

COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE

(Corso di Laurea in Fisica - 26.02.02)

Esercizio 1. Un pendolo doppio è costituito da due punti materiali P e Q di ugual massa m , giacenti in un piano cartesiano verticale Oxy con asse y verticale ascendente, soggetti al vincolo $|OP| = |PQ| = l$. Sul sistema agiscono la gravità e una forza elastica, esercitata da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, che lega Q alla sua proiezione Q' sull'asse y .

- a. Con riferimento alle coordinate lagrangiane ϑ, φ indicate in figura si verifichi che $(0, 0)$ è configurazione di equilibrio stabile.
- b. Si determinino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a tale configurazione.
- c. Si studi il limite $k \rightarrow \infty$, e si confronti il risultato col sistema analogo, privato della forza elastica, e soggetto all'ulteriore vincolo $x_Q = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione del moto:

$$\ddot{x} = -\alpha x^2 - 4x + 1 \quad ,$$

relativa ad un sistema meccanico conservativo ad un grado di libertà $x \in R$, dipendente dal parametro α .

- a. Si tracci il ritratto in fase al variare di $\alpha \in R$ (non occorre studiare eventuali valori non generici di α).
- b. Si determini l'insieme delle condizioni iniziali che danno luogo a soluzioni periodiche al variare di $\alpha \in R$ (non occorre studiare eventuali valori non generici di α).

Si consideri ora l'equazione:

$$\ddot{x} = -5x^2 - 4x + 1 - \dot{x} \quad .$$

- c. Si classifichino i punti di equilibrio.
- d. Si tracci il ritratto in fase.

Esercizio 3. Un sistema Hamiltoniano ad un grado di libertà ha tutte le soluzioni periodiche con periodo:

$$T = \frac{2\pi}{E^2} \quad ,$$

per ciascun valore E dell'energia. Si determini la variabile di azione I e l'hamiltoniana $h(I)$.

