot{Q}, c)$.

(iv) *Configurazioni di equilibrio in presenza di simmetrie.*

1. Mostrare che un sistema di Lagrangiana $L = T_2 + T_1 - V$ con coordinata ignorabile ξ non ha configurazioni di equilibrio isolate (nel dominio delle coordinate usate): se $q_* = (Q_*, \xi_*)$ è configurazione di equilibrio, allora anche (Q_*, ξ) lo è, qualunque sia ξ.
2. L'oscillatore armonico bidimensionale ha nell'origine una configurazione di equilibrio isolata. Scritto in coordinate polari, esso ha una coordinata ignorabile. Questo contraddice l'affermazione precedente?

(v) *Stabilità.* Tipicamente, gli equilibri non isolati di un sistema con coordinate ignorabili non sono stabili: esistono moti con energia cinetica piccola quanto si vuole che si allontanano dall'equilibrio lungo le direzioni ignorabili:

$$t \mapsto (Q_*, \xi_* + vt)$$

con $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ vicino quanto si vuole a 0. Verficarlo su qualche esempio (basta prendere qualche esercizio fatto a lezione).

(vi) *Equilibri relativi.* Si chiama *equilibrio relativo* (o *moto stazionario*) un moto del sistema completo nel quale le coordinate non ignorabili stanno costanti.

1. Mostrare che, in un equilibrio relativo, le ξ corrono con velocità costanti.
2. Quali sono gli equilibri relativi di un punto in un campo centrale?

(vii) *Semplificazione della Lagrangiana ridotta.* Consideriamo un sistema meccanico con $n = 2$ gradi di libertà e Lagrangiana $L = T_2 - V$, con V posizionale. Se la coordinata q_2 è ignorabile, allora la Lagrangiana ha la forma

$$L(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \;=\; \frac{1}{2}\Big(A_{11}(q_1)\,\dot{q}_1^2 + 2\,A_{12}(q_1)\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2 + A_{22}(q_1)\,\dot{q}_2^2\Big) \;-\; V(q_1)\,.$$

- Determinare la Lagrangiana ridotta $L_c^R(q_1, \dot{q}_1)$.
- Mostrare che la parte quadratica in $\dot{q}_1$ di L_c^R è definita positiva.
- Mostrare che L_c^R è equivalente (nel senso della sezione 3.1.D) ad una Lagrangiana senza termini lineari in $\dot{q}_1$. (Questo è utile per gli esercizi, perchè semplifica lo studio di stabilità degli equilibri del sistema ridotto e delle piccole oscillazioni attorno ad essi.)

Osservazione: La trattazione data qui è intrinsecamente locale: in varie occasioni si sono scelte delle coordinate che sono definite solo localmente. Una trattazione globale è possibile, e molto interessante, ma non del tutto elementare. Inoltre, come si è già accennato, nel caso di un gruppo di simmetria di dimensione maggiore di uno non è in generale possibile scegliere le coordinate, neppure localmente, in modo da averne più di una per volta ignorabile. Ciononostante, può essere ancora possibile ridurre il sistema ad un sistema con un numero minore di gradi di libertà, ma le tecniche da utilizzare devono prescindere dall'uso di coordinate e focalizzarsi sugli aspetti geometrici. Il corrispondente studio della "riduzione" dei sistemi con simmetria è oggi un campo di indagine molto attivo. Per una prima introduzione al problema (che però non è elementare) si può vedere una delle appendici del libro *Metodi Matematici della Meccanica Classica* di Arnold.

4.5 Formulazione variazionale

Da un punto di vista matematico esiste una deduzione delle equazioni di Lagrange "generali"
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} \;=\; 0$$
alternativa al principio di D'Alembert, ma che fa riferimento ad una condizione di minimo (o massimo, o sella) di una certa grandezza. La situazione non è dissimile dal principio di Fermat in ottica: il cammino seguito da un raggio ottico è quello che minimizza (o almeno stazionarizza) il tempo di percorrenza; oppure, in geometria riemanniana, una geodetica è la curva di lunghezza minima fra tutte quelle che congiungono due dati punti. Tutti questi problemi hanno in comune di essere caratterizzabili con una condizione di "minimo". La branca della matematica che si occupa di questo tipo di problemi si chiama *calcolo delle variazioni.*

A. Calcolo delle variazioni. Quello di cui abbiamo bisogno è un calcolo differenziale per funzioni di soluzioni di equazioni differenziali, cioè per funzioni di curve:
$$J \;:\; \bigl\{\text{Spazio di curve}\bigr\} \;\to\; \mathbb{R}\,.$$
Tali funzioni sono tradizionalmente chiamati *funzionali.* A differenza del caso di funzioni definite su $\mathbb{R}^n$, queste sono definite su spazi di dimensione infinita.

Un esempio di funzionale è la lunghezza di una curva $\gamma : [s_0, s_1] \to \mathbb{R}^n$
$$l[\gamma] \;:=\; \int_{s_0}^{s_1} \Bigl|\frac{d\gamma}{ds}(s)\Bigr|\, ds \;=\; \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\dot\gamma_1(s)^2 + \ldots \dot\gamma_n(s)^2}\, ds$$
che dipende da γ solo attraverso le sue derivate $\dot\gamma_i = d\gamma_i/ds$. Più in generale ci interessano funzionali del tipo seguente: data una funzione $L(q, \dot q, t)$, cioè una funzione $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che sarà poi la Lagrangiana) ed una curva $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ si definisce
$$J_L[\gamma] \;:=\; \int_{t_0}^{t_1} L\bigl(\gamma(t), \dot\gamma(t), t\bigr)\, dt\,.$$
(Si noti bene la distinzione fra i punti di $\mathbb{R}^n$, che indichiamo con q, e le curve a valori in $\mathbb{R}^n$, che indichiamo con γ). In Meccanica, questo funzionale si chiama *funzionale d'azione* associato alla funzione L.

Il calcolo delle variazioni si propone di determinare le curve γ che minimizzano $J_L[\gamma]$ o che, più in generale, lo stazionarizzano. Per studiare questo problema bisogna formalizzarlo in modo preciso. Innanzitutto bisogna specificare con esattezza lo "spazio di curve" nel quale è definito J_L. Consideremo il seguente caso: questo spazio contiene tutte le curve che passano fra due punti assegnati q_0 e q_1 a due "istanti" assegnati t_0 e t_1:

$$\Gamma \;:=\; \big\{\gamma \,:\, [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n \;:\; \gamma(t_0) = q_0\,,\; \gamma(t_1) = q_1\big\}\,.$$

Dobbiamo allora domandarci come trovare i punti critici di un funzionale $J_L : \Gamma \to \mathbb{R}$, cioè le curve $\gamma \in \Gamma$ che lo rendono stazionario. Per capirlo esaminiamo il caso familiare delle funzioni differenziabili di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto stazionario è naturalmente un punto nel quale si annullano tutte le derivate parziali prime di f, ovvero il suo differenziale, o il suo Jacobiano. È possibile definire il differenziale anche per funzionali definiti su Γ, ma questo è un po' laborioso perchè, per esempio, la definizione di differenziale richiede una norma su Γ, che quindi andrebbe specificata. (In dimensione infinita, non tutte le norme sono equivalenti). Vi è tuttavia una alternativa, un po' più semplice, che è quella di definire un analogo della *derivata direzionale* delle funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La derivata di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nel punto x nella direzione di un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è

$$\frac{d}{d\lambda} f(x + \lambda v)\big|_{\lambda=0}$$

ed uguaglia $\frac{\partial f}{\partial x}(x)v$. Pertanto, la condizione

$$\frac{d}{d\lambda} f(x + \lambda v)\big|_{\lambda=0} \;=\; 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

equivale all'annullarsi dello Jacobiano $\frac{\partial f}{\partial x}$ e dunque caratterizza i punti stazionari di una funzione di n variabili reali. Ha il vantaggio di essere definibile per mezzo della familiare nozione di derivata di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Cerchiamo allora di utilizzare questa idea, richiedendo che J_L sia stazionario lungo ogni direzione η in Γ. Ma cos'è una "direzione" in Γ? Intuitivamente, dovrà anch'essa essere una curva $t \mapsto \eta(t) \in \mathbb{R}^n$. Però, non può essere un curva appartente a Γ perchè c'è bisogno che, se $\gamma \in \Gamma$, anche $\gamma + \lambda\eta \in \Gamma$ per tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ (almeno quelli abbastanza vicini a zero). Questo avviene se la curva $\eta(t) \in \mathbb{R}^n$ è nulla in t_0 e t_1, ovvero le direzioni η devono appartenere allo spazio

$$\Gamma_0 \;:=\; \big\{\eta \,:\, [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n \;:\; \eta(t_0) = 0\,,\; \eta(t_1) = 0\big\}\,.$$

Possiamo ora concludere questa analisi con le seguenti

Definizioni: *(i) Si dice che un funzionale $J : \Gamma \to \mathbb{R}$ è derivabile secondo Gateaux in un punto $\gamma \in \Gamma$ se la derivata*

$$\frac{d}{d\lambda} J[\gamma + \lambda\,\eta]\big|_{\lambda=0}$$

esiste in $\mathbb{R}$ per ogni $\eta \in \Gamma_0$. Questa derivata si chiama allora variazione *o* derivata di Gateaux *di J in γ nella direzione η.*

(ii) Sia $J : \Gamma \to \mathbb{R}$ derivabile secondo Gateaux. Si dice che J è stazionario in $\gamma \in \Gamma$ se

$$\frac{d}{d\lambda} J[\gamma + \lambda\,\eta]\big|_{\lambda=0} \;=\; 0 \qquad \forall \eta \in \Gamma_0\,. \tag{4.5.1}$$

Per capire queste definizioni, nella sottosezione successiva facciamo subito un esempio, quello del funzionale d'azione.

Esercizi 4.5.1 (i) Mostrare che Γ_0 è uno spazio vettoriale.

(ii) Mostrare che Γ non è uno spazio vettoriale (a meno che $q_0 = q_1 = 0$) ma ha una struttura affine.

(iii) Mostrare che si può (formalmente) pensare a Γ_0 come allo spazio tangente a Γ in ogni suo punto γ.

Osservazioni: Se $J : \Gamma \to \mathbb{R}$ è derivabile secondo Gateaux, allora la mappa $\eta \mapsto \frac{d}{d\lambda} J[\gamma + \lambda\, \eta]\Big|_{\lambda=0}$ è una mappa lineare da Γ_0 in $\mathbb{R}$ che si denota dJ e si chiama il *differenziale di Gateaux* di J. È anche possibile definire un altro differenziale, il cosiddetto *differenziale di Frechet*, che è più simile al differenziale delle funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$. Le due nozioni coincidono nel caso finito–dimensionale, ma non più nel caso infinito–dimensionale. La stessa definizione di differenziale di Frechet richiede l'introduzione di una norma in Γ (si veda per esempio Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, dove è usato questo approccio).

B. Il caso del funzionale d'azione. Consideriamo ora il caso del funzionale d'azione J_L:

Proposizione 52 *Sia $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora il fuzionale $J_L : \Gamma \to \mathbb{R}$ è differenziabile secondo Gateaux in ogni $\gamma \in \Gamma$ e, $\forall \eta \in \Gamma_0$, si ha*

$$\frac{d}{d\lambda} J_L[\gamma+\lambda\eta]\big|_{\lambda=0} = -\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \eta_i(t) \Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t),t\big)\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t),t\big)\Big]\, dt\,.$$

Dimostrazione. Basta fare il conto: si ha

$$J[\gamma + \lambda\,\eta] \;=\; \int_{t_0}^{t_1} L\big(\gamma(t) + \lambda\eta(t), \dot\gamma(t) + \lambda\dot\eta(t), t\big)\, dt$$

e dunque (omettendo di indicare la dipendenza da t di γ ed η e poi, dalla terza riga in poi, anche la dipendenza da γ di L)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} J_L[\gamma+\lambda\eta]\big|_{\lambda=0} \;&=\; \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\lambda} L\big(\gamma+\lambda\eta, \dot\gamma+\lambda\dot\eta, t\big)\big|_{\lambda=0}\, dt \\
&=\; \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \Big[\frac{\partial L}{\partial q_i}\big(\gamma,\dot\gamma,t\big)\eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\big(\gamma,\dot\gamma,t\big)\dot\eta_i\Big]\, dt \\
&=\; \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \Big[\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i + \frac{d}{dt}\Big[\eta_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big] - \eta_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big]\, dt \\
&=\; \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big|_{t_0}^{t_1} \;+\; \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \eta_i \Big[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big]\, dt
\end{aligned}$$

Siccome $\eta(t)$ si annulla in t_0 e in t_1, il primo termine è nullo. ■

Possiamo ora formulare il risultato centrale, che è la condizione di stazionarietà:

Proposizione 53 (Principio di Hamilton) *Sia $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora una curva $\gamma \in \Gamma$ rende stazionario il funzionale J_L se e solo se è soluzione delle equazioni*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \;=\; 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n$$

che (in questo ambito) sono chiamate equazioni di Euler–Lagrange.

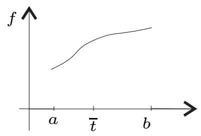
Dimostrazione. È evidente, sulla base della Proposizione 52, che se $t \mapsto \gamma_t$ è soluzione delle equazioni di Lagrange allora essa rende anche stazionario il funzionale di azione J_L. Il viceversa invece non è ovvio, e gioca un ruolo centrale il fatto che si richieda che la (4.5.1) *per ogni* $\eta \in \Gamma_0$. La sua dimostrazione si basa sul seguente

Lemma *Sia* $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile. Se*

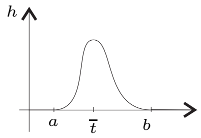
$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\, h(t)\, dt \;=\; 0 \qquad \forall \text{ funzione } h : [t_0, t_1] \to \mathbb{R} \text{ differenziabile}$$

allora $f = 0$*. Questo è vero anche se si richiede l'annullarsi dell'integrale solo per tutte le funzioni* $h : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ *nulle agli estremi.*

Dimostrazione del Lemma. Per assurdo: sia $f(\bar{t}) \neq 0$ per qualche $\bar{t} \in [t_0, t_1]$, per esempio $f(\bar{t}) > 0$. Allora, per il teorema della permanenza del segno esiste un intervallo $(a, b) \subset [t_0, t_1]$ tale che $f(t) > 0$ per tutti i $t \in (a, b)$. Prendiamo allora una $h(t)$ positiva in tutto l'intervallo (a, b) e nulla fuori da esso:



$$h(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t < a \\ > 0 & t \in (a, b) \\ 0 & t > b \end{cases}$$



come mostrato nella figura. (È possibile fare una funzione siffatta differenziabile quante volte si vuole, anche se naturalmente non la si può fare analitica.) Allora

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\, h(t)\, dt \;=\; \int_a^b f(t)\, h(t)\, dt \;>\; 0\,,$$

perchè sia f che h sono ovunque positive in (a, b), ciò che contraddice l'ipotesi assurda. L'ultima affermazione è provata dal fatto che la funzione h così costruita è nulla agli estremi t_0 e t_1. $\square$

Supponiamo allora che $t \mapsto \gamma_t$ renda stazionario J_L. Se scriviamo $f_i(t) = \frac{d}{dt}\big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\gamma_t, \dot{\gamma}_t, t)\big] - \frac{\partial L}{\partial q_i}(\gamma_t, \dot{\gamma}_t, t)$, questo significa che

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} f_i(t)\, \eta_i(t)\, dt \;=\; 0 \qquad \forall \eta \in \Gamma_0\,.$$

Mostriamo che questo implica che tutte le f_i sono identicamente nulle. Per assurdo, ce ne sia una, per esempio la f_1, che non è identicamente nulla. Ora, limitandosi agli $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \Gamma_0$ con tutte le componenti $\eta_2, \ldots, \eta_n$ nulle si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} f_i(t)\, \eta_i(t)\, dt \;=\; \int_{t_0}^{t_1} f_1(t)\, \eta_1(t)\, dt \;=\; 0$$

per ogni funzione $\eta_1 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ nulla agli estremi. Dunque, per il lemma, f_1 deve essere nulla. $\blacksquare$

Osservazioni: (i) Il principio di Hamilton non prova l'esistenza di moti che vanno da q_0 a q_1: solo, se essi esistono, allora rendono stazionario il funzionale d'azione.

(ii) I moti, se esistono, non sono necessariamente nè minimi del funzionale d'azione nè unici. (Si pensi ad un punto vincolato ad un cerchio, in assenza di forze attive: esso può andare da un punto ad un altro nello stesso tempo ruotando, con velocità opportune, in un senso oppure nell'altro.) Tuttavia, si può mostrare che l'estremo è effettivamente un minimo se l'intervallo temporale (t_1, t_2) è abbastanza piccolo.

C. Commenti. In Meccanica, e in Fisica, il risultato precedente si chiama *principio di Hamilton* o *principio di minima azione*; di solito viene epresso, un po' simbolicamente, come

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \ = \ 0 \, .$$

Quale ne è il significato?

Da un punto di vista matematico esso mostra che le equazioni di Lagrange hanno un'origine variazionale. Di conseguenza, le loro soluzioni possono essere studiate con tutte le tecniche, per esempio di tipo topologico, sviluppate nell'ambito del calcolo delle variazioni. Un problema tipico che è studiato variazionalmente è l'esistenza di soluzioni periodiche. Il calcolo delle variazioni nasce all'epoca di Newton per la risoluzione di alcuni specifici problemi (per esempio quello della brachistocrona), anche di origine meccanica. Oggi, costituisce un vasto e fecondo campo di ricerca.

Da un punto di vista fisico, la formulazione variazionale delle equazioni di Lagrange ha un ruolo fondamentale. In molti testi di fisica e di meccanica classica il "Principio Variazionale" è semplicemente preso come postulato (in luogo delle equazioni di Newon e dell'idealità dei vincoli) e le equazioni di Lagrange sono dedotte da esso. Inoltre, un principio variazionale è spesso preso come punto di partenza in meccanica quantistica, nelle teorie di campo.

La storia dei principi variazionali in meccanica ed in matematica è lunga ed interessante. Per un'analisi del loro ruolo in Fisica si può vedere il libro di E. Mach *La meccanica nel suo sviluppo storico critico* (Boringhieri). Per un'introduzione al problema si veda anche BGG, capitolo 4.

