I Compitino di Meccanica Razionale
Parte scritta

(Corso di Laurea in Fisica – 20.04.02)

Esercizio 1. Un punto materiale di massa m è vincolato alla curva di equazioni

$$x(\varphi) = A\varphi\cos\varphi\,, \qquad y(\varphi) = A\varphi\sin\varphi\,, \qquad z(\varphi) = \frac{A}{2}\varphi^2\,, \qquad \varphi > 0$$

ove l'asse z è verticale discendente ed A è una costante positiva. (È un'elica che si avvolge su un paraboloide). L'unica forza attiva è la forza peso.

i. Scrivere la Lagrangiana e l'equazione del moto.
ii. Mostrare che, per $\varphi \to \infty$, la velocità $\dot\varphi$ tende ad un valore indipendente dalle condizioni iniziali.

Esercizio 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in R^2:

$$\begin{aligned}\dot x &= \alpha x + xy^2\\ \dot y &= \alpha^2 y + xy^2\end{aligned}$$

dipendente dal parametro reale α.

a. Si determinino e si classifichino i punti singolari al variare di $\alpha \neq 0$ (non occorre studiare eventuali valori non generici di α).
b. Si tracci il ritratto in fase per $\alpha \neq 0$ e $|\alpha|$ piccolo.

Esercizio 3. Si consideri il sistema conservativo ad un grado di libertà x con potenziale:

$$V(x) = \sin^2 x + \mu\sin^3 x \quad ,$$

dipendente dal parametro μ. Si tracci il ritratto in fase per $0 < \mu < 1$.

Soluzione Esercizio 1

i) $T = \frac{1}{2} m A (1+2\varphi^2)\dot\varphi^2$

$V = -mg\,z(\varphi) = -\frac{1}{2} mg A \varphi^2$

$L = \frac{1}{2} A (1+2\varphi^2)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} g \varphi^2$

Eq moto:

$$A(1+2\varphi^2)\ddot\varphi + 2A\varphi\dot\varphi^2 - g\varphi = 0$$

ii) Si usa conservazione energia:

$$\frac{1}{2} A (1+2\varphi^2)\dot\varphi^2 - \frac{1}{2} g\varphi^2 = E$$

$$\Rightarrow \dot\varphi^2 = \frac{2E + g\varphi^2}{A(1+2\varphi^2)} \xrightarrow[\varphi\to\infty]{} \frac{g}{2A}$$

Soluzione Esercizio 2

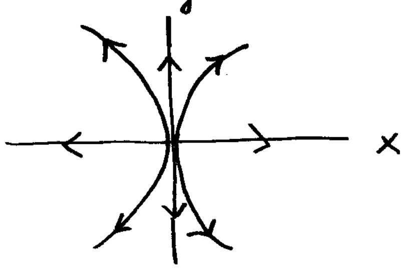
Equilibri: $(x,y) = (0,0)$

$= (\mp|\alpha|^{3/2}, \pm\sqrt{|\alpha|})$ se $\alpha < 0$

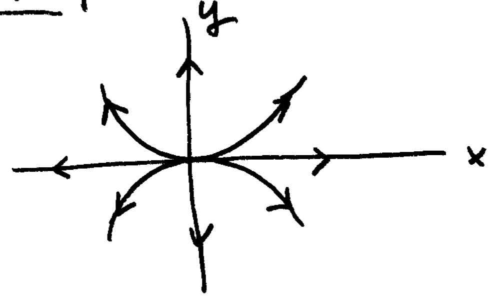
soluzioni di $\alpha + y^2 = 0$
$\alpha^2 + xy = 0$

Se $\alpha > 0$ c'è solo l'origine, che è un nodo:

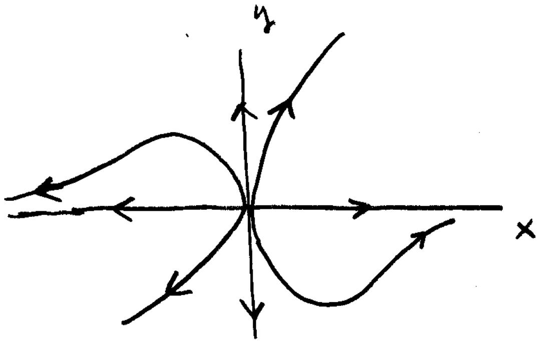
$\boxed{0<\alpha<1}$



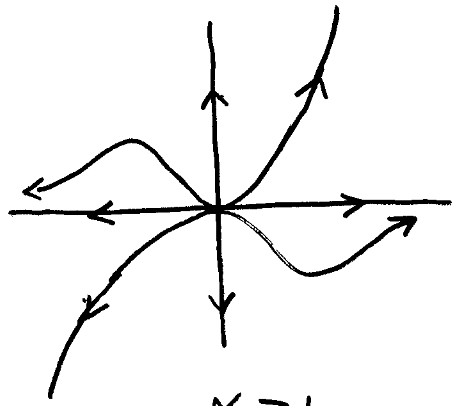
$\boxed{\alpha>1}$



- con i comportamenti asintotici



$0 < \alpha < 1$



$\alpha > 1$

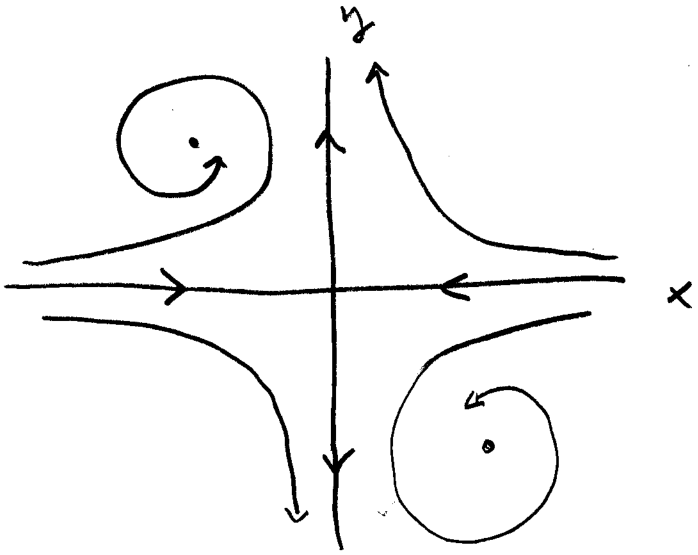
$\boxed{\text{Caso } \alpha < 0}$

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha + y^2 & 2xy \\ y^2 & \alpha^2 + 2xy \end{pmatrix} \longrightarrow A\left(\mp|\alpha|^{3/2}, \pm\sqrt{|\alpha|}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2|\alpha|^2 \\ |\alpha| & -|\alpha|^2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 2|\alpha|^3 > 0$, $\operatorname{tr}|A| = -|\alpha|^2 < 0$

$\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A = |\alpha|^3(|\alpha| - 8) < 0$ per $|\alpha|$ piccolo

$\Rightarrow$ fuochi stabili

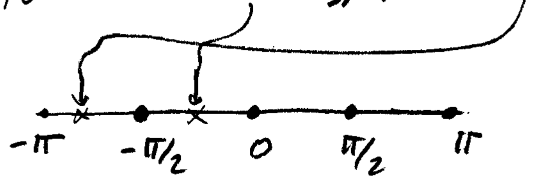


Soluzione esercizio 3

$$V'(x) = (2+3\mu \sin x)\sin x \cos x$$

Equilibri: $x_{1,\dots,4} = 0, \pi, \pm\frac{\pi}{2}$

$$x_{5,6} = -\arcsin\left(\frac{2}{3\mu}\right), \; -\pi+\arcsin\left(\frac{2}{3\mu}\right) \quad \text{se } \mu \geq \frac{2}{3}$$



