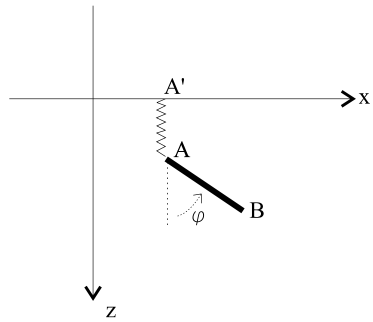
COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE

(Corso di Laurea in Fisica – 27.8.01)

Esercizio 1. Si consideri il sistema mostrato in figura, costituito da una sbarretta rigida AB di massa m e lunghezza R vincolata ad appartenere al piano verticale Oxz, con l'asse z verticale discendente. Si supponga che sulla sbarretta agiscono la forza peso e la forza esercitata da una molla che congiunge A con la sua proiezione ortogonale A' sull'asse x. (La molla sta sempre verticale).



a. Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane le due coordinate x e z del punto A e l'angolo φ fra l'asse z ed AB.
b. Sfruttando l'esistenza di una coordinata ignorabile, scrivere la Lagrangiana ridotta corrispondente ad un generico valore c del momento conservato. Mostrare che la Lagrangiana ridotta è equivalente ad una Lagrangiana senza termine T_1.
c. Determinare gli equilibri del sistema ridotto, studiarne la stabilità, e determinare i modi normali di oscillazione attorno a quello stabile.
d. Determinare la piccola oscillazione con dati iniziali $z(0) = mg/k$, $\dot z(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot\varphi(0) = -\sqrt{3g/R}$.
e. Scrivere i moti del sistema comleto corrispondenti agli equilibri del sistema ridotto.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$I\,\dot\omega = -\omega \wedge I\,\omega - k\omega\,, \qquad \omega \in \mathbb{R}^3\,,$$

ove I è una matrice 3×3 simmetrica e definita positiva e k è una costante positiva. Cosa si può dire della stabilità dell'equilibrio $\omega = 0$

a. usando $W(\omega) = \frac{1}{2}\,\omega \cdot I\,\omega$ come funzione di Lyapunov e
b. usando il primo metodo di Lyapunov?

(Nella risposta alla domanda a., si verifichi innanzittutto che $W(\omega)$ è una funzione di Lyapunov).

Esercizio 3. Determinare una trasformazione canonica $(q,p) \mapsto (\varphi, I)$ da $\mathbb{R}^6$ in sè stesso tale che

$$\varphi_1 = q_1 + q_2 + q_3\,, \quad \varphi_2 = q_2\,, \quad \varphi_3 = q_3\,.$$

Determinare poi l'Hamiltoniana $K(\varphi, I)$ corrispondente alla Hamiltoniana

$$H(q,p) = p_1 + p_2 + p_3 + \sin(q_1 + q_2 + q_3)\,.$$

Quali integrali primi ha il sistema di Hamiltoniana $K(\varphi, I)$? E quello di Hamiltoniana $H(q,p)$?

Esercizio 4. Per quali valori della costante reale c l'origine è un equilibrio stabile del sistema di Hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1^4 + p_1^4 + q_2^2 + cp_2^2\ ?$$

Per quali valori è instabile? Per quali asintoticamente stabile?