Storicamente, ai principi variazionali è stata attribuita un'importanza enorme. Inizialmente (secolo XVIII) addirittura un significato filosofico: con la comparsa dei primi principi variazionali, il determinismo Newtoniano è stato parzialmente sostituito dal finalismo. Alla domanda "quale traiettoria segue il sistema" si risponde non più "quella determinata dalle condizioni iniziali"ma "quella che minimizza l'azione". Dunque, la Natura ha un *fine*, quello di minimizzare l'azione. Questo punto di vista è stato percepito come molto attraente, soprattutto in epoche nelle quali la distinzione fra Scienza e Religione non era così ben definita come oggi.

La prima formulazione di un principio variazionale per la Meccanica è dovuta a Maupertuis (1744: 40 anni prima di Lagrange, 100 anni prima di Hamilton!). Cosa Maupertuis avesse in mente non è facile capire. (Di certo non possedeva gli strumenti matematici per formulare un vero principio variazionale.) Se non altro, però, introdusse in matematica e in fisica (a quell'epoca non erano distinte) un'idea attraente. Al nome di Maupertuis è rimasto legato un diverso principio variazionale, il cosiddetto "principio di minima azione", del quale vedremo una formulazione non variazionale nel capitolo 5.

4.6 Principi variazionali: applicazioni

A. Applicazioni alla Meccanica. Per mezzo del principio di Hamilton si possono dimostrare in modo semplice due risultati che abbiamo già incontrato: l'invarianza delle equazioni di Lagrange per cambiamenti di coordinate (sezione 3.1.F) ed il fatto che Lagrangiane "equivalenti" conducano alle stesse equazioni di Lagrange (sezione 3.1.E).

Invarianza. Sia $q = q(\tilde q)$ un cambiamento di coordinate. Definiamo

$$\tilde L(\tilde q, \dot{\tilde q}, t) \;:=\; L(q(\tilde q), \frac{\partial q}{\partial \tilde q}(\tilde q)\dot{\tilde q}, t)\,.$$

Siano ora $t \mapsto \tilde\gamma(t)$ e $t \mapsto \gamma(t) = q(\tilde\gamma(t))$ le due scritture di una stessa curva nei due sistemi di coordinate. Allora

$$\tilde L(\tilde\gamma(t), \dot{\tilde\gamma}(t), t) \;=\; L(\gamma(t), \dot\gamma(t), t)$$

e dunque

$$\int_{t_0}^{t_1} \tilde L(\tilde\gamma(t), \dot{\tilde\gamma}(t), t)\, dt \;=\; \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot\gamma(t), t)\, dt\,.$$

Di conseguenza $\tilde\gamma(t)$ stazionarizza $J_{\tilde L}$ (cioè è soluzione delle equazioni di Lagrange per $\tilde L$) se e solo se $\gamma(t) = q(\tilde\gamma(t), t)$ stazionarizza J_L (cioè è soluzione delle equazioni di Lagrange per L).

Lagrangiane equivalenti. Siano $L(q, \dot q, t)$ ed $F(q, t)$ due funzioni e sia $\tilde L = L + \frac{dF}{dt}$, ove $\frac{dF}{dt}$ ha il solito significato, si veda la Proposizione 39. Allora

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \tilde L(\gamma(t), \dot\gamma(t), t)\, dt \;&=\; \int_{t_0}^{t_1} \Big[L\big(\gamma(t), \dot\gamma(t), t\big) + \frac{d}{dt}\big(F(\gamma(t), t)\big)\Big]\, dt \\ &=\; \int_{t_0}^{t_1} L\big(\gamma(t), \dot\gamma(t), t\big)\, dt \;+\; F\big(\gamma(t), t\big)\Big|_{t_0}^{t_1}\,.\end{aligned}$$

Il secondo termine vale $F(q_1, t_1) - F(q_0, t_0)$ per tutte le curve $\gamma \in \Gamma$ e dunque

$$J_{\tilde L}[\gamma] \;=\; J_L[\gamma] \;+\; \mathrm{cost}$$

I due funzionali sono allora stazionari sulle stesse curve e dunque le corrispondenti equazioni di Lagrange hanno le stesse soluzioni.

B. Geodetiche di una sottovarietà di $\mathbb{R}^m$. Consideriamo una sottovarietà n–dimensionale Q di $\mathbb{R}^m$. La lunghezza di una curva $\tilde\gamma : [t_0, t_1] \to Q$ è

$$l[\tilde\gamma] \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \Big|\frac{d\tilde\gamma}{dt}(t)\Big|\, dt$$

ove $|\;|$ denota, al solito, la norma euclidea in $\mathbb{R}^m$. Fissiamo ora due punti X_0 ed X_1 di Q e consideriamo tutte le curve

$$\tilde\gamma \,:\, [t_0, t_1] \;\to\; Q\,, \qquad \tilde\gamma(t_0) \;=\; X_0\,,\; \tilde\gamma(t_1) \;=\; X_1$$

per qualche intervallo $[t_0, t_1]$. Una *geodetica* di Q fra X_0 ed X_1, se esiste, è una curva che congiunge X_0 ed X_1 e che rende stazionaria la lunghezza.

[Si noti che la scelta di t_0 e t_1 non ha qui in realtà alcuna importanza, perchè la lunghezza di una curva è indipendente dalla sua parametrizzazione; dunque, se

$$t \mapsto \tilde\gamma(t)$$

è una geodetica e

$$\tau \;:\; [t_0', t_1'] \;\to\; [t_0, t_1]$$

una riparametrizzazione, allora anche

$$\tilde\gamma' : [t_0', t_1'] \to Q\,, \qquad \tilde\gamma'(t) = \tilde\gamma(\tau(t))$$

è una geodetica e ha lo stesso supporto di $\tilde{\gamma}$. In effetti, intuitivamente, uno pensa ad una geodetica proprio come al supporto di una curva, più che come ad una curva parametrizzata.]

Introduciamo ora coordinate locali $q \mapsto \tilde{X}(q)$ su Q e denotiamo $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ la rappresentativa della curva $\tilde{\gamma}$, definita da $\tilde{\gamma} = \tilde{X} \circ \gamma$. Allora $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q} \frac{d\tilde{\gamma}}{dt}$ e dunque, introdotta la matrice "metrica" $G(q)$ di componenti

$$g_{ij}(q) \;=\; \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q) \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}(q) \tag{4.6.1}$$

si ha

$$l[\tilde{\gamma}] \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\gamma}(t) \cdot G(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}\, dt\,.$$

La matrice $G(q)$ è definita positiva (se no, qualche vettore non nullo tangente alla varietà avrebbe lunghezza nulla). Possiamo allora concludere che, scritta in coordinate, una curva è una geodetica se e solo se è una soluzione delle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\sqrt{\mathcal{T}}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \sqrt{\mathcal{T}}}{\partial q} \;=\; 0 \tag{4.6.2}$$

per la "Lagrangiana" $\sqrt{\mathcal{T}}$, con

$$\mathcal{T}(q, \dot{q}) \;=\; \dot{q} \cdot G(q)\dot{q}\,. \tag{4.6.3}$$

Esempio: Cerchiamo le geodetiche del piano, in coordinate cartesiane (x_1, x_2). La matrice metrica è l'identità e dunque $\mathcal{T} = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2$. Pertanto, assunto $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \neq 0$ (se no, la geodetica si ferma; si veda più avanti per un'analisi rigorosa di questo punto, che è un po' delicato), le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} \;=\; 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} \;=\; 0$$

ovvero, a conti fatti,

$$\dot{x}_2\,(\dot{x}_2\ddot{x}_1 - \dot{x}_1\ddot{x}_2) \;=\; 0\,, \qquad \dot{x}_1\,(\dot{x}_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\ddot{x}_1) \;=\; 0\,.$$

Queste sono equazioni del secondo ordine che non si possono risolvere rispetto a $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ (a parte i fattori $\dot{x}_2$ ed $\dot{x}_1$, sono la stessa equazione!) e dunque non si possono mettere in forma normale. In ogni caso, si verifica facilmente che esse sono risolte dalle rette.

La situazione incontrata in questo esempio, che le equazioni di Euler–Lagrange per il funzionale lunghezza non si possano mettere in forma normale, non è peculiare del piano, ma è del tutto generale. Essa è dovuta al fatto che la funzione $\sqrt{\mathcal{T}(q, \dot{q})}$, essendo la radice quadrata di una funzione quadratica, è omogenea di grado uno nelle $\dot{q}$ e dunque, come si intuisce,

$$\frac{\partial^2 \sqrt{\mathcal{T}}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \;=\; 0\,. \tag{4.6.4}$$

(Il calcolo esplicito è fatto più sotto.) Come si sa, la mancanza di forma normale di un'equazione differenziale può portare alla perdita dell'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy. In questo contesto, la perdita di unicità è inevitabile, perchè riflette semplicemente l'arbitrarietà della parametrizzazione delle geodetiche: con un'opportuna riparametrizzazione di una geodetica si può costruire una *diversa* soluzione con le stesse condizioni iniziali. (Le due curve hanno lo stesso supporto, ma diversa parametrizzazione, e dunque sono curve diverse; si veda sotto per un esempio.)

Tuttavia, come ora mostriamo, le geodetiche possono essere caratterizzate *anche* come soluzioni delle equazioni di Euler–Lagrange per la funzione

$$\mathcal{T}(q,\dot q) \;=\; \dot q \cdot G(q)\dot q\,,$$

che ovviamente possono essere messe in forma normale (giacchè la matrice G è definita positiva).

Proposizione 54 *Ogni soluzione delle equazioni di Lagrange per $\mathcal{T}$ (eccetto gli equilibri) è soluzione di quelle per $\sqrt{\mathcal{T}}$.*

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{T}$ è indipendente dal tempo e quadratica nelle velocità, le equazioni di Lagrange per questo sistema possiedono l'integrale di Jacobi $E=\mathcal{T}$. Lungo una soluzione non costante delle equazioni di Lagrange per $\mathcal{T}$ si ha allora

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial\sqrt{\mathcal{T}}}{\partial\dot q}-\frac{\partial\sqrt{\mathcal{T}}}{\partial q} \;&=\; \frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{T}}}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot q}\Big]-\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{T}}}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q}\\ &=\; \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{T}}}\Big[\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot q}-\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q}\Big] \;=\; 0\,. \qquad (4.6.5)\end{aligned}$$

Questo conto ha senso perchè, su una soluzione che non sia un equilibrio, $\mathcal{T}$ non è nulla: infatti $\dot q(t)$ non è identicamente nulla e la matrice G è definita positiva (questo significa, anzi, che $\dot q$ non si annulla mai). ■

Osservazioni: (i) Dimostrazione della (4.6.4). Per il teorema di Euler sulle funzioni omogenee si ha

$$\sum_{j=1}^n \dot q_j\frac{\partial\sqrt{\mathcal{T}}}{\partial\dot q_j} \;=\; \sqrt{\mathcal{T}}\,.$$

Derivando rispetto a $\dot q_i$ entrambi i membri di questa uguaglianza si trova

$$\frac{\partial\sqrt{\mathcal{T}}}{\partial\dot q_i} \;=\; \frac{\partial\sqrt{\mathcal{T}}}{\partial\dot q_i}+\sum_{j=1}^n\dot q_j\frac{\partial^2\sqrt{\mathcal{T}}}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}$$

cosicchè

$$\frac{\partial^2\sqrt{\mathcal{T}}}{\partial\dot q\partial\dot q}\,\dot q \;=\; 0 \qquad \forall\dot q\in\mathbb{R}^n\,,$$

e dunque la matrice $\frac{\partial^2\sqrt{\mathcal{T}}}{\partial\dot q\partial\dot q}$ è nulla.

(ii) Non–unicità delle geodetiche. Sia $\gamma:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$, $t\mapsto\gamma(t)$ una geodetica e sia τ un diffeomorfismo di $[t_0,t_1]$ in sè stesso. Allora la curva $\hat\gamma(t):=\gamma(\tau(t))$ ha lo stesso supporto ed è anch'essa una geodetica. Se si sceglie la parametrizzazione in modo che $\tau'(t_0)=1$, allora

$$\gamma(t_0) \;=\; \hat\gamma(t_0)\,, \qquad \frac{d\gamma}{dt}(t_0) \;=\; \frac{d\hat\gamma}{dt}(t_0)$$

e dunque abbiamo due diverse soluzioni con gli stessi dati iniziali. (Per esempio, si può prendere $\tau(t)=t+\frac{t_1-t_0}{2\pi}\sin^2(\pi\frac{t-t_0}{t_1-t_0})$.) Naturalmente, le due soluzioni differiscono solo per la parametrizzazione, cioè per la velocità con la quale sono percorse, non per il supporto, che è lo stesso.

(iii) Siccome la Lagrangiana $\sqrt{\mathcal{T}}$ non è differenziabile per $\dot q=0$ non ha senso considerare gli equilibri delle sue equazioni di Lagrange.

(iv) Il problema di Cauchy (a valori iniziali) non è particolarmente significativo quando si tratta di geodetiche. Il problema tipico è piuttosto quello di determinare la (o le) geodetiche che congiungono due punti assegnati: si tratterebbe cioè di risolvere le equazioni di Lagrange (4.6.2) con le condizioni agli estremi $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$. Qui ci focalizziamo però sul problema di Cauchy perchè abbiamo in animo il confronto con i moti del sistema meccanico di energia cinetica $\mathcal{T}$.

(v) Dunque, ogni soluzione non costante delle equazioni di Lagrange per $\mathcal{T}$ è una geodetica della varietà Q. Resterebbe da stabilire se valga anche il viceversa, se cioè *tutte* le geodetiche siano soluzioni delle equazioni di Lagrange per $\mathcal{T}$. A rigore, la risposta non può essere affermativa perchè, a differenza delle geodetiche, le soluzioni delle equazioni di Lagrange per $\mathcal{T}$ non possono essere riparametrizzate (causa unicità). Tuttavia, la risposta diventa affermativa se si considerano le geodetiche a meno della parametrizzazione: *data una geodetica, esiste una sua riparametrizzazione che è soluzione delle equazioni di Lagrange per $\mathcal{T}$.* Alcune indicazioni sulla dimostrazione di questo fatto sono date negli esercizi seguenti.

(vi) Si noti che $\mathcal{T}$ può essere riguardata come (due volte) l'energia cinetica T_2 di un sistema di punti di massa unitaria con varietà delle configurazioni Q, non soggetto a forze attive. Dunque .... ????

Esercizi 4.6.1 (i) Determinare le geodetiche del piano, usando coordinate polari. (Si usi la formula di Binet, vedere la sezione 4.1.C).

(ii) Determinare le geodetiche del cilindro, usando coordinate cilindriche

$$(z, \varphi) \in \mathbb{R} \times S^1 .$$

Mostrare che, dati due punti che stanno sulla stessa generatrice ma ad altezze diverse, cioè (z_0, φ_0) e (z_1, φ_0) con $z_1 > z_0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una geodetica che li congiunge e che si avvolge n volte sul cilindro.

(iii) Studiare le geodetiche del cono. Determinare sotto quali condizioni sull'angolo di apertura del cono vi sono geodetiche con punti doppi.

(iv) Mostrare che le geodetiche della sfera sono archi di cerchi massimi. [Usare coordinate sferiche, scegliendo bene l'asse z.] Mostrare che, dati due punti non antipodali, vi sono due geodetiche di diversa lunghezza fra di essi e che una è un minimo per la lunghezza mentre l'altra è un punto di sella. [Per l'ultimo punto, non fare conti, ma cercare un motivo geometrico.]

(v) Dimostrare che *data una geodetica, cioè una soluzione delle equazioni di Lagrange per $\sqrt{\mathcal{T}}$, esiste una sua riparametrizzazione che è soluzione delle equazioni di Lagrange per $\mathcal{T}$:*

1. Mostrare innanzittutto che una geodetica è soluzione delle equazioni di Lagrange per $\mathcal{T}$ se e solo se $\mathcal{T}$ è costante lungo di essa. (Si vedano le (4.6.5)).
2. Mostrare poi che fra tutte le riparametrizzazioni di una geodetica, ce ne è una che rende l'energia $\mathcal{T}$ costante. (Se $\gamma(t)$ è la geodetica, si cerchi $\tau(t)$ tale che $\hat{\gamma}(t) = \gamma(\tau(t))$ abbia energia unitaria.)

C. Dinamica e geodetiche. Consideriamo adesso un sistema costituito da una particella vincolata in modo liscio ad una superficie (bidimensionale) Q e sulla quale non agiscano forze attive. La Lagrangiana è la sola energia cinetica

$$T(q, \dot{q}) \;=\; \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q}$$

e, se m è la massa della particella, è legata alla Lagrangiana $\sqrt{\mathcal{T}}$ delle geodetiche di Q dalla relazione

$$T(q, \dot{q}) \;=\; \frac{m}{2} \mathcal{T} .$$

Pertanto, l'analisi precedente porta a concludere

Proposizione 55 *In assenza di forze attive, i moti di un punto vincolato ad una superficie seguono le geodetiche della superficie.*

Così, le traiettorie di un punto non vincolato sono rette, quelle di un punto vincolato ad una sfera sono archi di cerchi massimi, etc.

È naturale domandarsi se questa situazione si estenda, e come, ai sistemi di più particelle ed alla presenza di forze attive. Il caso di sistemi di più particelle senza forze attive è abbastanza semplice. La Lagrangiana è ancora l'energia cinetica $\frac{1}{2}\dot{q} \cdot A(q)\dot{q}$ e, come spieghiamo nella prossima sottosezione, definisce una "metrica" sulla varietà delle configurazioni. Pertanto,

Proposizione 56 *In assenze di forze attive, le traiettorie di qualunque sistema olonomo sono geodetiche della varietà delle configurazioni, nella metrica definita dall'energia cinetica.*

Si noti che la metrica dell'energia cinetica dipende naturalmente, oltre che dalla varietà delle configurazioni, anche dal sistema — per esempio, dalle masse dei punti. Anche in quei casi nei quali la varietà delle configurazioni è una superficie bidimensionale che può essere immersa in $\mathbb{R}^3$, se il sistema è costituito da più punti di masse diverse, la metrica dell'energia cinetica non coincide necessariamente con la metrica che questa superficie "eredita" da $\mathbb{R}^3$.

D. Metriche riemanniane su varietà. Sia Q una sottovarietà di dimensione n di $\mathbb{R}^m$ ($m \geq n$). Una "metrica riemanniana", o semplicemente "metrica", su Q è costituita dall'assegnazione di un prodotto scalare su ogni suo spazio tangente, cioè, per ogni $X \in Q$, di una mappa

$$G_X \; : \; T_XQ \times T_XQ \; \to \; \mathbb{R}$$

che sia

- bilineare: $G_X(cu, v) = cG_X(u, v)$, $G_X(u + v, w) = G_X(u, w) + G_X(v, w)$;
- simmetrica: $G_X(u, v) = G_X(v, u)$;
- definita positiva $G_X(u, u) > 0$ se $u \neq 0$.