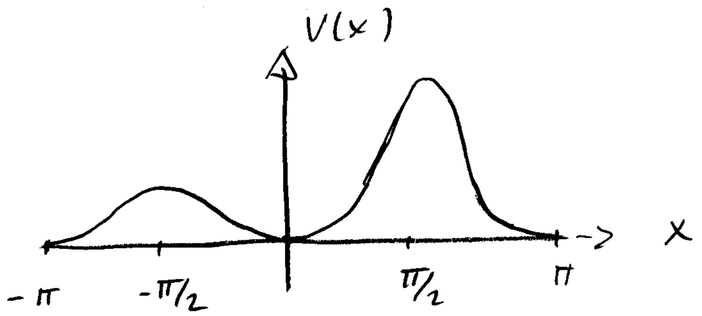
$\boxed{\mu < \frac{2}{3}}$

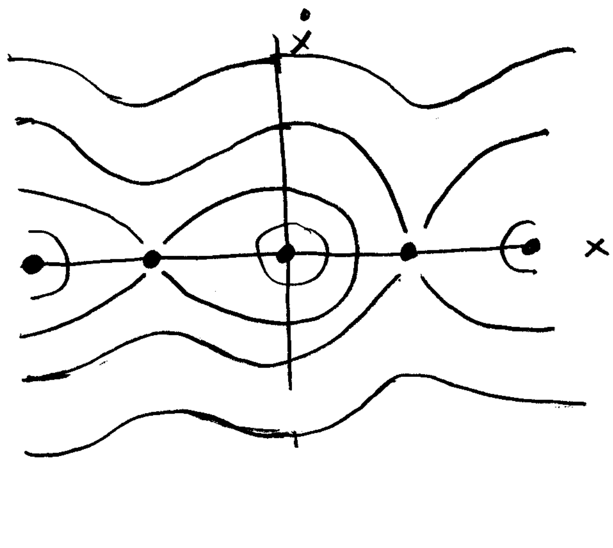
$$V''(x) = 2\cos^2 x + [\dots]\sin x \Rightarrow V''(0) = V''(\pi) = 2$$

$\Rightarrow x=0$, e $x=\pi$ sono minimi

$\Rightarrow x = \pm\pi/2$ sono massimi. (Teo Rolle)

Siccome $V(0) = V(\pi) = 0$ e $V\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 1 \pm \mu$ si ha





Vale anche se $\mu = \frac{2}{3}$

$\boxed{\mu > \frac{2}{3}}$ $0, \pi$ sono ancora minimi $(V''=2)$

Cosa sono $x_{5,6}$?

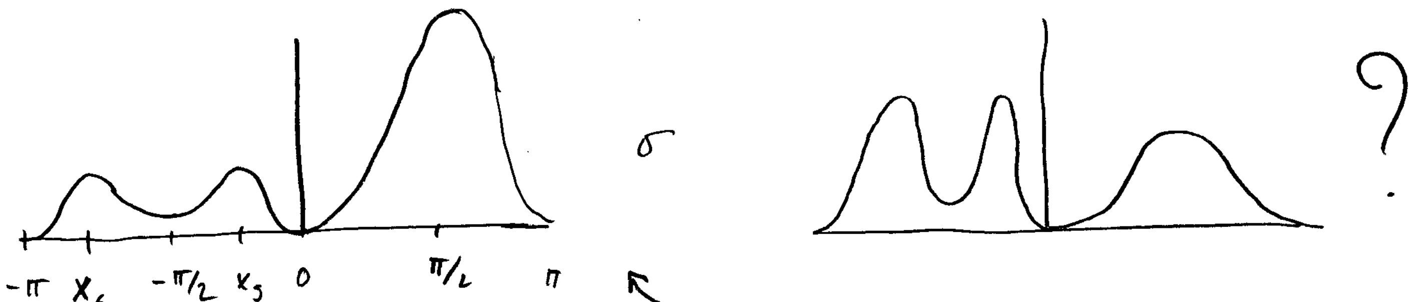
$$V''(x) = \underbrace{(2+3\mu \sin x)}\frac{d}{dx}(\sin x \cos x) + 3\mu \sin x \cos^2 x$$

$$V''(x_{5,6}) = 0 + 3\mu \sin x_5 \cos^2 x_5$$

$$= 3\mu\left(-\frac{2}{3\mu}\right)\underbrace{\cos^2 x_5}_{>0} < 0$$

$\Rightarrow$ $x_{5,6}$ sono massimi $\Longrightarrow$ $\pm\frac{\pi}{2}$ sono minimi (Teo Rolle)

Due casi possibile:



$$V(x_{5,6}) = \sin^2 x_5 + \mu \sin^3 x_5 = \left(-\frac{2}{3\mu}\right)^2 + \mu\left(-\frac{2}{3\mu}\right)^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3\mu}\right)^2 < \frac{1}{3}.$$

$V(\pi/2) = 1+\mu > 1$. Dunque $V(\frac{\pi}{2}) > V(x_{5,6})$ e il ritratto in fase è