COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE

(Corso di Laurea in Fisica - 17.7.01)

Esercizio 1. Un disco di massa M e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse x di un piano verticale Oxy, e un punto materiale P di massa m è vincolato a stare nel piano Oxy ad una distanza l dal centro del disco (Figura 1). Il centro del disco è collegato al punto di coordinate $(0, R)$ mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità. Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del centro del disco e l'angolo ϑ mostrato in figura.

a. Determinare gli equilibri del sistema e studiarne la stabilità.
b. Determinare i modi normali di oscillazione attorno all'equilibrio stabile del sistema, assumendo $k = (2Mg)/l$ e $m = M/2$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema mostrato in figura costituito da un punto materiale P di massa m vincolato a stare nel piano verticale Oxy ad una distanza l dall'origine O. Il punto P è collegato da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla al punto sull'asse x che ha la stessa ascissa di P. Sul sistema agisce anche la forza di gravità.

a. Si tracci il ritratto in fase ed il diagramma di biforcazione al variare del parametro $\alpha = \frac{mg}{kl} > 0$ (non occorre disegnare i ritratti in fase corrispondenti a speciali valori di α nei quali si ha la biforcazione).
b. Si supponga ora che sul sistema agisca l'ulteriore forza d'attrito $\underline{F} = -\mu \underline{v}$, ove $\mu > 0$ è il coefficiente d'attrito e $\underline{v}$ è la velocità di P. Si calcoli la componente lagrangiana Q_ϑ della sollecitazione $\underline{F}$ relativa alla variabile ϑ mostrata in Figura 2, e si scriva l'equazione del moto del sistema: $\ddot{\vartheta} = \ldots$.
c. Si determinino e classifichino tutti i punti singolari del sistema corrispondenti ai valori dei parametri:

$$k = 2\frac{mg}{l} \quad , \quad \mu = m\sqrt{\frac{g}{l}} \quad .$$

Esercizio 3. Si consideri la seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{2}$$

ove $p_1 \in R, p_2 \in R, q_1 \in R, q_2 \in R$ sono canonicamente coniugate.

a. Si estenda canonicamente ai momenti la seguente trasformazione:

$$Q_1 = q_1 - q_2 \quad , \quad Q_2 = q_1 + q_2$$

e si determini la nuova Hamiltoniana $K(P, Q)$.

b. Si determini una trasformazione canonica $(P, Q) = \mathcal{C}(\bar{P}, \bar{Q})$ tale da coniugare $K(P, Q)$ ad una funzione $\bar{K}(\bar{P})$ che non dipende esplicitamente da $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$.

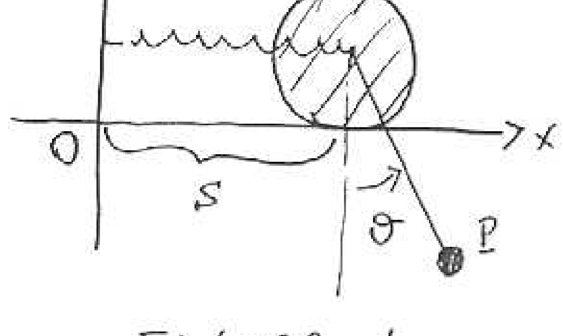

FIGURA 1

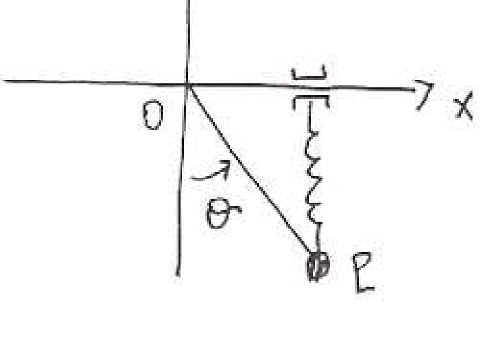

FIGURA 2