(In aggiunta, si richiede che G_X dipenda in modo differenziabile da $X \in Q$: questo significa che le funzioni g_{ij} definite più sotto devono essere differenziabili.) La metrica è proprio la mappa $X \mapsto G_X$ che ad ogni punto $X \in Q$ associa questo prodotto scalare. Siccome una mappa bilineare su uno spazio vettoriale è quel che si chiama un tensore (di rango due), ci si riferisce a G anche come al *tensore metrico.*

Una volta assegnata una metrica G, si possono definire le corrispondenti "lunghezze" dei vettori tangenti e delle curve: se $u \in T_XQ$, la sua lunghezza (rispetto a G) è

$$\sqrt{G_X(u, u)}$$

e la lunghezza (rispetto a G) di una curva $t \mapsto \tilde{\gamma}_t \in Q$ è

$$l_G[\tilde{\gamma}] \; := \; \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G_{\tilde{\gamma}_t}(\dot{\tilde{\gamma}}_t, \dot{\tilde{\gamma}}_t)}\, dt$$

Inoltre, per mezzo della metrica resta definita una nozione di ortogonalità: due vettori tangenti u e v sono ortogonali se $G_X(u, v) = 0$.

Introduciamo ora delle coordinate (locali) $q \mapsto \tilde{X}(q)$ su Q. Denotiamo con u_i, v_i le coordinate dei vettori $u, v \in T_XQ$ nella base associata a queste coordinate:

$$u \; = \; \sum_{i=1}^{n} u_i \, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q) \, , \qquad v \; = \; \sum_{i=1}^{n} v_i \, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q) \, .$$

Allora

$$G_{\tilde X(q)}(u,v) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)u_i v_j \qquad \text{con} \qquad g_{ij}(q) \;=\; G_{\tilde X(q)}\Big(\frac{\partial \tilde X}{\partial q_i}(q), \frac{\partial \tilde X}{\partial q_j}(q)\Big)\,.$$

Punto per punto, le g_{ij} sono le componenti di una matrice g simmetrica ($g_{ij} = g_{ji}$) e definita positiva. Pertanto, scritta in coordinate, la lunghezza di una curva $t \mapsto \tilde\gamma_t$ diventa

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot\gamma_t \cdot g(\gamma_t)\dot\gamma_t}\, dt$$

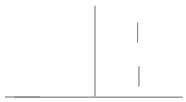
ove naturalmente γ è la rappresentativa di $\hat\gamma$ (cioè $\tilde\gamma_t = \tilde X(\gamma_t)$). Il problema di determinare le geodetiche di questa metrica è ricondotto così allo studio delle equazioni di Lagrange per la Lagrangiana $\sqrt{\mathcal{T}_G}$ con

$$\mathcal{T}_G(q,\dot q) \;=\; \dot q \cdot g(q)\dot q\,.$$

Si vede così che, se Q è una sottovarietà di $\mathbb{R}^m$, allora la metrica (4.6.1) "ereditata" da $\mathbb{R}^m$ è solo una possibile scelta di una metrica su di essa. Altre scelte delle funzioni g_{ij} possono portare a metriche (e dunque a 'geometrie') che non sono ad essa equivalenti (per esempio, hanno diverse geodetiche, diversa ortogonalità, etc.). Diamo qui un semplice, e classico, esempio di questa situazione:

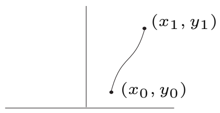
Esempio: Metrica di Poincaré–Lobačevskij. Consideriamo il semipiano positivo $y > 0$ con la metrica

$$G_{(x,y)}(u,v) \;=\; \frac{1}{y^2} u\cdot v\,.$$



Segmenti di diversa lunghezza

In questa metrica, la lunghezza dei vettori cresce man mano che ci si avvicina all'asse delle x, ed ivi diverge. Infatti, se $t \mapsto \gamma_t = (x_t, y_t)$ è una curva di estremi (x_0, y_0) ed (x_1, y_1) ed ha $\dot y_t > 0$ per tutti i t, la sua lunghezza è



$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y_t}\sqrt{\dot x_t^2 + \dot y_t^2}\, dt \;\geq\; \int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot y_t}{y_t}\, dt \;=\; \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y}$$

e diverge per $y_0 \to 0$.

Le geodetiche di questa metrica sono soluzioni delle equazioni di Lagrange per la Lagrangiana

$$L(x,y,\dot x,\dot y) \;=\; \frac{1}{y}\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}\,.$$

Siccome L non dipende da x, queste equazioni hanno l'integrale primo $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x}$, ovvero

$$\frac{\dot x}{y\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}} \;=\; c\,.$$

Per $c = 0$ si trova $\dot x = 0$, cioè rette verticali. Se $c \neq 0$ si ha

$$\dot x \;=\; cy\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}\,.$$

Quadrando i due membri e risolvendo per $\dot x$ si trova

$$\dot x \;=\; \pm\frac{y\,\dot y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

ove $r = 1/c$. Questa è un'equazione a variabili separabili che integrata da $x = a \mp \sqrt{r^2 - y^2}$, $a \in \mathbb{R}$, ovvero

$$(x-a)^2 + y^2 \;=\; r^2\,.$$

Dunque, anche tutti i cerchi centrati su punti dell'asse x, e di raggio qualunque, sono geodetiche.

L'interesse di questo esempio sta nel fatto che fornisce un semplice modello di geometria non–euclidea (iperbolica). Se si definiscono come 'rette' le geodetiche, si trova che tutti gli assiomi della geometria euclidea sono soddisfatti (per esempio, per due punti passa una ed una sola retta: verificarlo), con la ben nota eccezione del postulato delle parallele: esistono infinite rette parallele ad una retta data e passanti per un punto non appartenente ad essa (verificarlo; 'parallele' significa che non si intersecano).

In questo caso, si è ottenuta una geometria non–euclidea scegliendo una metrica diversa da quella euclidea su un aperto di $\mathbb{R}^2$. La 'curvatura'di questa geometria è stata prodotta deformando la metrica euclidea del piano con il fattore y^{-2}. Naturalmente, modelli di questo tipo si possono costruire anche considerando una superficie bidimensionale non piana immersa in $\mathbb{R}^3$ e dotata della restrizione della metrica euclidea (4.6.1). Per esempio, la sfera immersa in $\mathbb{R}^3$ produce un modello di geometria 'ellittica', nella quale due rette distinte non sono mai parallele (verificarlo).

Una rassegna storica del problema delle parallele, e della nascita delle geometrie non–euclidee, si può trovare nell'Introduzione e nelle Appendici alla traduzione italiana del libro *Nuovi principi della geometria* di N. Lobačevskij (Boringhieri). Si può anche vedere il libro *Geometria intuitiva* di Hilbert e Cohn–Vosset (Boringhieri).

Osservazione: Spazio cotangente e prodotto tensore. Spesso, in un sistema di coordinate, la metrica viene indicata come

$$ds^2 \;=\; \sum_{ij} g_{ij}(q)dq_i dq_j\,. \tag{4.6.6}$$

Qui, il simbolo ds^2, invece di G o altro, vuole solo richiamare il fatto che il secondo membro produce il quadrato della lunghezza dei vettori tangenti (cioè, lunghezza 'infinitesima'). Vogliamo invece spiegare cosa rappresenti il membro di destra, perchè vi è sotto una ricca ed importante struttura.

Denotiamo con $q_1,\ldots,q_n : Q \to \mathbb{R}$ le n funzioni coordinate (cioè, $q_1(X)$ è la prima coordinata del punto $X \in Q$, etc.) Fissiamo ora un punto X della varietà, di coordinate q (cioè $X = \tilde{X}(q)$) e definiamo il differenziale dq_i, nel punto X, come quella mappa che ad ogni vettore tangente $u \in T_XQ$ associa la sua componente i–ma nella base $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_n}$:

$$dq_i\Big(\sum_j u_j \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}\Big) \;=\; u_i\,.$$

Allora, i dq_i sono mappe lineari $T_XQ \to \mathbb{R}$ che soddisfano

$$dq_i\Big(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}\Big) \;=\; \delta_{ij}\,.$$

Ora, le mappe lineari su uno spazio vettoriale E formano anch'esse uno spazio vettoriale, chiamato il *duale* di E ed indicato con E^*. Se $e_1,\ldots,e_n$ è una base di E, la corrispondente *base duale* è la base di E^* è costituita dalle mappe lineari $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ definite da

$$\alpha_i(e_j) \;=\; \delta_{ij}\,.$$

(Questo definisce univocamente le α_i perchè una mappa lineare è definita dai suoi valori su una base dello spazio vettoriale.)

Lo spazio duale $(T_XQ)^*$ allo spazio tangente T_XQ si chiama *spazio cotangente* e si denota T_X^*Q. I suoi elementi si chiamano *vettori cotangenti* alla varietà. Pertanto, valutati in un punto $X \in Q$, i differenziali $dq_1,\ldots,dq_n$ sono vettori cotangenti e, anzi, formano una base per T_X^*Q che è duale a quella dei vettori tangenti $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}$.

Siano ora α e β due vettori cotangenti a Q in suo punto X. Definiamo il loro *prodotto tensore* come la mappa bilineare su T_XQ (cioè, un 'tensore') definita come

$$\alpha\otimes\beta \;:\; T_XQ \times T_XQ \;\to\; \mathbb{R}\,, \qquad \alpha\otimes\beta(u,v) \;=\; \alpha(u)\beta(v)\,.$$

Allora, ogni mappa bilineare G_X su T_XQ può essere scritta come combinazione lineare dei prodotti tensori $dq_i \otimes dq_j$:

$$G_X \ = \ \sum_{ij} g_{ij} dq_i \otimes dq_j \ , \qquad \text{con} \quad g_{ij} \ = \ G_X\left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}\right) .$$

Infatti

$$\begin{aligned} G_X(u,v) \ &= \ G_X\left(\sum_i u_i \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}, \sum_j v_j \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}\right) \\ &= \ \sum_{ij} u_i v_j g_{ij} \\ &= \ \sum_{ij} g_{ij} dq_i(u)\, dq_j(v) \\ &= \ \sum_{ij} g_{ij} dq_i \otimes dq_j(u,v) \, . \end{aligned}$$

Si capisce così quale sia il significato della (4.6.6): semplicemente, si è omesso di indicare il simbolo $\otimes$.

Nota: Forme differenziali. Ricordiamo che un campo vettoriale su una varietà è una mappa che ad ogni punto X della varietà associa un vettore $u \in T_XQ$. In modo analogo, una *forma differenziale* è una mappa che ad ogni punto X della varietà associa un co–vettore $\alpha \in T^*_XQ$. Per esmpio, i differenziali $dq_1, \ldots, dq_n$ delle funzioni coordinate sono forme differenziali. Siccome $dq_1, \ldots, dq_n$ sono una base per ogni spazio cotangente, ogni altra forma differenziale si può scrivere come loro combinazione lineare (con coefficienti che variano da punto a punto, cioè funzioni da Q in $\mathbb{R}$):

$$\alpha \ = \ \sum_i \alpha_i \, dq_i \, .$$

Per esempio, se f è una funzione reale su Q allora il suo differenziale df è la forma differenziale le componenti della quale sono le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial q_i}$:

$$df \ = \ \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \, dq_i \, .$$

[Infatti, $df(u) \ = \ \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \, dq_i(u) \ = \ \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \, u_i$ è la derivata direzionale di f nella direzione u, come si vuole sia.]

4.7 Complementi

A. Stime sull'approssimazione lineare. Vogliamo ora confrontare una soluzione delle equazioni di Lagrange con la "piccola oscillazione" avente lo stesso dato iniziale. Per semplificare la notazione scriviamo

$$x \ = \ \begin{pmatrix} q - q^* \\ \dot{q} \end{pmatrix} .$$

e denotiamo $t \mapsto x_t$ la soluzione delle equazioni di Lagrange con dato iniziale x_0. La soluzione dell'equazione linearizzata $\dot{x} = \Lambda x$ è allora $e^{\Lambda t} x_0$.

Proposizione 57 *Se $V'(q^*) = 0$ e $V''(q^*)$ è definito positivo, allora per ogni dato iniziale x_0 sufficientemente vicino all'origine si ha*

$$\|x_t - e^{\Lambda t} x_0\| < c\,|t|\,\|x_0\|^2 \qquad (4.7.1)$$

ove c è una costante indipendente da t e da x_0.

Dimostrazione. Le equazioni di Lagrange sono

$$\dot{x} \;=\; \Lambda\, x + R(x)\,. \tag{4.7.2}$$

Se ci restringiamo ad un compatto $C \subset \mathbb{R}^{2N}$ contenente l'origine, allora

$$\|R(x)\| \;<\; c_1\|x\|^2 \qquad \forall x \in C$$

($c_1, c_2, \ldots$ sono costanti positive, dipendenti dal compatto C e dalla Lagrangiana, ma indipendenti da ϵ e da t). La prova della stima (4.7.1) è articolata in due passi.

1. Sfruttando la conservazione dell'energia, mostriamo che, se $\|x_0\|$ è abbastanza piccolo, allora

$$\|R(x_t)\| < c_2\,\|x_0\|^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.7.3}$$

Qui è cruciale che V'' abbia un minimo non degenere perchè allora anche l'energia

$$E(q, \dot{q}) \;=\; \tfrac{1}{2}\dot{q}\cdot A(q)\,\dot{q} \;+\; V(q) \;-\; V(q^*)$$

ha un minimo nondegenere in $(q^*, 0)$ (abbiamo sottratto $V(q^*)$ solo per avere $E(q^*, 0) = 0$ nelle formule). Infatti il suo gradiente

$$E'(q, \dot{q}) \;=\; \begin{pmatrix} V'(q) + \text{termini quadratici nelle } \dot{q} \\ A(q^*)\,\dot{q} \end{pmatrix}$$

si annulla nell'origine e l'Hessiana

$$E''(0) \;=\; \begin{pmatrix} V''(q^*) & \mathbf{0_n} \\ \mathbf{0_n} & A(q^*) \end{pmatrix}$$

è ivi definita positiva perchè $A(q^*)$ e $V''(q^*)$ lo sono. Sviluppiamo ora E in serie

$$E(x) \;=\; x\cdot E''(0)\,x \;+\; \mathcal{O}(\|x^3\|) \tag{4.7.4}$$

ed usiamo il fatto che $E''(0)$ è definito positivo per stimarla. Se $e_1, \ldots, e_{2n} > 0$ sono gli autovalori di $E''(0)$, allora

$$\min_i e_i\,\|x\|^2 \;\le\; x\cdot E''(0)\,x \;\le\; \max_i e_i\,\|x\|^2$$

(la stima è immediata in una base ortonormale fatta di autovettori di $E''(0)$). Siccome nel compatto C i termini $\mathcal{O}(\|x\|^3)$ in (4.7.4) sono maggiorati da un termine del tipo $c_3\|x\|^3$, si ha

$$\Big(\tfrac{1}{2}\min_i e_i - c_3\|x\|\Big)\,\|x\|^2 \;\le\; E(x) \;\le\; \Big(\tfrac{1}{2}\max_i e_i + c_3\|x\|\Big)\,\|x\|^2\,.$$

Restringendo C, se necessario, possiamo fare in modo che $\|x\|$ sia così piccolo che il coefficiente di $\|x\|^2$ al primo membro di questa catena di disuguaglianze sia positiva, ottenendo così

$$c_4\|x\|^2 \;<\; E(x) \;<\; c_6\|x\|^2 \qquad \forall x \in C\,. \tag{4.7.5}$$

Usando queste due disuguaglianze e la conservazione dell'energia troviamo innanzittutto che, se $x_0 \in C$, allora

$$E(x_t) \;=\; E(x_0) \;<\; c_6\,\|x_0\|^2$$

e poi che allora

$$\|x_t\| \;<\; \sqrt{\frac{c_6}{c_4}}\,\|x_0\| \tag{4.7.6}$$

dalla quale segue (4.7.3).

2. Usiamo ora la *formula di variazione delle costanti*, secondo la quale la soluzione x_t dell'equazione (4.7.2) con dato iniziale x_0 si può scrivere nella forma

$$x_t \;=\; e^{\Lambda t}\Big[x_0 \;+\; \int_0^t e^{-\Lambda s} R(x_s)\,ds\Big]$$

(la verifica, per derivazione, è immediata). Segue

$$\|x_t - e^{\Lambda t}x_0\| \;\le\; \int_0^{|t|} \|e^{\Lambda(t-s)}R(x_s)\|\, ds\,.$$

Qui, il flusso lineare $e^{\Lambda t}$ è quello delle piccole oscillazioni (4.3.2); allora $\|e^{\Lambda t}x\| \le c_8\|x\|$ (uniformemente in t) per ogni vettore x e dunque

$$\|e^{\Lambda(t-s)}R(x_s)\| \;\le\; c_8\,\|R(x_s)\| \;\le\; c\,\|x_0\|^2$$

cosicché $\|x_t - e^{\Lambda t}x_0\| \le c\,|t|\,\|x_0\|^2$. ∎

Osservazioni e commenti: Il significato della stima (4.7.1) si capisce pensando la norma del dato iniziale come un piccolo parametro che si fa tendere verso zero:

$$\|x_0\| < \epsilon \quad\Longrightarrow\quad \|x_t - e^{\Lambda t}x_0\| < c\,|t|\,\epsilon^2\,.$$

Così, a parità di errore di approssimazione, al decrescere di ϵ si possono prendere tempi via via crescenti: per esempio, un errore $\sim \epsilon^{3/2}$ per $t \sim 1/\sqrt{\epsilon}$, etc.

Si noti che questa stima è ovvia, e non migliorabile, per t molto piccoli: la differenza di velocità fra il moto linearizzato e quello completo è dell'ordine di $\|x_0\|^2$, cioè di ϵ^2, cosicché la distanza fra i due punti crescerà, almeno inizialmente, come $\epsilon^2\,t$.

