III COMPITINO DI MECCANICA RAZIONALE

(Corso di Laurea in Fisica – 8.6.01)

PARTE PRATICA

Esercizio 1. (a) Si determini una trasformazione canonica $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ che estende la trasformazione puntuale $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{q}_1 = q_1 , \qquad \tilde{q}_2 = q_1 q_2 .$$

(b) Si determini poi l'Hamiltoniana $\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p})$ corrispondente alla

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 + p_1 - \frac{q_2}{q_1} p_2 .$$

(c) Il sistema hamiltoniano in (b) è completamente integrabile?

Esercizio 2. Si consideri il sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2} \omega \left(q^2 + p^2\right) + \frac{1}{8} a \left(q^2 + p^2\right)^2 , \qquad (q,p) \in \mathbb{R}^2 ,$$

ove ω ed a sono due costanti positive.

(a) Quali sono gli equilibri di questo sistema?

(b) Determinare le coordinate azione–angolo (I, φ) di questo sistema, indicando dominio e codominio della trasformazione $(p,q) = w(I, \varphi)$. Mostrare che questa trasformazione di coordinate è canonica.

(c) Fare lo stesso per le variabili energia–tempo (E, τ).

(d) Scrivere l'integrale generale del sistema nelle coordinate originali: $q(t) = \ldots$, $p(t) = \ldots$. (Non è necessario esprimere le costanti arbitrarie d'integrazione in termini dei valori iniziali q_0 e p_0).

Esercizio 3. Un sistema hamiltoniano ad un grado di libertà ha tutte le orbite di energia negativa periodiche. Il periodo dell'orbita di energia $E < 0$ è

$$T(E) = \frac{2\pi c}{(-E)^{3/2}}$$

ove c è una costante positiva. Si trovi l'espressione dell'Hamiltoniana in funzione della variabile d'azione. [Suggerimento: si passi attraverso le coordinate tempo–energia].