COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE

(Corso di Laurea in Fisica – 19.9.01)

Esercizio 1. Un punto P_1 di massa m è vincolato a stare sulla superficie conica di equazione:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \ ,$$

mentre un altro punto P_2 di ugual massa m è vincolato sull'asse z. Sul sistema agisce la forza peso (diretta in senso opposto all'asse z) ed inoltre i due punti sono collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile. Siano r, ϑ le coordinate polari della proiezione di P_1 sul piano x, y e sia ξ la coordinata z di P_2 (Figura 1).

a. Si riduca il problema a soli due gradi di libertà, scrivendo la lagrangiana ridotta.

b. Si dimostri che il sistema ridotto ha una configurazione di equilibrio r_*, ξ_* per ogni valore del momento $p_\vartheta \neq 0$ coniugato a ϑ.

c. Sia $m = k/(6g)$. Si consideri ora il sistema ridotto corrispondente a quel particolare valore di p_ϑ per cui la configurazione di equilibrio è caratterizzata da $r_* = 1$. Si determinino le pulsazioni dei modi normali di oscillazione attorno al punto di equilibrio corrispondente.

Esercizio 2. Un disco di massa m e raggio R è vincolato a ruotare nel piano verticale x, y ed un punto C sulla sua circonferenza è vincolato all'origine del piano. Il punto P diametralmente opposto a C è inoltre collegato da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla al punto sull'asse x si ascissa $4R$. Sul sistema agisce la forza peso.

a. Con riferimento alla coordinata lagrangiana φ indicata in Figura 2 si scriva la lagrangiana del sistema. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.

b. Si tracci il ritratto in fase e si scriva una condizione sui dati iniziali $\varphi(0), \dot\varphi(0)$ che danno luogo a librazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

Esercizio 3. Si consideri la seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{p_1^2 + q_1^2}{2}\left(1 + \frac{p_2^2 + q_2^2}{2}\right)$$

ove $p_1 \in R, p_2 \in R, q_1 \in R, q_2 \in R$ sono canonicamente coniugate.

a. Si introducano le coordinate di azione–angolo. Si scriva l'integrale generale del sistema (non è necessario esprimere le costanti di integrazione in funzione dei dati iniziali $p(0), q(0)$:

$$q_1(t) = \dots \ , \ p_1(t) = \dots \ , \ q_2(t) = \dots \ , \ p_2(t) = \dots \ , \ .$$

b. Si determinino le condizioni iniziali che danno luogo a soluzioni periodiche.

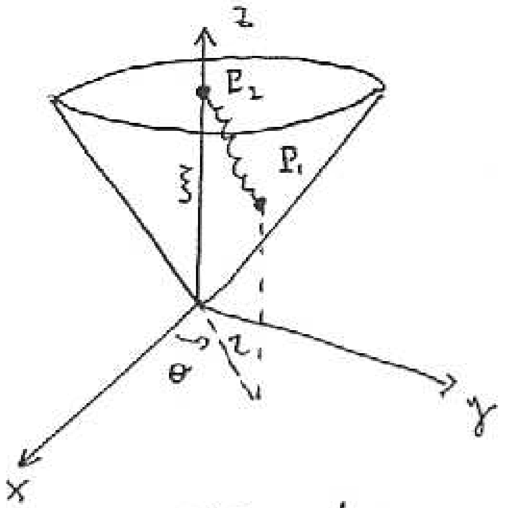

FIGURA 1

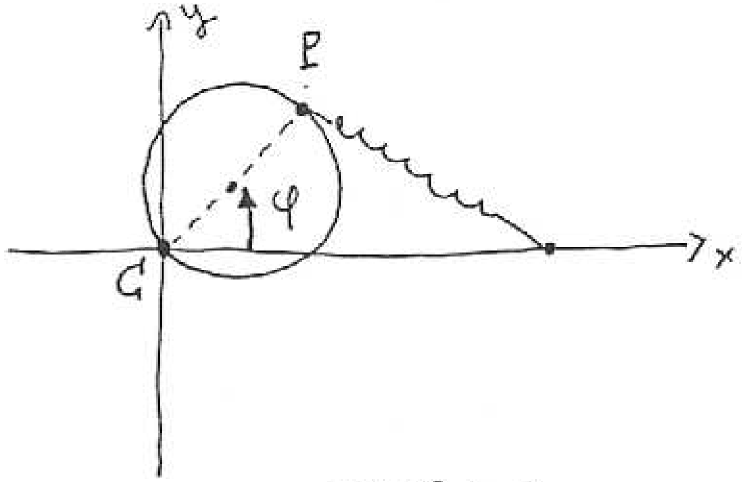

FIGURA 2