Quel che non è ovvio a priori è che la distanza fra le due soluzioni continui a crescere *linearmente* in t anche per t più grandi: in linea di principio, potrebbero esserci dei meccanismi di amplificazione della distanza; il motivo per il quale essi non sono presenti è che siamo vicini ad un minimo nondegenere dell'energia potenziale, cosicché moti che partono a distanza $\sim \epsilon$ dall'equilibrio restano a distanza $\sim \epsilon$ ed allora il resto $R(x_t)$ può essere stimato *uniformemente* in t (è la parte 1 della dimostrazione; lo studente interessato a capire il ruolo che gioca l'ipotesi di minimo nondegenere può svolgere gli esercizi più sotto).

Si noti che la stima (4.7.1) perde la sua utilità per tempi $\sim 1/\epsilon$, perchè sia il moto lineare (che è limitato) sia il moto del sistema completo (per la conservazione dell'energia) restano in una palla di raggio $\sim \epsilon$ centrata nell'origine, e dunque l'errore è al più $\sim \epsilon$.

Ciononostante, la stima (4.7.1) è sostanzialmente ottimale: si immagini che entrambi i sistemi, completo e linearizzato, facciano un moto periodico, con frequenze angolari che differiscono di $\sim \epsilon^2$; allora, dopo un tempo $t \sim \epsilon^{-1}$ i due moti sono completamente sfasati e la distanza fra di essi raggiunge le dimensioni del raggio dell'orbita. Risultati migliori, per tempi più lunghi, si possono ottenere solo guardando alla *distanza fra le orbite, non fra i moti.*

Esercizi 4.7.1 (i) Si dimostri che se l'origine è un equilibrio dell'equazione (4.7.2) (senza supporre nessuna altra proprietà) allora la stima (4.7.1) vale a patto di sostituire $|t|$ con $\exp(Kt)$, con K costante postiva.

(ii) Per la validità della stima (4.7.1), lineare in $|t|$, non basta supporre che q^* sia un minimo dell'energia potenziale, ma è necessario che esso sia nondegenere. Per capire le conseguenze della presenza di un autovalore nullo di $V''(q^*)$ si derivi l'analoga della (4.7.6) nel caso della Lagrangiana $L(q,\dot q) = \frac{1}{2}(\dot q^2 - q^4)$, $q \in \mathbb{R}$.

B. Lagrangiane non equivalenti che conducono alle stesse equazioni di Lagrange. Da scrivere.

4.8 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi

Esercizi *4.1.1* (ii) $E = T_2 - T_1 - V_0$. Dipende da cosa si intende per 'energia totale', ma E non è la somma $T + V_0$.

(iii) La derivata di E lungo una soluzione vale $\mathcal{Q}^*(q,\dot q)\cdot\dot q$. Nel caso girostatico $\mathcal{Q}^*(q,\dot q)\cdot\dot q = \Omega(q)\dot q\cdot\dot q = 0$ perchè Ω è antisimmetrica.

(iv) No: le forze derivanti da un potenziale generalizzato V_1 sono girostatiche se e solo se V_1 non dipende dal tempo; $\Omega(t)\dot q$ non ammette potenziale generalizzato. Si veda la soluzione dell'esercizio *2.5.2.iii*.

Esercizi *4.2.1* (i) $\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q\partial t} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial\dot q\partial t}T$ si annulla per velocità nulle.

(ii) Se V_1 dipende dal tempo, allora la forza da esso generata contiene anche termini indipenenti dalle velocità, che dunque si sommano a $\frac{\partial V}{\partial q}$ nel determinare le configurazioni di equilibrio. Si veda l'esercizio *2.5.2.iii*.

(iii) $\frac{\partial V}{\partial q}(q^*,t) = 0$ per tutti i t.

(v) Le stesse.

(vi) $F(X^*)$ deve essere ortogonale a $T_{X^*}Q$ perchè questo equivale all'annllarsi delle componenti lagrangiane delle forze attive $\mathcal{Q}$.

(vii) (a) I due poli, perchè la forza peso è verticale. (b) Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane (x,y,z) con origine nel centro della sfera ed asse z verticale (ascendente). Allora (x,y) possono essere usate come coordinate sia sulla emisfera superiore $z>0$ che su quella inferiore $z<0$; la parametrizzazione delle due emisfere è data da $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, ove R è il raggio della sfera. L'energia potenziale della forza peso è mgz e dunque, nei due sistemi di coordinate, $V_\pm(x,y) = \pm mg\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Gli Jacobiani

$$V'_\pm(x,y) = \pm\frac{mg}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$$

si annullano solo per $(x,y)=(0,0)$, cioè nei due poli.

(viii) Tutti i punti dei due cerchi orizzontali di altezza massima e minima.

(ix) Tutti i punti della superficie.

Esercizi *4.2.2* (i) $f''(0)+\frac{e^2B^2}{4m}>0$ (credo–non ho ricontrollato i conti.)

Esercizi *4.3.1* (iv) Il teorema di diagonalizzazione simultanea vale anche se V'' ha A–autovalori multipli. L'esistenza della base di A–autovettori implica che gli A–autovettori di un A–autovalore di molteplicità m formano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m. Dunque, in presenza di frequenze uguali, i modi normali non sono univocamente determinati. Osservazione:

Esercizi *4.3.2* (iii) I moti sono tutti periodici se e solo se $\omega_i/\omega_j\in\mathbb{Q}$ per tutti gli i e j. Da qui segue poi la condizione indicata.

Esercizi *4.4.3* (i) Traslazioni nella direzione di B.

(ii) Bisogna scrivere la Lagrangiana; si possono usare coordinate sferiche.

(iii) È importante specficarlo perchè se non non si sa qual è l'energia cinetica e non se ne può controllare l'invarianza.

(Versione 2005.1)

Capitolo 5

Sistemi Meccanici Classici

Questo capitolo contiene la descrizioni di varii sistemi meccanici classici (Kepler, due corpi, soluzioni triangolari del problema ristretto dei tre corpi, pendolo sferico, Euler–Poinsot, trottola di Lagrange, ...).

5.1 Il problema di Kepler

Il "problema di Kepler" riguarda il moto di un punto materiale P nel campo della forza gravitazionale creata da un centro fisso O, in quiete in un sistema inerziale. Sappiamo dal Capitolo 1 che, trattandosi di un campo centrale, il moto è piano o addirittura, se il momento angolare è nullo, rettilineo. Nel seguito restringiamo l'analisi al caso di moti con momento angolare non nullo (se no, non c'è molto da dire). L'analisi usa ... del moto in campo centrale, ...

A. Riduzione a un problema a un grado di libertà. In coordinate cilindriche (r, θ, z) con l'origine nel centro del campo la Lagrangiana è

$$L(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) \;=\; \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r)$$

con $V(r) = -k/r$, ove k è una costante positiva. In certe parti dell'analisi considereremo però il caso di un generico potenziale $V(r)$, così da mettere in luce le peculiarità del caso Kepleriano rispetto al caso di un generico campo di forze centrali a simmetria sferica. Ovviamente, le coordinate θ e z sono ignorabili ed i momenti coniugati

$$p_z \;=\; m\dot{z}\,, \qquad p_\theta \;=\; mr^2\dot{\theta}$$

sono costanti. Il procedimento di ignorazione di Routh conduce allora alla Lagrangiana ridotta

$$L_R(r, \dot{r}; p_\theta, p_z) \;=\; \frac{m}{2}\,\dot{r}^2 - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{p_z^2}{2m} - V(r)\,.$$

Poichè $\dot{z}$ è costante, se scegliamo il piano $z = 0$ coincidente con il piano dell'orbita abbiamo $\dot{z} = p_z = 0$ e la Lagrangiana ridotta diviene

$$L_l(r, \dot{r}) \;=\; \frac{m}{2}\,\dot{r}^2 - W_l(r)\,, \qquad W_l(r) \;=\; V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \tag{5.1.1}$$

ove abbiamo indicato con l il valore di p_θ. Si noti che, con questa scelta delle coordinate, l è la componente del momento angolare ortogonale al piano dell'orbita (che può essere positiva o negativa, a seconda che $\dot{\theta}$ sia positivo o negativo).

Il sistema ridotto di Lagrangiana (5.1.1) può essere riguardato come un punto materiale vincolato ad una guida unidimensionale e soggetto a forze conservative di potenziale $W_l(r)$ ("potenziale efficace"). Come si sa, l'integrazione dell'equazione del moto di questo sistema comporta il calcolo di un integrale e l'inversione della funzione così trovata (si veda il capitolo 1 di BGG). Pertanto, *l'integrazione del moto di un punto in un campo centrale è "riducibile alle quadrature.* [1] Infatti, assegnate le condizioni iniziali sono assegnati il momento angolare e dunque il piano dell'orbita ed il valore di l. Se si sa integrare il sistema ridotto, trovando $r = r(t)$, allora dalla conservazione del momento angolare si trova $\dot{\theta} = l[mr(t)^2]^{-1}$ e dunque la determinazione di $\theta(t)$ è ridotta al calcolo dell'integrale di una funzione nota. Per certi campi di forza, cioè per certi potenziali $V(r)$, i calcoli si possono fare esplicitamente del tutto o in parte, anche se spesso si incontrano funzioni ellittiche. Vedremo in dettaglio il caso Kepleriano.

B. Discussione qualitativa. Cominciamo con lo studiare qualitativamente il moto in campo centrale. Per essere definiti consideriamo solo il caso Kepleriano; sarà però evidente come analoghe considerazioni valgano più in generale per ogni scelta del potenziale $V(r)$.

Per studiare qualitativamente il sistema ridotto (5.1.1) basta determinare il grafico dell'energia potenziale efficace che, nel caso Kepleriano, è

$$W_l(r) \;=\; -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}\,.$$

Corrispondentemente, l'energia totale del sistema ridotto è

$$E(r,\dot{r}) \;=\; \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + W_l(r)\,.$$

Di fatto, questa è l'energia totale anche del sistema completo, così possiamo parlare semplicemente di "energia totale".

Se $l \neq 0$, W_l ha il grafico mostrato in figura: questo si vede osservando che per piccoli e grandi r dominano rispettivamente il secondo ed il primo termine, cosicché $W(r) \to +\infty$ per $r \to 0^+$ e $W_l(r) \to 0^-$ per $r \to \infty$; inoltre, W_l ha un solo minimo, nel punto

$$r_l \;=\; \frac{l^2}{km}$$

e si ha $W_l(r_l) = -\frac{k^2 m}{2l^2}$. Dal ritratto in fase, si vede che vi sono tre tipi di orbite del problema ridotto unidimensionale:

i. un equilibrio, se $E = W_l(r_l)$;
ii. orbite chiuse (moti periodici), se $W_l(r_l) < E < 0$;
iii. orbite illimitate (moti che vanno all'infinito per $t \to \pm\infty$), se $E > 0$.

Al moto del sistema ridotto con condizioni iniziali $(r_0, \dot{r}_0)$ corrispondono tutti e soli i moti del sistema completo con le condizioni iniziali $(r_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0)$ con qualunque θ_0 e con $\dot{\theta}_0 = \frac{l}{mr_0^2}$. Vediamo cosa si può dire di questi moti del sistema completo.

[1] Con terminologia classica, si dice che un sistema è ridotto alle quadtrature se l'integrazione delle equazioni del moto è effettuata a meno del calcolo di qualche integrale e dell'inversione di qualche funzione.

i. Moti circolari. In corrispondenza all'equilibrio del sistema ridotto vi sono evidentemente delle orbite circolari del sistema completo: $r(t) = r_l$. Queste orbite sono percorse con velocità costante $\dot\theta_0 = \frac{l}{mr_l^2} = \frac{mk^2}{l^3}$.

ii. Moti limitati. In corrispondenza ai moti periodici del sistema ridotto, vi sono i moti del sistema completo che restano limitati: se indichiamo con $r_\pm(E,l)$ i punti di inversione del moto unidimensionale, che sono le due soluzioni dell'equazione $W_l(r) = E$, allora

$$r_-(E,l) \ < \ r(t) \ < \ r_+(E,l) \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Dunque, il moto ha luogo in un anello di raggi r_- ed r_+. Quando il punto si trova alla distanza minima si dice che si trova al *pericentro*, quando si trova alla distanza massima si dice che si trova all'*apocentro*.[2] Come sono fatte queste orbite? In particolare, si può dire se siano chiuse o no?

Esaminiamo questo problema più in generale, per le orbite limitate in un generico campo centrale (queste orbite corrispondono alle orbite del sistema ridotto nell'intorno di un minimo del potenziale efficace). Durante il moto la coordinata radiale varia periodicamente fra i suoi valori minimo e massimo, con periodo

$$T(E,l) \ = \ \sqrt{2m}\int_{r_-(E,l)}^{r_+(E,l)} \frac{dr}{\sqrt{E - W_l(r)}}\,.$$

Contemporaneamente, la coordinata angolare avanza in modo monotono. Siccome $\dot\theta = \frac{l}{mr^2}$, l'avanzamento di θ durante ogni periodo del moto radiale, per esempio fra due passaggi successivi al pericentro, è sempre lo stesso[3] ed è dato da

$$\Theta(E,l) \ = \ \int_0^{T(E,l)} \frac{l}{mr^2(t)}dt\,.$$

Con evidenza, allora, l'orbita è chiusa se e solo se dopo un certo numero intero n_1 di periodi del moto radiale, l'angolo θ si incrementa di un certo multiplo intero n_2 di 2π, cioè se

$$n_1\,\Theta(E,l) \ = \ 2\pi n_2\,.$$

Così, tutto quello che si può dire sulla base di questa analisi qualitativa è che se $\Theta(E,l)/(2\pi)$ è razionale allora l'orbita è chiusa e se no l'orbita non si chiude mai e ha una forma "a rosetta" (si potrebbe vedere, di più, che in questo caso l'orbita è densa nell'anello).

Ci si può aspettare che, eccetto forse per speciali scelte di $f(r)$, la quantità $\Theta(E,l)$ varii in modo continuo al variare di E e di l e dunque assuma sia valori razionali che irrazionali; corrispondentemente, per certi valori di E e di l le orbite sarebbero periodiche e per altri no. Però, come è ben noto (e come vedremo fra poco), tutte le orbite limitate del problema di Kepler e anche della forza elastica sono chiuse. Questo significa che, in questi due casi speciali, $\Theta(E,l)$ è costante (e anzi vale 2π). È un classico risultato, noto come "Teorema di Bertrand", che le forze Kepleriana ed elastica sono le uniche due forze centrali per le quali tutte le orbite limitate sono periodiche. In tutti gli altri casi, vi sono sia orbite periodiche che orbite non periodiche. (La dimostrazione del Teorema di Bertrand si può trovare in *MMMC* di Arnold, ma è piuttosto tecnica e non molto illuminante.)

[2] Perielio e afelio per un punto che si muove attorno al sole, perigeo ed apogeo per un punto attorno alla terra, etc.

[3] *Esercizio:* Sia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodica di periodo T. Mostrare che le soluzioni di $\dot\xi = g(t)$ soddisfano $\xi(t+T) = \xi(t) + T\overline{g}$, ove $\overline{g}$ è la media di g su un periodo.

iii. Moti illimitati. Infine, le orbite non limitate del problema ridotto corrispondono a moti non limitati del sistema completo. Limitiamoci di nuovo al solo caso Kepleriano, per il quale questi moti si hanno per energie $E \geq 0$. L'analisi del sistema ridotto indica che la coordinata radiale tende in modo monotono a $+\infty$ per $t \to \pm\infty$ e raggiunge la distanza minima $r_{\min}$ una sola volta. Dunque, il punto materiale arriva dall'infinito, raggiunge il pericentro e torna all'infinito.

Esercizi 5.1.1 Dimostrare che, se $\frac{\partial^2\Theta}{\partial E \partial l} \neq 0$, allora sia le orbite periodiche che quelle non periodiche sono dense nella parte di spazio degli atti di moto che contiene i moti limitati, e che quelle non periodiche hanno misura piena.

