

COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE

(Corso di Laurea in Fisica - 5.2.02)

Esercizio 1. Si consideri il sistema mostrato in figura, costituito da due sbarrette rigide, entrambe di massa m e lunghezza $2l$, vincolate a formare un "pendolo doppio". (Sono entrambe vincolate al piano verticale Oxz , la prima ha un estremo vincolato in O e l'altro estremo vincolato ad un estremo della seconda.) Si assuma che i vincoli siano ideali e che sul sistema agisca la sola forza peso. Si usino come coordinate lagrangiane i due angoli φ_1 e φ_2 mostrati in figura.

Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile del sistema.

Esercizio 2. Classificare i punti singolari del sistema di equazioni differenziali in \mathbb{R}^2

$$\dot{x} = x + \alpha xy, \quad \dot{y} = \alpha y + x^2 y^2$$

al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. (Non occorre studiare eventuali valori non generici di α). Si disegni poi il ritratto in fase per $\alpha = -1$.

Esercizio 3. Un punto materiale in \mathbb{R}^3 è soggetto alle forze di potenziale

$$V(x, y, z) = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad k > 0.$$

Scrivere la Hamiltoniana del sistema utilizzando le coordinate cilindriche (r, φ, z) ed i loro momenti coniugati. (Le coordinate cilindriche sono definite da $x = r \cos \varphi$ ed $y = r \sin \varphi$.) Indicare poi gli integrali primi del sistema. Dare infine una descrizione (rapidissima!) dei moti.