C. Traiettorie Kepleriane. Nel caso Kepleriano, si possono determinare le traiettorie (anche se non le leggi orarie) con metodi elementari. A tale scopo si usa il fatto che, come sappiamo dalla sezione 1.2.D (si veda la dimostrazione della Proposizione 15), in ogni moto centrale con momento angolare non nullo la funzione $t \mapsto \theta(t)$, pensata a valori in $\mathbb{R}$, è monotona e dunque invertibile. Se indichiamo con $t = t(\theta)$ la sua inversa e definiamo la funzione

$$\tilde{r}(\theta) \;:=\; r(t(\theta))\,,$$

allora l'equazione della traiettoria è data da $r = \tilde{r}(\theta)$. Vale ora il seguente fatto cinematico:

Lemma ("Formula di Binet") *Qualunque sia la forza centrale $f(|x|)\frac{x}{|x|}$, lungo ogni moto con momento angolare l non nullo la funzione $\tilde{r}(\theta)$ soddisfa*

$$\frac{l^2}{m\tilde{r}^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{\tilde{r}}\Big) + \frac{1}{\tilde{r}}\right] \;=\; -\,f(\tilde{r})\,. \tag{5.1.2}$$

Dimostrazione. La coordinata radiale $r(t)$ è soluzione dell'equazione di Lagrange per la Lagrangiana ridotta $L_l = m\dot{r}^2/2 - W_l(r)$. Siccome $W_l(r) = V(r) + l^2/(2mr^2)$ ed $f(r) = -\frac{dV}{dr}$ (si veda la (2.2.3), questa equazione è

$$m\ddot{r} \;=\; f(r) + \frac{l^2}{mr^3}\,. \tag{5.1.3}$$

Esprimiamo ora $\ddot{r}$ in termini di $\tilde{r}$ e delle sue derivate rispetto a θ. Siccome $r(t) = \tilde{r}(\theta(t))$, derivando una prima volta abbiamo

$$\dot{r} \;=\; \dot{\theta}\,\frac{d\tilde{r}}{d\theta} \;=\; \frac{l}{m\tilde{r}^2}\,\frac{d\tilde{r}}{d\theta} \;=\; -\frac{l}{m}\,\frac{d}{d\theta}\Big(\frac{1}{\tilde{r}}\Big) \tag{5.1.4}$$

e derivando ancora

$$\ddot{r} \;=\; \frac{d}{dt}\left[-\,\frac{l}{m}\,\frac{d}{d\theta}\Big(\frac{1}{\tilde{r}}\Big)\right] \;=\; -\,\frac{l}{m}\dot{\theta}\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{\tilde{r}}\Big) \;=\; -\,\frac{l^2}{m^2\tilde{r}^2}\,\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{\tilde{r}}\Big)\,.$$

Inserendo questa espressione nella (5.1.3) si trova la (5.1.2). ■

Grazie alla presenza del fattore r^{-2} al secondo membro, la formula di Binet rende semplicissima la determinazione delle orbite nel campo Kepleriano $f(r) = -k/r^2$. Siccome, come sappiamo, per i moti a momento angolare non nullo r non si annulla mai, la formula di Binet dà

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{\tilde{r}}\Big) + \frac{1}{\tilde{r}} \;=\; \frac{mk}{l^2}\,.$$

Questa è un'equazione differenziale lineare non omogenea per $\frac{1}{r}$ e dunque il suo integrale generale si ottiene subito (integrale generale omogenea associata + integrale particolare):

$$\frac{1}{\tilde{r}(\theta)} \;=\; A\cos(\theta-\theta_0)+\frac{mk}{l^2}\,, \qquad A\geq 0\,, \quad \theta_o\in S^1\,.$$

Conviene scrivere $A=\frac{mk}{l^2}e$, con $e\geq 0$, e riguardare e invece di A come costante di integrazione. Si trova allora che le traiettorie dei moti Kepleriani a momento angolare non nullo sono date da

$$\tilde{r}(\theta) \;=\; \frac{\frac{l^2}{mk}}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}\,, \qquad e\geq 0\,, \quad \theta_o\in S^1\,. \tag{5.1.5}$$

Questa è l'equazione di una conica di 'parametro' $p=\frac{l^2}{mk}$ ed eccentricità e avente un fuoco nell'origine delle coordinate (si veda BGG, Appendice A al Capitolo 2). Si tratta di un cerchio se $e=0$, di un'ellisse se $e<1$, di una parabola se $e=1$, di un'iperbole se $e>1$. La costante θ_0 determina l'orientazione della conica nel piano. Ricordiamo che, per un ellisse di semiassi $a\geq b$, parametro ed eccentricità sono

$$p \;=\; \frac{b^2}{a}\,, \qquad e \;=\; \sqrt{1-\Big(\frac{b}{a}\Big)^2}\,.$$

Per le orbite Kepleriane, le quantità e e θ_o si possono esprimere in termini delle condizioni iniziali $(r_0,\theta_0,\dot{r}_0,\dot{\theta}_0)$, ma è sufficiente qui collegare l'eccentricità ai due integrali primi, energia e momento angolare. Si trova così

Proposizione 58 *L'eccentricità delle orbite Kepleriane di energia E e momento angolare $l\neq 0$ è*

$$e \;=\; \sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}\,. \tag{5.1.6}$$

Pertanto, la traiettoria è
- *un cerchio se $E=-\frac{mk^2}{2l^2}$*
- *un'ellisse se $-\frac{mk^2}{2l^2}<E<1$*
- *una parabola se $E=0$*
- *un'iperbole se $E>0$.*

Dimostrazione. In un moto con momento angolare non nullo vi è una distanza minima $r_o>0$ dal centro del campo di forza (il pericentro). In tale punto la velocità radiale $\dot{r}$ si annulla e così l'energia uguaglia il solo potenziale efficace: $E=W_l(r_o)$ ovvero

$$E \;=\; -\frac{k}{r_o}+\frac{l^2}{2mr_o^2}\,.$$

Questa è un'equazione algebrica di secondo grado in r_o che ha le due soluzioni

$$r_o^{\pm} \;=\; \frac{\frac{l^2}{mk}}{1\pm\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}}\,.$$

La distanza minima è allora $r_o=r_o^{+}$. D'altra parte, l'equazione della traiettoria (5.1.5) dà $r_0=\frac{\frac{l^2}{mk}}{1-e}$. Confrontando si trova la (5.1.6). ■

Osservazione: Legge oraria. Mentre è facile determinare le orbite del problema di Kepler, determinare la legge oraria $t \mapsto (r(t), \theta(t))$ è molto più difficile. Quel che è facile fare, una volta che si possiede l'equazione (5.1.5) della traiettoria, è trovare l'inversa $\theta \mapsto t(\theta)$ di $\theta(t)$. Da $\dot{\theta} = l/(mr^2)$ segue (prendendo per semplicità $\theta_o = 0$)

$$dt \;=\; \frac{m}{l}\, r^2(\theta) d\theta \;=\; \frac{\frac{l^3}{mk^2}}{(1+e\cos\theta)^2} d\theta$$

e dunque il tempo necessario ad andare dal pericentro al punto di coordinata θ è

$$t(\theta) \;=\; \frac{l^3}{mk^2} \int_0^{\theta} \frac{1}{(1+e\cos\theta)^2} d\theta\,.$$

Questo integrale si calcola con metodi elementari, ma la cosa non è di particolare utilità perchè quello che in realtà serve nelle applicazioni è l'angolo θ in funzione del tempo, e l'inversione della funzione $\theta(t)$ non si riesce a fare in termini di funzioni note. Si conosce uno sviluppo in serie della funzione $\theta(t)$, la cosiddetta "serie di Lagrange", che però converge solo per valori non troppo elevati dell'eccentricità. (Vedere ????????)

Esercizi 5.1.2 Dedurre la classificazione delle coniche Kepleriane in funzione di E ed l senza calcolare l'eccentricità (5.1.6), ma appoggiandosi (i) sul fatto che le traiettorie sono coniche e (ii) sui risultati della discussione qualitativa del sistema ridotto.

D. Le orbite ellittiche e le leggi di Kepler. Consideriamo adesso più in dettaglio le orbite limitate, nel caso Kepleriano.

Proposizione 59 *Per le orbite Kepleriane ellittiche, il semiasse maggiore a ed il periodo T dipendono solo dall'energia:*

$$a \;=\; -\frac{k}{2E}\,, \qquad T \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\, a^{3/2}\,. \tag{5.1.7}$$

(NB: $E < 0$!)

Dimostrazione. Per un ellisse, $b = \sqrt{pa}$. Siccome $p = \frac{l^2}{mk}$, abbiamo $b = \sqrt{al^2/(mk)}$. Dunque, l'eccentricità $\sqrt{1-(b/a)^2}$ è

$$e \;=\; \sqrt{1 - \frac{l^2}{mka}}\,.$$

Uguagliando questa espressione alla (5.1.6) si trova $a = -\frac{k}{2E}$.

Il periodo di un'orbita ellittica si calcola facilmente, senza tanti conti, sfruttando la costanza della velocità areolare $\dot{A} = r^2\dot{\theta}$ (si veda la sezione 1.3.D): poichè l'area dell'ellisse di semiassi maggiore a e minore b è πab, si ha

$$T \;=\; \frac{\pi ab}{\dot{A}} \;=\; 2\pi\frac{abm}{l}\,.$$

Inserendo l'espressione di b in funzione di a data sopra si trova la (5.1.7). ■

Esercizi 5.1.3 (Leggi di Kepler.) Dedurre dalla trattazione precedente le tre leggi di Kepler: se il sole è in quiete e i pianeti sono punti materiali non interagenti l'uno con l'altro allora le orbite limitate

K1. sono ellissi con il sole in un fuoco;

K2. sono percorse con velocità areolare costante;
K3. il quadrato del periodo è proporzionale al cubo del semiasse maggiore, e la costante di proporzionalità è la stessa per tutti i pianeti.

E. Integrali primi delle forze centrali e del problema di Kepler. L'integrabilità del punto in un campo centrale è legata all'esistenza di quattro integrali primi, che provengono dalla conservazione dell'energia e del momento angolare. Poichè lo spazio degli atti di moto ha dimensione sei, le superfici di livello di questi integrali primi hanno (genericamente) dimensione due. Vogliamo capire come esse siano fatte.

Proposizione 60 *Supponiamo che, in un campo di forze centrali, per certi valori E ed l di energia e momento angolare tutte le orbite siano limitate.*[4] *Allora, la superficie di livello di energia E e momento angolare l è diffeomorfa o al toro $\mathbb{T}^2$ o (eccezionalmente) ad un cerchio.*

Dimostrazione. La superficie di livello è

$$\Sigma_{E,l} \;=\; \Big\{(r,\theta,z,\dot r,\dot\theta,\dot z)\;:\; mr^2\dot\theta = l\,,\; \frac{1}{2}m\dot r^2 + W_l(r) = E\,,\; z=0\,,\; \dot z = 0\Big\}\,.$$

Poichè i valori di z e $\dot z$ sono fissati e non vi è alcuna condizione su θ, che dunque assume tutti i suoi valori, abbiamo

$$\Sigma_{E,M} \;=\; \Big\{\theta\in S^1\Big\}\times\Big\{(r,\dot r,\dot\theta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\;:\;\dot\theta = \frac{l}{mr^2}\,,\;\frac{1}{2}m\dot r^2 + W_l(r) = E\Big\}$$

Così, $\Sigma_{E,M}$ è il prodotto del cerchio $\{\theta\in S^1\}$ e dell'insieme

$$C \;=\; \Big\{(r,\dot r,\dot\theta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\;:\;\dot\theta = \frac{l}{mr^2}\,,\;\frac{1}{2}m\dot r^2 + W_l(r) = E\Big\}$$

che, come ora mostriamo, è diffeomorfo o ad un cerchio o ad un punto. A tale scopo basta osservare che, nel piano $(r,\dot r)$, gli insiemi definiti da $\frac{1}{2}m\dot r^2 + W_l(r) = E$ sono o curve chiuse o punti. Infatti, essi non sono altro che le orbite del sistema ridotto. L'analisi qualitativa della sezione B mostra che queste orbite sono chiuse, e sono punti in corrispondenza ai minimi del potenziale efficace. Di conseguenza, l'insieme C nello spazio $(r,\dot r,\dot\theta)$ si proietta o su una curva chiusa o su un punto nel piano $(r,\dot r)$. Poichè per ogni $(r,\dot r)$ c'è un solo valore di $\dot\theta$, dato ca $\frac{l}{mr^2}$, anche C è una curva chiusa, o un punto, e quindi è diffeomorfa ad un cerchio, o ad un punto. Questo completa la dimostrazione. ∎

Il fatto che le superfici di livello degli integrali primi, almeno in una certa regione dello spazio degli atti di moto, siano (diffeomorfi a) tori di una qualche dimensione è una situazione che incontreremo in tutti i sistemi "integrabili" studiati in questo capitolo.

Nel caso del sistema Kepleriano c'è però di più. Il fatto che tutti i moti limitati siano periodici, e che dunque le orbite siano curve chiuse, fa sospettare che in questo caso esista un quinto integrale primo indipendente, le cui superfici di livello "facciano a fette" i tori, producendo insiemi invarianti diffeomorfi a cerchi. Le orbite allora coincidono con le superfici di livello dei cinque integrali primi (come avviene per i sistemi a un grado di libertà, nel qual caso esse sono le curve di livello dell'energia). In effetti, questo è proprio quello che succede:

Proposizione 61 *Il vettore*

$$A(x,v) \;=\; v\times M - k\,\frac{x}{|x|}$$

è costante lungo le soluzioni del problema di Kepler $m\ddot x = -kx/|x|^3$.

[4] Questo avviene, almeno per certi valori di E, se l è tale che il potenziale efficace W_l abbia un minimo.

Dimostrazione. La verifica di questo fatto si esegue facilmente se si usano coordinate polari nel piano dell'orbita: siccome $\dot{e}_r = \dot{\theta} e_\theta$ e usando $\dot{v} = -\frac{k}{mr^2} e_r$, si ha

$$\dot{A} = \dot{v} \times M - k\dot{e}_r = -\frac{k}{mr^2} e_r \times M - k\dot{\theta} e_\theta .$$

Siccome e_r ed M sono ortogonali fra loro ed ortogonali ad e_θ, si ha $e_r \times M = \pm l e_\theta$. Con la regola della mano destra si vede che il segno giusto è quello negativo, cosicché $\dot{A} = \frac{kl}{mr^2} e_\theta - k\dot{\theta} e_\theta = 0$. ■

Il vettore A si chiama *vettore di Laplace.*[5] Naturalmente, non tutte e tre le componenti di A sono indipendenti da E e da M. Però A produce comunque un ulteriore integrale primo indipendente. Il significato di questo integrale primo si capisce osservando che il vettore di Laplace punta verso l'apocentro. Per verficare questa affermazione basta calcolare A in un qualunque punto, per esempio al passaggio all'apocentro, quando $\dot{r} = 0$ e dunque v è interamente tangenziale. Allora $v \times M$ è parallelo ad e_r e dunque tutto A è parallelo ad e_r, cioè è parallelo alla direzione dell'apocentro.

Così, il vettore di Laplace fissa la direzione dell'apocentro. Questo spiega perchè, nel caso Kepleriano, le orbite limitate siano chiuse e non a rosetta. Si ricorderà che si è detto che, come stabilito dal teorema di Betrand, fra tutti i potenziali centrali, solo Kepler e la forza elastica hanno la proprietà che tutte le orbite limitate sono chiuse. Questo significa che tutti gli altri campi centrali *non* hanno un quinto integrale primo.

Si immagini allora di aggiungere una piccola perturbazione al campo Kepleriano agente su un pianeta. Se questa perturbazione è anch'essa centrale, ma non proporzionale ad r^{-2}, il campo di forza risultante sarà un campo centrale nel quale le orbite limitate sono del tipo a rosetta. Di conseguenza, la direzione del perielio del pianeta non sarà più fissa, ma ruoterà (lentamente, se la perturbazione è piccola). È questa l'origine della *precessione del perielio* di un pianeta, dovuta alla presenza di perturbazioni.

5.2 Il corpo rigido di Euler–Poinsot e quello 'libero'.

A. Il sistema. Studiamo ora un caso di dinamica dei corpi rigidi, semplice ma importante perchè introduce idee di portata più generale sulla dinamica dei corpi rigidi. Il sistema è costituito da un corpo rigido che, in un certo riferimento Σ,

- ha un punto fisso O;
- non è soggetto a forze attive (o, più generalmente, soggetto a forze attive il cui il momento risultante rispetto al punto fisso è nullo).

Chiameremo questo sistema *corpo rigido di Euler–Poinsot.* Come sappiamo dalla sezione 3.6, questo sistema ha tre gradi di libertà, la sua varietà delle configurazioni è SO(3) e l'equazione del moto è la seconda equazione cardinale

$$\frac{d}{dt} M_0 = 0 \tag{5.2.1}$$

ove naturalmente M_O è il momento angolare in Σ del corpo rispetto al punto O. È sottinteso che la derivata temporale è fatta rispetto a Σ (quando serve, lo prenderemo con origine nel punto fisso e lo indicheremo $\Sigma = \{0; e_x, e_y, e_z\}$).[6]

[5] O di Runge–Lenz, o di molti altri.

[6] Per capire perchè la (5.2.1) sia l'equazione del moto del corpo si ricordi che il momento angolare è legato alla sua velocità angolare ω dalla relazione $M = \mathfrak{I}\omega$ e che, a sua volta, la velocità angolare è legata alle derivate della matrice che dà l'orientamento del corpo. Pertanto, la (5.2.1) è un'equazione del secondo ordine per la matrice che specifica l'orientamento del corpo nello spazio.

A prima vista questo sistema potrebbe apparire piuttosto artificale e vale dunque la pena di spiegarne l'interesse. Innanzittutto vi è un altro caso, realistico, che ad esso si riduce: quello di un corpo rigido non vincolato e soggetto all'azione della forza peso (un oggetto lanciato per aria). Questo sistema, che chiameremo corpo rigido "libero", ha sei gradi di libertà e le sue equazioni del moto sono entrambe le equazioni cardinali (3.5.7),(3.5.8). La risultante delle forze peso agenti sui punti del corpo è il peso totale mg del corpo, ove m è la massa del corpo e g è il vettore accelerazione di gravità. Il momento risultante delle forze peso rispetto al baricentro è però nullo: $\sum_h (P_h - B) \times m_h g = 0$ perchè $\sum_h (P_h - B) = 0$ in virtù della definizione di baricentro. Dunque le equazioni cardinali (3.5.7),(3.5.8), scritte con il punto O coincidente con il baricentro B, sono

$$m a_B = mg\,, \qquad \frac{d}{dt} M_B = 0\,.$$

La prima mostra che il baricentro del corpo si muove come un punto soggetto alla sola forza di gravità: dunque lungo una parabola, o una retta, determinata dalle condizioni iniziali. Siccome poi $M_B = \mathcal{I}_B \omega$, la seconda equazione non dipende dal moto del centro di massa del corpo. Dunque, *moto del centro di massa ed orientamento del corpo sono disaccoppiati, ed il secondo evolve come in un sistema di Euler–Poinsot.* Per una descrizione più precisa si vedano gli esercizi.

Un secondo motivo di interesse del sistema di Euler–Poinsot è che esso costituisce una prima approssimazione per lo studio di situazioni nelle quali sul corpo agiscono delle deboli forze attive. Questa situazione è incontrata, per esempio, in Meccanica Celeste: si pensi, per esempio, alla debole coppia esercitata dall'attrazione gravitazionale di sole e luna sul rigonfiamento equatoriale della terra, che produce il fenomeno della precessione degli equinozi. Le equazioni del moto di un corpo rigido soggetto a forze attive, esclusi pochi casi, non sono integrabili e la dinamica è conseguentemente molto complessa (e sostanzialmente non compresa). Se però le forze sono deboli, si può cercare di studiare il sistema con tecniche di tipo perturbativo, pensandolo come una piccola perturbazione del sistema di Euler–Poinsot e producendo una descrizione dei moti approssimata, ma accurata (cioè, con piccoli errori). Per un tale studio, che permette per esempio di spiegare anche quantitativamente la precessione degli equinozi terrestre, è indispensabile possedere innanzittutto una comprensione completa del sistema imperturbato, quello di Euler–Poinsot.

Esercizi 5.2.1 Si consideri un corpo rigido "libero". Sia $\Sigma' = \{B; e'_x, e'_y, e'_z\}$ un sistema di riferimento con l'origine nel suo centro di massa e che mantiene gli assi paralleli ad un riferimento Σ fisso nello spazio. Mostrare che l'equazione del moto in Σ' è $\frac{dM'_B}{dt}\Big|_{\Sigma'} = 0$. Dunque *il corpo esegue un moto di Euler–Poinsot in un sistema di riferimento che trasla col baricentro senza ruotare.*

B. Integrali primi. Equazione di Euler. D'ora in poi sottintenderemo che momento angolare ed operatore di inerzia siano relativi al punto fisso O e scriviamo M ed $\mathcal{I}$ invece di M_O e $\mathcal{I}_O$.

L'equazione del moto del sistema di Euler–Poinsot, $\frac{d}{dt}M = 0$, significa che durante il moto *il momento angolare del corpo è costante nello spazio.* Dunque il sistema ha tre integrali primi: le tre componenti M_x, M_y, M_z del momento angolare nello spazio. Siccome i vincoli sono fissi, a questi si aggiunge anche l'energia cinetica. In totale vi sono quindi quattro integrali primi. Si può mostrare che essi sono indipendenti (in larga parte dello spazio delle fasi).

Dunque, lo spazio delle fasi, di dimensione sei, è foliato in superfici bidimensionali invarianti, sulle quali restano le soluzioni. Come vedremo, è possibile ottenere una descrizione qualitativa, ma molto precisa, del moto del corpo usando gli integrali primi.

Nel corso di questa analisi è anche utile focalizzarsi sul moto *relativo al corpo* del vettore momento angolare: siccome M resta fisso nello spazio, sapere come si muove nel corpo dà delle informazioni sul modo in cui il corpo si muove nello spazio.

La derivata temporale di M relativamente al corpo (cioè, ad un riferimento solidale al corpo, per esempio uno principale di inerzia) è legata alla sua derivata relativamente allo spazio dalla formula (2.3.6)

$$\frac{dM}{dt}\Big|_{\text{spazio}} = \frac{dM}{dt}\Big|_{\text{corpo}} + \omega \times M\,.$$

La (5.2.1) diviene dunque

$$\frac{dM}{dt}\Big|_{\text{corpo}} + \omega \times M = 0\,.$$

Se indichiamo la derivata di M nel corpo con $\dot{M}$ e ricordiamo che $M = \mathcal{I}\omega$ otteniamo dunque l'equazione differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}^3$

$$\dot{M} + \mathcal{I}^{-1}M \times M = 0\,. \tag{5.2.2}$$

Equivalentemente, siccome $M = \mathcal{I}\omega$ e l'operatore di inerzia $\mathcal{I}$ è costante nel corpo,

$$\mathcal{I}\dot{\omega} = \omega \times \mathcal{I}\omega\,. \tag{5.2.3}$$

Quest'ultima equazione si chiama *equazione di Euler*.

Osservazione: L'equazione di Euler è un'equazione che, seppur nonlineare, si può integrare con facilità. (O almeno senza troppe difficoltà: nel caso più complicato, quello di un corpo con tre momenti di inerzia distinti, la soluzione contiene le funzioni ellittiche di Jacobi, che sono facili da trattare). Una volta trovata $t \mapsto \omega_t$, per ottenere il moto del corpo nello spazio, cioè la matrice $\mathcal{R}_t$ che ne specifica l'orientamento, bisognerebbe poi integrare l'equazione $\dot{\mathcal{R}}_t\mathcal{R}_t^T = \Omega_t$, ove Ω_t è la matrice antisimmetrica legata alla velocità angolare ω_t dalla $\Omega_t = \omega_t\times$, e questo presenta delle difficoltà notevoli (a meno che il corpo non abbia due momenti di inerzia uguali, come vedremo). Tuttavia, per una comprensione qualitativa dei moti, non sarà neppure necessario integrare l'equazione di Euler.

Esercizi 5.2.2 (i) La costanza del momento angolare nello spazio e dell'energia cinetica, lungo i moti del sistema di Euler–Poinsot, implica la conservazione di $\|\mathcal{I}\omega\|^2$ e di $\frac{1}{2}\omega \cdot \mathcal{I}\omega$ lungo le soluzioni dell'equazione di Euler. Verificarlo con un calcolo diretto.

(ii) Corrispondentemente, l'equazione di Euler per il momento angolare (5.2.2) ha i due integrali primi $\|M\|^2$ ed $E = \frac{1}{2}M \cdot \mathcal{I}^{-1}M$. Dove sono indipendenti?

(iii) Scrivere le equazioni di Euler come tre equazioni scalari, in una base principale di inerzia.

C. Rotazioni uniformi. Moto di un corpo 'sferico'. Cominciamo l'analisi con lo studiare la possibilità di un tipo di moto molto semplice. Si dice che un moto di un corpo rigido con un punto fisso O è una *rotazione uniforme* se il vettore velocità angolare ω è costante nello spazio. Il moto del corpo è allora una rotazione uniforme di asse $O\omega$ ed è, con evidenza, un moto periodico. Ci domandiamo se, e in quali casi, un corpo rigido di Euler–Poinsot esegua delle rotazioni uniformi.

Come si sa dalla sezione 2.3.A, il vettore velocità angolare ha la stessa derivata temporale rispetto ad un riferimento spaziale e ad uno solidale al corpo. Pertanto, le rotazioni uniformi possono equivalentemente essere caratterizzate come i moti nei quali il vettore velocità angolare è costante *nel corpo.* Quindi, per determinare le rotazioni uniformi del sistema di Euler–Poinsot basta determinare gli equilibri dell'equazione di Euler $\mathcal{I}\dot{\omega} = \omega \times \mathcal{I}\omega$. Questi sono i punti $\omega \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\omega \times \mathcal{I}\omega \;=\; 0\,,$$

cioè tali che ω sia parallelo ad $\mathcal{I}\omega$, cioè gli autovettori di $\mathcal{I}$ che, si sa, sono diretti come gli assi principali di inerzia. Dunque *il moto di Euler–Poinsot è una rotazione uniforme se e solo se la velocità angolare (all'istante iniziale) è parallela ad uno degli assi principali di inerzia.*

Si capisce, a questo punto, che la dinamica del sistema è molto diversa, a seconda delle proprietà di simmetria del corpo. Se infatti il corpo è *cineticamente sferico*, nel senso che i tre momenti principali di inerzia sono uguali, allora l'operatore di inerzia è multiplo dell'identità e tutte le direzioni sono assi principali di inerzia. Dunque *tutti i moti di un sistema di Euler–Poinsot cineticamente sferico sono rotazioni uniformi* (un fatto ben noto a chi abbia mai lanciato una palla).

Se invece i tre momenti principali di inerzia del corpo sono tutti distinti, allora gli assi principali di inerzia sono univocamente determinati e dunque vi sono solo tre possibili direzioni nel corpo attorno al quale il corpo esegue una rotazione uniforme. Vorremmo capire come sono fatti tutti gli altri moti.

Esercizi 5.2.3 (i) Quali sono le rotazioni uniformi di un corpo rigido di Euler–Poinsot simmetrico (due momenti principali di inerzia uguali)?

(ii) Il fatto che, nel caso sferico, tutti i moti di Euler–Poinsot siano periodici riflette il fatto che in questo caso esistono cinque integrali primi indipendenti. Quali sono?

(iii) *Esperimento.* Per osservare sperimentalmente il moto di Euler–Poinsot si può lanciare in aria un corpo rigido. Si provi a farlo con un corpo che ha i tre momenti principali di inerzia (ben) distinti. Si riesce ad osservare le rotazioni uniformi attorno a tutti e tre gli assi principali di inerzia? Si osserva uno strano fenomeno quando si cerca di metterlo in rotazione attorno ad uno dei tre assi. Quale? Questo fenomeno si osserva anche quando si sperimenta con un corpo simmetrico?

D. Moto di un corpo ‘simmetrico’. Come primo passo verso lo studio dei moti del sistema di Euler–Poinsot consideriamo il caso speciale di un corpo *cineticamente simmetrico*, che ha due dei tre momenti principali di inerzia uguali, diciamo $I_1 = I_2 \neq I_3$. In questo caso è infatti possibile, e facile, caratterizzare tutti i moti. Essi sono i moti che si osservano lanciando in aria una trottola o un pallone da rugby (se l'attrito dell'aria e l'elasticità del pallone non giocano un ruolo importante, naturalmente).

La prima osservazione che si può fare è che, se $I_1 = I_2$, allora anche *le componenti M_3 ed ω_3 del momento angolare e dela velocità angolare nella direzione dell'asse di simmetria e_3 sono integrali primi.* Infatti, in una base principale di inerzia $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ è $\mathcal{I} = \mathrm{diag}\,(I_1, I_1, I_3)$ e dunque l'equazione di Euler si scrive

$$\begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_1\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_1\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} (I_1 - I_3)\,\omega_2\omega_3 \\ (I_3 - I_1)\,\omega_2\omega_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2.4}$$

Dunque $\dot{\omega}_3 = 0$ e quindi ω_3 ed $M_3 = I_3\omega_3$ sono costanti.

Questi due integrali primi non sono indipendenti dagli altri quattro già trovati (si veda un esercizio più sotto) ma il loro uso ci dà un'immediata informazione sui moti: siccome M è costante nello spazio, la costanza di M_3 significa che l'angolo fra l'asse di simmetria e_3 e la direzione di M è costante. Dunque *l'asse di simmetria e_3 si muove su un cono circolare di asse M*. Un moto di questo tipo si chiama, in generale, *precessione* attorno alla direzione del momeno angolare. Possiamo però dire ancora di più. Sviluppando il momento angolare nella base pricipale di inerzia troviamo

$$\begin{aligned} M &= M_1e_1 + M_2e_2 + M_3e_3 \;=\; I_1(\omega_1e_1 + \omega_2e_2) + M_3e_3 \\ &= I_1(\omega - \omega_3e_3) + M_3e_3 \;=\; I_1\omega + \Big(1 - \frac{I_1}{I_3}\Big)M_3e_3 \end{aligned}$$

e dunque

$$\omega \;=\; \frac{1}{I_1}M + \frac{I_1 - I_3}{I_1I_3}\,M_3\,e_3 \tag{5.2.5}$$

Dunque, nel moto, la velocità angolare è la somma di due vettori, il primo costante nello spazio ed il secondo costante nel corpo. Un moto di questo tipo si chiama una *precessione regolare.*

Mettendo assieme queste informazioni si capisce come si muove il corpo: l'asse di simmetria e_3 precede attorno alla direzione del momento angolare con frequenza

Figura 1

$$\Omega_p \;=\; \frac{\|M\|}{I_1} \tag{5.2.6}$$

(infatti $\dot{e}_3 = \omega \times e_3 = \frac{1}{I_1}M \times e_3$) ed allo stesso tempo il corpo ruota uniformemente attorno ad e_3 con frequenza[7]

$$\Omega_r \;=\; \frac{I_1 - I_3}{I_1I_3}\,M_3 \tag{5.2.7}$$

È ancor più chiaro considerare il vettore velocità angolare. Le sue proiezioni sia sull'asse e_3 che nella direzione di M sono costanti (la seconda è $\omega\cdot M/|M| =$ 2energia$/|M|$) e di conseguenza anche la sua norma lo è (perchè l'angolo fra e_3 ed M è costante). Dunque ω si muove su un cono circolare di asse M nello spazio e su di un cono circolare di asse e_3 nel corpo. Secondo la (5.2.5), le velocità con le quali ω percorre questi coni sono costanti. (Questi due coni si chiamano *coni di Poinsot* e, avendo in contatto ad ogni istante l'asse passante per il punto fisso ed ω, i cui punti hanno velocità nulla, rotolano l'uno sull'altro senza strisciare).

Figura 2

Naturalmente, se M è parallelo ad uno degli assi principali di inerzia allora il moto è una rotazione uniforme, come già sappiamo. Negli altri casi il moto è periodico se e solo se il rapporto Ω_r/Ω_p fra le due frequenze è razionale. Questo è simile a quanto avviene nel caso delle piccole oscillazioni, con la differenza però che adesso il rapporto fra le frequenze varia con le condizioni iniziali (attraverso i valori degli integrali primi $\|M\|$ ed M_3). A parte questo, la similitudine è in realtà molto forte, perchè anche in questo caso le superfici di livello dei quattro integrali primi M ed M_3 sono tori bidimensionali—ed il moto è un moto lineare su di esso.

Si può capire facilmente, anche se in modo non rigoroso, come sono fatte le superfici di livello dei quattro integrali primi nello spazio degli atti di moto SO(3) $\times$

[7] misurata in un riferimento che ruota attorno ad M insieme ad e_3.

$\mathbb{R}^3 \ni (\mathcal{R}, \omega)$. Infatti, se M ed M_3 sono fissati allora è fissato il cono sul quale si muove e_3. Dunque, data una qualunque configurazione del sistema, tutte le altre compatibili con questi valori degli integrali primi si ottengono ruotando e_3 attorno ad M ed il corpo attorno ad e_3. Entrambe queste rotazioni formano un cerchio, ed il loro prodotto è un toro bidimensionale. Dunque, fissati i valori degli integrali primi, la matrice che da' l'orientamento del corpo deve appartenere ad un sottoinsieme di SO(3) diffeomorfo a $\mathbb{T}^2$. D'altra parte, M ed $\mathcal{R}$ determinano univocamente la velocità angolare. Pertanto, fissati M ed M_3, l'atto di moto $(\mathcal{R}, \omega)$ appartiene ad un toro bidimensionale.

Questo toro può essere pensato (cioè, parametrizzato) come il prodotto del cerchio fatto da e_3 attorno ad M e dal corpo attorno ad e_3. L'analisi prcedente mostra che il moto è uniforme (cioè, lineare) su ciascuno di questi due cerchi a dunque, proprio come per le piccole oscillazioni, lineare sul toro.

Esercizi 5.2.4 (i) Esprimere l'energia cinetica in termini di M ed M_3.

(ii) Integrare le equazioni di Euler (5.2.4).

(iii) Da cosa dipende il fatto che il verso della rotazione di e_3 attorno ad M e quello della rotazione del corpo attorno ad e_3 siano concordi o discordi?

(iv) Nell'argomento (non rigoroso) usato sopra per mostrare che le superfici di livello degli integrali primi sono diffeomorfe a tori bidimensionali si è considerato solo il caso di valori 'generici'. Ci sono dei valori di M ed M_3 per i quali la superficie di livello non è un toro bidimensionale? E cosa è?

E. Caso di un corpo 'triassiale'. Se i tre momenti principali di inerzia del corpo sono tutti distinti, allora i moti non sono più precessioni regolari. Le caratteristiche del moto non sono diverse da quelle delle precessioni regolari, ma sono a prima vista meno evidenti. Esse risultano evidenti, tuttavia, da una semplice descrizione geometrica dovuta a Poinsot.

Prima di passare a questo conviene cercare di comprendere come si muove il momento angolare rispetto al corpo, tracciando il ritratto in fase dell'equazione di Euler per il momento angolare (5.2.2), cioè

$$\dot{M} \;=\; \mathcal{I}^{-1}M \times M\,, \qquad M \in \mathbb{R}^3\,.$$

Qui $\mathcal{I}^{-1}$ è l'inverso dell'operatore d'inerzia. Se siamo in una base principale di inerzia, esso è la matrice diagonale $\mathrm{diag}\,(I_1^{-1}, I_2^{-1}, I_3^{-1})$. Assumiamo, per definitezza, $I_1 < I_2 < I_3$.

Per costruire il ritratto in fase sfruttiamo, naturalmente, l'esistenza dei due integrali primi $\|M\|^2$ ed $E(M) = M \cdot \mathcal{I}^{-1}M$: siccome essi sono indipendenti, le loro superfici di livello si intersecano esattamente sulle orbite. Le superfici di livello di $\|M\|^2$ sono sfere e quelle di $E(M)$ sono ellissoidi di semiassi $\sqrt{I_1} < \sqrt{I_2} < \sqrt{I_3}$. Fissiamo allora uno degli ellissoidi $E(M) = E_0$, $E_0 > 0$, e disegnamone le intersezioni con le sfere $\|M\|^2 = \text{cost}$. Si ottiene la figura mostrata a lato. Figura 3

Per stabilire come sono fatte le intersezioni fra l'ellissoide considerato e le sfere, procediamo come segue. Immaginiamo innanzittutto di far crescere il raggio della sfera, partendo da zero. La prima intersezione non vuota si ha quando il raggio della sfera è uguale al semiasse minore dell'ellissoide, ed è costituita dai due punti su tale semiasse, che nel nostro caso è l'asse e_1. Questi due punti di equilibrio dell'equazione di Euler corrispondono alle rotazioni unformi attorno all'asse principale di inerzia 'minimo' e_1. Se il raggio della sfera è un po' più lungo del semiasse minore dell'ellissoide, essa interseca l'ellissoide in due curve chiuse che circondano tali punti. La stessa cosa avviene finchè il raggio della sfera è minore del semiasse medio dell'ellissoide.

Immaginiamo ora di far decrescere il raggio della sfera, partendo dall'infinito. La prima intersezione non vuota si ha quando il raggio della sfera eguaglia il semiasse maggiore dell'ellissoide ed è costituita dai due punti di tale semiasse (per noi, e_3). Al decrescere del raggio della sfera si hanno ancora curve chiuse, che racchiudono tali punti, finchè il raggio è maggiore del semiasse medio.

Quando il raggio della sfera è uguale al semiasse medio dell'ellissoide, lintersezione contiene i due punti sul semiasse medio e_2 e, come si capisce pensandoci un po', quattro curve che li congiungono, due da una parte e due dall'altra dell'ellissoide. (Infatti, in ogni sezione 'verticale' dell'ellissoide, che contenga l'asse e_3, la distanza dal centro dei punti dell'ellissoide cresce andando dai punti sul piano equatoriale e_1–e_2 verso l'asse e_3.) Queste curve si intersecano sull'asse e_2, formando una figura a otto.

Sul ritratto in fase si riconoscono innanzittutto i sei equilibri, corrispondenti alle rotazioni uniformi del corpo attorno agli assi principali di inerzia. Tutte le altre curve, eccetto quelle che formano la figura ad otto, sono chiuse e corrispondono a moti nei quali il momento angolare (nel corpo) fa un moto periodico. Questo è simile a quanto avviene nel caso simmetrico, ove e_3 precede attorno ad M, ma

- l'asse del corpo che 'precede' attorno ad M può adesso essere o e_1 o e_3
- la precessione non avviene su un cono circolare.

Vi sono poi i moti sulle quattro curve speciali che formano la figura ad otto. Per l'unicità delle soluzioni, questi moti tendono asintoticamente per $t \to \pm\infty$ all'uno o all'altro dei due equilibri sull'asse e_2, senza raggiungerli (la situazione è del tutto simile alle separatrici del pendolo).

Resta adesso da capire come si muove il corpo nello spazio. Come accennato, vi è una semplice descrizione dovuta a Poinsot. Si chiama *ellissoide di inerzia* del corpo relativo ad O la superficie ad esso solidale descritta, in un riferimento solidale al corpo e di origine O, dall'equazione $x \cdot \mathcal{I}x = 1$. I tre semiassi dell'ellissoide sono diretti come gli autovettori di $\mathcal{I}$, cioè come gli assi principali di inerzia, e sono lunghi, rispettivamente $1/\sqrt{I_1}$, $1/\sqrt{I_2}$, $1/\sqrt{I_3}$.

Proposizione 62 *Nel moto del sistema di Euler–Poinsot, l'ellissoide di inerzia rotola senza strisciare su un piano fisso nello spazio, ortogonale al momento angolare.*

Figura 4

Dimostrazione. La normale all'ellissoide di inerzia nel punto x è $n(x) = 2\mathcal{I}x$. Siccome $M = \mathcal{I}\omega$ ed $\mathcal{I}$ è invertibile, la normale è parallela ad M nei due punti $x_\pm$ dell'ellissoide che appartengono all'asse $O\omega$. Per determinarli scriviamo $x_\pm = \lambda_\pm\omega$ ed imponiamo $x_\pm \cdot \mathcal{I}x_\pm = 1$: si trova $\lambda_\pm^2\omega \cdot \mathcal{I}\omega = 1$. Ma $\omega \cdot \mathcal{I}\omega$ è il doppio dell'energia cinetica E del corpo, che sappiamo essere costante. Dunque

$$x_\pm = \pm\frac{\omega}{\sqrt{2E}}\,.$$

Consideriamo ora il piano ortogonale ad M e passante per il punto x_-, e dunque tangente all'ellissoide di inerzia. Mostriamo che, durante il moto del corpo, anche se x_- cambia, tale piano non cambia perchè la sua distanza dal punto fisso O resta costante. Infatti questa distanza è

$$\frac{M}{\|M\|} \cdot x_- = \frac{M \cdot \omega}{\|M\|\sqrt{2E}} = \|M\|\sqrt{2E}$$

ed è costante. Dire che c'è "rotolamento senza strisciamento" significa, come sappiamo dalla sezione 2.7, che il punto di contatto x_- fra ellissoide d'inerzia e piano ha, ad ogni istante, velocità nulla: cosa che avviene perchè esso è un punto del corpo che appartiene all'asse $O\omega$. ■

L'importanza di questo risultato è evidente. Guardando il moto del corpo, può essere difficile riconoscere alcuna regolarità. Ma l'ellissoide di inerzia si muove invece in modo semplice. Come già osservato, uno dei due assi principali di inerzia minimo (e_1) o massimo (e_3) precede, anche se in modo irregolare, attorno alla direzione del momento angolare nello spazio. Allo stesso tempo, il corpo ruota su sè stesso: anche questo è un moto un po' irregolare, ma i due moti assieme producono il rotolamento dell'ellissoide di inerzia. Per descrivere il moto del corpo conviene dunque guardare l'ellissoide di inerzia.

Si capisce allora che, se si escludono i moti corrispondenti alla curva a otto nel ritratto in fase dell'equazione di Euler, tutti gli altri moti del corpo triassiale sono qualitativamente simili a quelli del corpo simmetrico. In particolare, anche qui le superfici di livello degli integrali primi sono (genericamete) tori bidimensionali.

Esercizi 5.2.5 (i) *Spiegazione dell'esperimento.* Lanciando un corpo in aria si osserva che, se la velocità angolare è inizialmente vicina all'asse di inerzia intermedio e_2, il corpo si rovescia: l'asse e_2 parte puntando verso l'alto, dopo un po' punta verso il basso, etc. Spiegare questo fenomeno.

(ii) Quali equilibri dell'equazione di Euler sono ellittici e quali iperbolici?

(iii) Se il corpo è un ellissoide (omogeneo) allora esso coincide con il suo ellissoide di inerzia. Mostrarlo. Negli altri casi, l'ellissoide di inerzia ha qualche similitudine col corpo: se il corpo è allungato in una certa direzione, anche l'ellissoide di inerzia lo è.

F. Complemento: Moto del corpo simmetrico nello spazio. Se il corpo è cineticamente simmetrico, allora è possibile (e anzi facile) determinare esplicitamente l'orientamento del corpo in funzione del tempo. Indichiamo con $\mathcal{R}_t$ la matrice che trasforma i versori e_x, e_y, e_z della base spaziale nei versori $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ della base principale di inerzia all'istante t: $\mathcal{R}_t e_x = e_1(t)$, etc. Indichiamo poi con $R(\alpha a)$ la matrice di rotazione di un angolo α attorno alla direzione del versore a (in accordo con la regola del cavatappi).

Proposizione 63 *Durante il moto di un sistema di Euler–Poinsot con momenti di inerzia $I_1 = I_2$ si ha*

$$\mathcal{R}_t \;=\; R(t\Omega_p\mu)\, R(t\Omega_r e_3(0))\, \mathcal{R}_0 \qquad (5.2.8)$$

ove μ è il versore (costante) nella direzione del momento angolare M e le due frequenza Ω_r ed Ω_p sono come in (5.2.6), (5.2.7).

Dimostrazione. Sappiamo che i moti sono precessioni regolari, con velocità angolare $\omega_t = \Omega_r\mu + \Omega_p e_3(t)$. Dato un vettore $u \in \mathbb{R}^3$, indichiamo con $\widehat{u}$ la matrice antisimmetrica $u\times$, si veda la sezione 1.3. Allora la matrice $\mathcal{R}_t$ soddisfa $\dot{\mathcal{R}}_t\mathcal{R}_t^T = \widehat{\omega_t}$. Questa è una equazione differenziale del primo ordine che si può mettere in forma normale ($\dot{\mathcal{R}}_t = \widehat{\omega_t}\mathcal{R}$) ed ha dunque una ed una sola soluzione, una volta fissato il dato iniziale $\mathcal{R}_0$. Basta dunque verificare che la (5.2.8) la soddisfa.

Scriviamo $\mathcal{M} = R(t\Omega_p\mu)$ ed $\mathcal{E} = R(t\Omega_r e_3(0))$. Si noti che

$$\dot{\mathcal{M}}\mathcal{M}^T u \;=\; \Omega_p\mu \times u\,, \qquad \dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^T u \;=\; \Omega_r e_3(0) \times u$$

per ogni vettore $u \in \mathbb{R}^3$. Siccome $\mathcal{R}_t = \mathcal{M}\mathcal{E}\mathcal{R}_0$ abbiamo

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{R}}_t\mathcal{R}_t^T \;&=\; (\dot{\mathcal{M}}\mathcal{E} + \mathcal{M}\dot{\mathcal{E}})\mathcal{R}_0\mathcal{R}_0^T\mathcal{E}^T\mathcal{M}^T \\ &=\; \dot{\mathcal{M}}\mathcal{M}^T + \mathcal{M}\dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^T\mathcal{M}^T\,.\end{aligned}$$

Dunque, se $u \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{R}}_t\mathcal{R}_t^T u \;&=\; \dot{\mathcal{M}}\mathcal{M}^T u + \mathcal{M}\dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^T\mathcal{M}^T u \\ &=\; \Omega_p\mu \times u + \mathcal{M}[\Omega_r e_3(0) \times (\mathcal{M}^T u)] \\ &=\; \Omega_p\mu \times u + \Omega_r\,[\mathcal{M}e_3(0)] \times u\end{aligned}$$

perchè, essendo $\mathcal{M}$ una rotazione, $\mathcal{M}(v \times u) = [\mathcal{M}v] \times [\mathcal{M}u]$ per ogni coppia di vettori v ed u (fare il prodotto vettore e poi ruotare è lo stesso che ruotare il due vettori e poi farne il prodotto vettore). Siccome $\mathcal{E}$ è una rotazione di asse $e_3(0)$ si ha $\mathcal{M}e_3(0) = \mathcal{M}\mathcal{E}e_3(0) = \mathcal{M}\mathcal{E}\mathcal{R}_0 e_z = e_3(t)$ e dunque

$$\dot{\mathcal{R}}_t \mathcal{R}_t^T u \;=\; [\Omega_p \mu + \Omega_r e_3(t)] \times u$$

che è quanto si doveva provare. ■

Esercizi 5.2.6 (i) Usare la (5.2.8) per creare al computer un'animazione del moto del corpo rigido. (Serve un programma che permetta di fare un po' di grafica tridimensionale.)

(ii) Verificare che, in un riferimento che ruota attorno ad M insieme ad e_3, il corpo ruota con velocità angolare costante $\Omega_r e_3$.

G. Risposte e suggerimenti per gli esercizi

Esercizi *5.2.1* L'equazione del moto in Σ' è $\left.\frac{dM'_B}{dt}\right|_{\Sigma'} = 0$, ove il momento angolare M'_B è relativo a Σ'. Usando la definizione di momento angolare del corpo (sezione 2.6.D) mostrare che $M'_B = M_B$ perchè Σ' ha velocità angolare nulla rispetto a Σ. Per lo stesso motivo, poi, $\left.\frac{dM'_B}{dt}\right|_{\Sigma'} = \left.\frac{dM'_B}{dt}\right|_{\Sigma}$.

Esercizi *5.2.4* (i) [R: $E = \frac{\|M\|^2 - M_3^2}{2I_1} + \frac{M_3^2}{2I_3}$]

(ii) ω_3 è costante, le equazioni sono lineari; derivandone una si trova un'oscillatore armonico.

(iii) Il corpo si chiama prolato se $I_1 > I_3$, oblato se $I_1 < I_3$. La precessione regolare si chiama diretta se il verso di rotazione di e_3 attorno ad M e quello del corpo attorno ad e_3 sono gli stessi, retrograda in caso contrario. In quale caso, prolato od oblato, la precessione è diretta?

(iv) SO(3) se $M = 0$, $M_3 = 0$. Un cerchio, se $M = M_3 e_e$. Perchè non è un cerchio, per le rotazioni uniformi attorno ad $e1$ ed e_2?

Esercizi *5.2.5* (i) Il ritratto in fase dell'equazione di Euler mostra che in un moto vicino alle separatrici, il momento angolare continua a rovesciarsi nel corpo, passando periodicamente da vicino a $+e_2$ a vicino a $-e_2$. Siccome il momento angolare è costante nello spazio, il fatto che esso si rovesci nel corpo significa che è il corpo che si rovescia nello spazio. Quello che questo argomento qualitativo non permette di stabilire è di quanto ruotino nello spazio i due assi di inerzia e_1 ed e_3 in un periodo di rovesciamento di e_2. La risposta a questo problema si può dare, ma non è facile (si veda il libro di R. Cushman e L. Bates *Global Aspects of Classical Integrable Systems* (Birkhäuser, 1997).]

(iii) Suggerimento: in una base principale di inerzia l'equazione dell'ellissoide di inerzia è $x_1^2 I_1 + x_2^2 I_2 + x_3^2 I_3 = 1$.

Esercizi *5.2.6* (ii) Suggerimento: passare ad un sistema di riferimento nel quale e_3 è a riposo, che cioè ruota rispetto a quello spaziale con velocità angolare $\tilde{\omega} = -M/I_1$. Se $\dot{e}_1$ è la derivata di e_1 nel riferimento spaziale, cioè $\dot{e}_1 = \omega \times e_1$, allora secondo la (2.3.6) la derivata di e_1 nel riferimento rotante è $\dot{e}_1 - \tilde{\omega} \times e_1 = (\omega - \tilde{\omega}) \times e_1 = \frac{I_1 - I_3}{I_1 I_3} M_3 \, e_3 \times e_1$.

5.3 La trottola di Lagrange

A. Il sistema. La trottola di Lagrange è una modellizzazione delle ordinarie trottole, che hanno una struttura di rotazione, ma con in più l'ipotesi che la 'punta' della trottola sia fissa. Precisamente, si considera un corpo rigido con un punto fisso O che ha due dei tre momenti di inerzia relativi ad O uguali, diciamo $I_1 = I_2$, e con il centro di massa B appartenente all'asse principale di inerzia e_3 relativo al terzo momento di inerzia I_3. L'unica forza attiva agente sul sistema è il peso.

Il sistema ha tre gradi di libertà e si intuisce che esso sia invariante sotto due diverse azioni di S^1: le rotazioni del corpo attorno alla verticale e quelle attorno al suo asse di simmetria e_3. Pertanto, se si riescono ad introdurre delle coordinate sulla varietà delle configurazioni tali che una di essa sia un angolo attorno alla verticale ed un'altra un angolo attorno ad e_3, allora queste coordinate saranno ignorabili e, per mezzo del metodo di Routh, si potrà ridurre il problema all'integrazione di un sistema ad un grado di libertà.

B. Angoli di Euler. Un sistema di coordinate con le proprietà desiderate sono i cosiddetti angoli di Euler. Ricordiamo che la configurazione del sistema è data dalla matrice $\mathcal{R} \in \mathrm{SO}(3)$ che trasforma una base spaziale $\{O; e_x, e_y, e_z\}$, fissata una volta per tutte, nella base principale di inerzia $\{O; e_1, e_2, e_3\}$.[8] Gli angoli di Euler sono le tre funzioni

$$\mathcal{R} \mapsto \varphi(\mathcal{R}) \in S^1\,, \qquad \mathcal{R} \mapsto \psi(\mathcal{R}) \in S^1\,, \qquad \mathcal{R} \mapsto \theta(\mathcal{R}) \in (0,\pi)$$

definiti come nella figura, ove Figura 5

$$e_n \;=\; \frac{e_z \times e_3}{\|e_z \times e_3\|}$$

è il versore della cosiddetta *linea dei nodi*. Naturalmente, questo vettore è definito solo se e_z ed e_3 non sono paralleli. Corrispondentemente, gli angoli di Euler sono definiti non in tutto SO(3) ma solo nel suo sottoinsieme

$$\Sigma_z \;=\; \{\mathcal{R} \in \mathrm{SO}(3) \;:\; e_z \times \mathcal{R}e_z \neq 0\}\,.$$

Dunque essi sono coordinate locali: questo è inevitabile, perchè SO(3) è compatto e non possiede coordinate globali. Si noti che la singolarità $e_3 \times e_z = 0$ corrisponde a $\theta = 0, \pi$. Si noti anche che θ, assumendo valori nell'intervallo $(0,\pi)$, non in S^1, non è un vero angolo.

Proposizione 64 *Gli angoli di Euler sono un diffeomorfismo fra Σ_z ed $S^1 \times S^1 \times (0,\pi)$.*

Dimostrazione.[9] Innanzittutto osserviamo che il procedimento descritto nella figura associa ad ogni $\mathcal{R} \in \Sigma_z$ un'*unica* terna (φ, ψ, θ), e dunque definisce una funzione

$$\mathcal{A} \;:\; \Sigma_z \;\to\; S^1 \times S^1 \times (0,\pi)\,.$$

(Per questo è cruciale l'aver escluso $e_z \times e_3 = 0$, se no φ e ψ non sarebbero definiti, ed inoltre l'aver preso θ in $(0,\pi)$: se si fossero permessi anche valori negativi di θ allora le due terne di angoli di Euler (φ, ψ, θ) e $(\varphi+\pi, \psi, -\theta)$ corrisponderebbero alla stessa $\mathcal{R}$; è come nelle coordinate sferiche). Dobbiamo mostrare che tale mappa è invertibile e differenziabile ed ha inversa differenziabile.

Cominciamo con la seguente osservazione: se $\mathcal{R} \in \Sigma_z$ ha angoli di Euler (φ, ψ, θ), cioè $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = (\varphi, \psi, \theta)$, allora essa si può scrivere come il prodotto di tre rotazioni:

---

[8] Si può proprio pensare a $\mathcal{R}$ come alla [posizione nello spazio della] terna $\{e_1, e_2, e_3\}$.

[9] Questa dimostrazione è molto tecnica, e si può tralasciare. L'unica cosa importante è osservare che l'inversa di $\mathcal{A}$ è la mappa (5.3.1).

- Una rotazione di angolo φ attorno ad e_z, che trasforma la base $\{e_x, e_y, e_z\}$ in una base $\{e'_x, e'_y, e'_z\}$ con $e'_x = e_n$ ed $e'_z = e_z$. Indichiamola $R(\varphi; e_z)$.
- Una rotazione di angolo θ attorno ad $e'_x = e_n$, che porta e_z su e_3 e dunque trasforma $\{e'_x, e'_y, e'_z\} = \{e_n, e'_y, e_z\}$ in $\{e_n, e''_y, e_3\}$. Indichiamola $R(\theta; e_n)$.
- Una rotazione di angolo ψ attorno ad e_3, che trasforma $\{e_n, e''_y, e_3\}$ in $\{e_1, e_2, e_3\}$. Indichiamola $R(\psi; e_3)$.

Dunque, se $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = (\varphi, \psi, \theta)$ allora $\mathcal{R} = R(\psi; e_3)\, R(\theta; e_n)\, R(\varphi; e_z)$. Definiamo ora una mappa $\mathcal{A}^{-1} : S^1 \times S^1 \times (0, \pi) \to \Sigma_z$ nel modo seguente:

$$\mathcal{A}^{-1}(\varphi, \psi, \theta) \;=\; R(\psi; e_3(\varphi, \theta))\, R(\theta; e_n(\varphi))\, R(\varphi; e_z) \tag{5.3.1}$$

ove

$$e_n(\varphi) \;=\; R(\varphi; e_z)e_x\,, \qquad e_3(\varphi, \theta) \;=\; R(\theta; e_n(\varphi))e_z\,.$$

Per quanto visto sopra, essa è l'inversa di $\mathcal{A}$.

Dimostrare la differenziabilità della mappa $\mathcal{A}^{-1}$ così definita è facile. Infatti, se rappresentiamo gli operatori di rotazione con matrici, allora le componenti di ciascuna delle tre matrici $R(\psi; e_3)$, $R(\theta; e_n)$ ed $R(\varphi; e_z)$ sono seni e coseni di ψ, θ e φ. Di conseguenza esse, ed il loro prodotto, sono differenziabili.

Resta solo da provare la differenzibilità di $\mathcal{A}$. Il modo più semplice è probabilmente quello di osservare che $\mathcal{A}^{-1}$ è una mappa invertibile fa due varietà tridimensionali, cioè $S^1 \times S^1 \times (0, \pi)$ ed Σ_z, che è un aperto di SO(3) il quale è una sottovarietà tridimensionale di $\mathbb{R}^9$. La sua inversa è allora differenziabile se e solo se la matrice Jacobiana di $(\varphi, \psi, \theta) \mapsto \mathcal{A}^{-1}(\varphi, \psi, \theta)$ ha ovunque rango tre. Lasciamo la verifica come esercizio. ■

Esercizi 5.3.1 (i) Scrivere la matrice che rappresenta $\mathcal{A}^{-1}(\varphi, \psi, \theta)$ nella base $\{e_x, e_y, e_z\}$.

(ii) Verificare che la matrice Jacobiana di $\mathcal{A}^{-1}$ ha ovunque rango tre in $S^1 \times S^1 \times (0, \pi)$. [Raccomandato solo a chi ha *davvero* passione per questo tipo di questioni!]

C. La Lagrangiana. Scriviamo ora la Lagrangiana della trottola di Lagrange usando come coordinate Lagrangiane gli angoli di Euler. L'energia potenziale della forza peso è mgz_B ove ovviamente m è la massa del corpo. Se il centro di massa B è a distanza l dal punto fisso, allora la sua quota $z_B = l\cos\theta$. Dunque, l'energia potenziale della forza peso è

$$V(\theta) \;=\; m\,g\,l\,\cos\theta$$

e, come si voleva, non dipende dai due angoli φ e ψ.

Scrivere l'energia cinetica è un po' più laborioso. Siccome il corpo ha il punto fisso O la sua energia cinetica è $\frac{1}{2}\,\mathcal{I}_0\omega \cdot \omega$ ovvero, nella base principale di inerzia

$$T \;=\; \frac{1}{2}\, I_1\big(\omega_1^2 + \omega_2^2\big) + \frac{1}{2}\, I_3\omega_3^2\,.$$

Usando la parametrizzazione (5.3.1) delle matrici di rotazione con gli angoli di Euler ed il legame fra derivata temporale della matrice di rotazione e velocità angolare per calcolare le componenti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ della velocità angolare nella base principale di inerzia in funzione di $\varphi, \psi, \theta, \dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta$ si trova, come mostrato più sotto,

$$T \;=\; \frac{1}{2}\, I_1\,\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\, I_1\,\dot\varphi^2\,\sin^2\theta + \frac{1}{2}\, I_3\big(\dot\psi + \dot\varphi\,\cos\theta\big)^2\,. \tag{5.3.2}$$

Si noti che, come ci si aspettava, l'energia cinetica non dipende da φ e ψ. In conclusione, la Lagrangiana $L = T - V$ della trottola di Lagrange è

$$L(\theta, \dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta) \;=\; \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + \frac{I_1}{2}\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \frac{I_3}{2}\big(\dot\psi + \dot\varphi\,\cos\theta\big)^2 - mgl\cos\theta\,. \tag{5.3.3}$$

Deduzione della (5.3.2): Secondo la (5.3.1), la matrice di rotazione è il prodotto $R(\psi, e_3)R(\theta, e_n)R(\varphi, e_z)$ di tre rotazioni di angoli φ attorno ad e_z, θ attorno ad e_n e ψ attorno ad e_3. Queste tre rotazioni hanno con evidenza velocità angolari $\dot\psi e_3$, $\dot\theta e_n$ e $\dot\varphi e_z$. D'altra parte, come visto nel corso della dimostrazione della Proposizione 63, la velocità angolare della composizione di due (e quindi di qualunque numero di) rotazioni è la somma delle corrispondenti velocità angolari. Pertanto

$$\omega \;=\; \dot\varphi\, e_z + \dot\psi e_3 + \dot\theta e_n\,.$$

Per ottenere l'espressione delle componenti di ω basta ora esprimere e_z ed e_n nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Si trova così

$$\omega \;=\; [\dot\varphi \,\sin\theta\, \sin\psi + \dot\theta\, \cos\psi]\, e_1 + [\dot\varphi\, \sin\theta\, \cos\psi - \dot\theta\, \sin\psi]\, e_2 + \,[\dot\psi + \dot\varphi\, \cos\theta]\, e_3$$

(Verifica: Chiaramente $e_n = \cos\psi\, e_1 - \sin\psi\, e_2$. Si ha poi $e_z = \cos\theta\, e_3 + e_z^\perp$, ove $e_z^\perp$ è la proiezione ortogonale di e_z sul piano e_1, e_2. Chiaramente $e_z^\perp = [\cos(\frac{\pi}{2} - \psi)\, e_1 + \sin(\frac{\pi}{2} - \psi)\, e_2]\, \sin\theta = \sin\theta\, \sin\psi\, e_1 + \sin\theta\, \cos\psi, \epsilon_2$. Sostituendo in $\omega = \dot\varphi\, e_z + \dot\psi\, e_3 + \dot\theta\, e_n$ e raccogliendo i diversi termini si trova l'espressione data di ω.) Allora $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot\varphi^2\, \sin^2\theta + \dot\theta^2$, $\omega_3^2 = (\dot\psi + \dot\varphi\, \cos\theta)^2$ e da qui segue l'espressione data per T. ■ Figura 6

D. Riduzione. Mettiamo ora in moto il procedimento di riduzione alla Routh per la Lagrangiana (5.3.3). I momenti conservati $p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi}$ e $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}$ coniugati alle due coordinate ignorabili sono

$$p_\psi \;=\; I_3(\dot\psi + \dot\varphi \cos\theta)\,, \qquad p_\varphi \;=\; I_1 \dot\varphi \sin^2\theta + p_\psi \cos\theta\,. \tag{5.3.4}$$

Si verifica, con un calcolo diretto, che p_φ e p_ψ sono le componenti del momento angolare del corpo (relativo ad O) lungo gli assi e_z ed e_3. Indichiamone i valori, allora, con M_z ed M_3, rispettivamente. Invertendo le $p_\varphi = M_z$ e $p_\psi = M_3$ si trova

$$\dot\varphi \;=\; \frac{M_z - M_3 \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}\,, \qquad \dot\psi \;=\; \frac{M_3}{I_3} - \dot\varphi\, \cos\theta\,. \tag{5.3.5}$$

La Lagrangiana ridotta relativa ai valori M_z ed M_3 dei due momenti si calcola ora facilmente. Siccome le velocità 'ignorabili' $(\dot\varphi, \dot\psi)$ compaiono nella Lagrangiana (5.3.3) solo con termini quadratici è sufficiente cambiare di segno tali termini e sostituire poi a $\dot\varphi$ e $\dot\psi$ le espressioni (5.3.5):

$$\begin{aligned} L_R \;&=\; \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 - \frac{I_1}{2}\dot\varphi^2 \sin^2\theta - \frac{I_3}{2}\big(\dot\psi + \dot\varphi\, \cos\theta\big)^2 - mgl\cos\theta \\ &=\; \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 - \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} - \frac{M_3^2}{2I_3} - mgl\cos\theta\,. \end{aligned}$$

In conclusione, trascurando un'irrilevante costante

$$L_R(\theta, \dot\theta; M_z, M_3) \;=\; \frac{1}{2}\, I_1 \dot\theta^2 - W(\theta; M_z, M_3) \tag{5.3.6}$$

ove

$$W(\theta; M_z, M_3) \;:=\; mgl\cos\theta + \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta}\,. \tag{5.3.7}$$

Studiamo ora il sistema ridotto, che è definito nel piano $(\theta, \dot\theta) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$, e dipende parametricamente da M_z ed M_3. Per tracciarne il ritratto in fase basta tracciare il grafico dell'energia potenziale 'efficace' $W(\theta; M_z, M_3)$. Limiteremo la nostra analisi al caso in cui

$$M_z \;\neq\; \pm M_3\,.$$

Sotto questa ipotesi si ha $M_z - M_3 \cos\theta \neq 0$ per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ e di conseguenza $W(\theta)$ tende a $+\infty$ per θ che tende a questi valori. Questo è importante, perchè assicura che i moti non caschino nelle singolarità delle coordinate che stiamo usando: se lo facessero, non potremmo dire nulla su di essi. I moti con $M_z = \pm M_3$ dovrebbero essere studiati separatamente (per brevità non li studieremo).

Proposizione 65 *Se $M_z \neq \pm M_3$ allora tutti i moti del sistema ridotto sono periodici e vi è un unico equilibrio.*

Figura 7

Il grafico di $W(u; M_z, M_3)$ ed il ritratto in fase del sistema ridotto sono mostrati nella figura accanto.

Dimostrazione. Siccome M_z ed M_3 sono fissati omettiamo di indicare la dipendenza da essi delle varie funzioni. Come abbiamo già osservato, $W(\theta) \to +\infty$ per $\theta \to 0, \pi$. Dunque, per provare l'affermazione basta mostrare che $W(\theta)$ ha un unico punto di minimo nell'intervallo $(0, \pi)$. Che ne abbia almeno uno è ovvio, perchè diverge ai bordi dell'intervallo. Per mostrare che ve ne è uno solo mostriamo che per ogni E maggiore del valore minimo l'insieme

$$\Theta_E \;:=\; \{\theta \in (0, \pi) \;:\; E > W(\theta)\}$$

è connesso. (Se ci fosse più di un minimo, questo non potrebbe avvenire per tutti gli E). A questo scopo, facciamo il cambio di variabile $\theta \mapsto u(\theta) = -\cos\theta$, che è un diffeomorfismo di $(0, \pi)$ su $(-1, 1)$. Siccome

$$f(u; E) \;:=\; E - W(\theta(u)) \;=\; \frac{P(u; E)}{2I_1(1 - u^2)}$$

con

$$P(u; E) \;=\; 2I_1 E(1 - u^2) + 2I_1 mgl(1 - u^2)u - (M_z + M_3 u)^2 \,,$$

l'insieme Θ_E è l'immagine sotto θ di

$$U_E \;:=\; \{u \in (-1, 1) \;:\; P(u; E) > 0\}\,.$$

Si tratta dunque di provare che U_E è connesso. Ora, $P(u; E)$ è un polinomio di terzo grado in u ed ha certamente due radici in $(-1, 1)$ perchè, come abbiamo già osservato, $W(\theta) \to +\infty$ per $\theta \to 0, \pi$ e dunque l'equazione $E = W(\theta)$ ha almeno due radici interne a $(0, \pi)$. Dunque, U_E è connesso se e solo se $P(u; E)$ ha esattamente due radici in $(-1, 1)$. Basta dunque dimostrare che la sua terza radice è esterna all'intervallo $(-1, 1)$. Questo segue dal fatto che $P(-1; E) = -(M_z - M_3)^2 < 0$ e $P(u; E) = -2I_1 mglu^3 + \ldots \to +\infty$ per $u \to -\infty$, cosicché uno zero di $P(u; E)$ appartiene all'intervallo $(-\infty, -1)$. ■

E. Ricostruzione. Possiamo ora 'ricostruire' il moto della trottola, a partire dall'analisi del sistema ridotto e dalle formule (5.3.5) per le derivate temporali degli altri due angoli di Euler φ e ψ. Assumiamo tacitamente la condizione $M_z \neq \pm M_3$.

Come abbiamo visto, l'angolo θ, ovvero l'inclinazione dell'asse della trottola, esegue un moto periodico, fra due valori θ_- e θ_+. Questo moto si chiama *nutazione*. I valori estremi $\theta_\pm$ dipendono da M_z ed M_3 e dall'energia E e, per ogni scelta di M_z ed M_3, vi è un valore di E per il quale $\theta_- = \theta_+$ e l'inclinazione dell'asse della trottola è costante.

La posizione dell'asse della trottola è determinata dai due angoli θ e φ. Essi sono infatti (tipo) coordinate sferiche per il versore e_3, che si può rappresentare come un punto sulla sfera unitaria. Il moto dell'asse della trottola determinato dall'angolo φ, cioè attorno alla verticale, si chiama *precessione*. Secondo la (5.3.5) la velocità angolare della precessione è

$$\dot\varphi \;=\; \frac{M_z - M_3 \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}\,.$$

Il numeratore può annullarsi al più una volta in $(0, \pi)$ e dunque in $[\theta_-, \theta_+]$. Dunque a seconda dei valori di E, M_z, M_3 vi possono essere diverse possibilità:

(a) Se $M_z - M_3 \cos\theta$ non si annulla in $[\theta_-, \theta_+]$ allora durante il moto $\dot\varphi$ non cambia di segno e $t \mapsto \varphi_t$ avanza in modo monotono. Di conseguenza, la traiettoria descritta dalla punta del versore e_3 sulla sfera unitaria è del tipo mostrato nella figura (a). Figura 8

(b) Se $M_z - M_3 \cos\overline{\theta} = 0$ con qualche $\overline{\theta}$ interno all'intervallo (θ_-, θ_+) allora il verso della precessione si inverte ogni qualvolta l'inclinazione uguaglia $\overline{\theta}$, cioè due volte in ogni periodo della nutazione. Il versore e_3 descrive delle asole, come mostrato nella figura.

(c) Se $M_z - M_3 \cos\theta$ si annulla in uno degli estremi dell'intervallo $(\theta_, \theta_+)$ allora la traiettoria ha ivi una cuspide. (Questo moto può sembrare eccezionale, ma è in realtà abbastanza facile osservarlo nel moto di una trottola: bisogna mettere la trottola in rotazione attorno al suo asse, tenendolo fermo, e poi lasciarlo andare: l'asse della trottola cade e comincia a precedere).

Infine, la trottola ruota attorno al suo asse con velocità angolare

$$\dot\psi = \frac{M_3}{I_3} - \dot\varphi \cos\theta \,.$$

In conclusione, il moto della trottola si può pensare composto da tre moti: la nutazione, la precessione, e la rotazione attorno all'asse.

Problemi: (Più difficili dei soliti esercizi, temo: io non so le risposte, ma sicuramente si possono trovare con un po' di pazienza—e di certo ci sono su qualche libro classico. Sarò grato a chiunque mi dica qualcosa.)

(i) Le 'asole' descritte dall'asse della trottola sono simmetriche rispetto ad un meridiano?

(ii) Credo che le asole possano solo essere 'allacciate' verso l'alto, non verso il basso (cioè $\theta = \theta_+$, mai $\overline{\theta} = \theta_-$). Perchè? (Penso sia spiegato sul libro di Meccanica Razionale di Levi–Civita ed Amaldi).

(iii) È vero che è sempre $\dot\psi \neq 0$?

(iv) Come sono fatti i moti con $M_z = M_3$? Fra di essi vi sono moti in cui l'asse della trottola resta verticale e la trottola ruota attorno ad esso ('trottola addormentata') e che sono stabili (in un qualche senso che si precisa facilmente) se la velocità della rotazione è abbastanza alta, si veda per esempio il libro di Arnold.[10] Vi sono però anche altri moti con $M_3 = M_z$: per esempio, l'asse della trottola può spiraleggiare verso la (o via dalla) verticale. Si riesce a darne una descrizione?

F. Integrali primi. Come sempre, anche nello studio della trottola di Lagrange hanno giocato un ruolo centrale gli integrali primi, cioè p_φ, p_ψ e l'energia totale $T+V$. Nello spazio degli atti di moto, che ha dimensione sei, i loro insiemi di livello hanno (genericamente) dimensione tre. È facile mostrare che essi sono tori.

Fissiamo dei valori M_z ed M_3 dei due momenti conservati tali che $M_z \neq \pm M_3$. Sugli insiemi di livello di p_φ e p_ψ, secondo le (5.3.5), $\dot\varphi$ e $\dot\psi$ sono funzioni di θ, M_z, M_3; l'espressione esatta di queste funzioni non è importante, qui, per cui limitiamoci a dargli un nome:

$$\dot\varphi = \Phi(\theta; M_z, M_3) \,, \qquad \dot\psi = \Psi(\theta; M_z, M_3) \,.$$

Ripercorrendo la deduzione della Lagrangiana ridotta si riconosce immediatamente che l'energia

$$E_R(\theta, \dot\theta; M_3, M_z) = \frac{1}{2} I_1 \dot\theta^2 + W(\theta; M_z, M_3)$$

[10] La trattazione, lì, usa però gli angoli di Euler: questo è sospetto, perchè gli angoli di Euler non sono definiti sui moti con asse verticale! Ciononostante i risultati sono giusti.

del sistema ridotto è uguale a $T + V - \frac{M_3^2}{2I_3}$ (infatti, questo è il termine costante trascurato nella Lagrangiana ridotta). Allora, una volta fissato M_z, invece di un valore e dell'energia totale possiamo considerare il vlaore $\overline{e} = e - \frac{M_3^2}{2I_3}$ dell'energia ridotta. Dunque, omettendo di indicare la dipendenza delle diverse funzioni da M_3 ed M_z, che sono fissati, l'insieme di livello Σ dei tre integrali primi è

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \{(\varphi, \psi, \theta, \dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta) \,:\, \dot\varphi = \Phi(\theta),\, \dot\psi = \Psi(\theta),\, E_R(\theta, \dot\theta) = \overline{e}\} \\
&= \{\varphi \in S^1\} \times \{\psi \in S^1\} \times C \\
&= S^1 \times S^1 \times C
\end{aligned}$$

ove $C = \{(\theta, \dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta) : \dot\varphi = \Phi(\theta), \dot\psi = \Psi(\theta), E_R(\theta, \dot\theta) = \overline{e}\}$. Siccome $\dot\varphi$ e $\dot\psi$ sono funzioni solo di θ, l'insieme C si proietta diffeomorficamente su $\{(\theta, \dot\theta) : E_R(\theta, \dot\theta) = \overline{e}\}$, cioè su un insieme di livello dell'energia ridotta. Ma, come sappiamo dallo studio del sistema ridotto, questi sono curve chiuse, dunque diffeomorfe ad S^1, o eccezionalmente punti. Dunque, genericamente, $\Sigma \sim S^1 \times S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^3$. Si noti che i tre moti di precessione, rotazione attorno all'asse, nutazione hanno luogo ciascuno su uno di questi tre cerchi.

Osservazione: L'ipotesi che la trottola sia simmetrica (due momenti di inerzia uguali e centro di massa sull'asse) è essenziale per l'integrabilità del probema. Se la trottola ha tre momenti di inerzia distinti allora (eccetto un caso speciale) il problema non è integrabile, nel senso che non solo non vi sono abbastanza integrali primi per 'ridurlo alle quadrature', e la dinamica è caotica. Il caso speciale in cui questo non avviene è il cosiddetto caso della Kowaleskaia: $I_1 = I_2 = 2I_3$ ed il centro di massa appartiene al piano e_1, e_2 (per realizzarlo in pratica bisogna ricorrere ad un corpo non omogeneo).

G. Risposte e suggerimenti per gli esercizi

Esercizi *5.3.1* (i) Suggerimento: è il prodotto di una rotazione attorno all'asse $(0, 0, 1)$, di una attorno a $(1, 0, 0)$ e ancora di una attorno a $(0, 0, 1)$.